ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ 18-19

Вычисление потока векторного поля через поверхность. Формула Остроградского-Гаусса

Потоком вектора $\vec{a}$ через поверхность S называется интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности, т.е.

$$\Pi = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS . \qquad (1)$$

Так как $\vec{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, $\vec{a} = (P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z))$, то поток вектора $\vec{a}$, можно записать в виде поверхностного интеграла 1-го рода

$$\Pi = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

Используя взаимосвязь поверхностных интегралов I и II рода, поток вектора можно записать как

$$\Pi = \iint_S (Pdydz + Qdxdz + Rdxdy).$$

Величина Π *равна объему жидкости, которая протекает через поверхность S за единицу времени*. В этом состоит *физический смысл потока*.

Если поверхность замкнута и ограничивает некоторый объем V. Тогда поток вектора записывается в виде

$$\Pi = \oiint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS .$$

В этом случае за направление вектора нормали $\vec{n}$ обычно берут направление внешней нормали и говорят о потоке изнутри поверхности S.

Если векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ есть поле скоростей текущей жидкости, величина потока Π через замкнутую поверхность дает разность между количеством жидкости, вытекающей из области V и втекающей в нее за единицу времени.

При этом если $\Pi > 0$, то из области V вытекает больше жидкости, чем в нее втекает. Это означает, что внутри области имеются дополнительные *источники*.

Если $\Pi < 0$, то внутри области V имеются *стоки*, поглощающие избыток жидкости.

Теорема 1. Пусть T - простое тело, а $\Sigma = \partial\mathrm{T}$ - кусочно-гладкая поверхность. Функции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ и их частные производные $P'_x(M)$, $Q'_y(M)$, $R'_z(M)$ непрерывны на множестве $\mathrm{T} \cup \Sigma$. Пусть Σ^+ - внешняя сторона поверхности Σ. Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_{\mathrm{T}\cup\Sigma} \left(P'_x(M) + Q'_y + R'_z(M)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma^+} P(M)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

которая называется формулой Остроградского – Гаусса.

Важной характеристикой векторного поля является дивергенция, характеризующая распределение и интенсивность источников и стоков поля.

Дивергенцией (или расходимостью) *векторного поля*

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

в точке M называется скаляр вида $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ и обозначается символом $\operatorname{div}\vec{a}(M)$, т.е.

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Рассматривая область V, ограниченную замкнутой поверхностью S, можно утверждать, что левая часть формулы Остроградского-Гаусса есть поток вектора $\vec{a}$ через поверхность S; подынтегральная функция правой части формулы есть дивергенция вектора $\vec{a}$. Следовательно, формулу Остроградского-Гаусса можно записать в виде

$$\Pi = \oiint\limits_S \bar{a} \cdot \bar{n}\, dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\bar{a}\, dxdydz.$$

Формула Остроградского–Гаусса означает, что *поток векторного поля через замкнутую поверхность S (в направлении внешней нормали, т.е. изнутри) равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему V, ограниченному данной поверхностью.*

Примеры решения задач

1. Дано векторное поле $\vec{a}(M) = (2x - 5y + 6z)\vec{i} + (-4x + 8y - 12z + 1)\vec{j} + (3x + 9y + 2z - 3)\vec{k}$, и пирамида с вершинами в точках $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 2,\ 0)$, $C(0,\ 0{,}5)$. Найти поток векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ через грань ABC пирамиды $OABC$ в направлении внешней нормали.

Решение. Найдем уравнение грани ABC заданной пирамиды, воспользовавшись уравнением плоскости в отрезках

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{5}=1 \text{ или } 10x+5y+2z=10.$$

Определяем вектор внешней нормали к грани ABC: $\vec{n}_1=(10,\ 5,\ 2)$. Конструируем из него единичный вектор нормали

$$\vec{n}=\frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|}=\left(\frac{10}{\sqrt{129}},\ \frac{5}{\sqrt{129}},\ \frac{2}{\sqrt{129}}\right).$$

Находим скалярное произведение:

$$(\vec{a}\cdot\vec{n})=\frac{1}{\sqrt{129}}\left((2x-5y+6z)\cdot 10+(-4x+8y-12z+1)\cdot 5+(3x+9y+2z-3)\cdot 2\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{129}}\left(6x+8y+4z-1\right).$$

По формуле (1) определяем поток через грань ABC:

$$\Pi=\frac{1}{\sqrt{129}}\iint\limits_S (6x+8y+4z-1)dS.$$

Переходим от поверхностного интеграла к двойному интегралу, проецируя грань ABC на плоскость Oxy:

$$\Pi=\frac{1}{\sqrt{129}}\iint\limits_S \left(6x+8y+4z-1\right)dS=$$

$$\{\text{выражаем из уравнения грани } ABC\ \ z=\frac{10-10x-5y}{2}\ \}$$

$$=\left\{z'_x=-5,\ z'_y=-\frac{5}{2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{129}}\iint\limits_D (-14x-2y+19)\sqrt{1+25+\frac{25}{4}}dxdy=$$

$$=\iint\limits_D (-14x-2y+19)dxdy.$$

Здесь использовалась формула $dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy$.

Грань ABC определяется условиями $S=\left\{(x,y,z):\begin{matrix}10x+5y+2z=10\\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\end{matrix}\right\}$. Проекцию D на плоскость Oxy находим, исключая z из условий, определяющих S:

$$S=\left\{(x,y,z):\begin{matrix}z=\dfrac{10-10x-5y}{2}\\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow D=\left\{(x,y):\begin{matrix}x\ge 0,\ y\ge 0\\ \dfrac{10-10x-5y}{2}\ge 0\end{matrix}\right\}.$$

Отсюда

$$D=\left\{(x,y):\begin{matrix}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 2(1-x)\end{matrix}\right\}.$$

Вычисляем двойной интеграл, сводя его к повторному

$$\Pi=\iint\limits_D(-14x-2y+19)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}(19-14x-2y)dy=\int_0^1\left((19-14x)y-y^2\right)\Big|_0^{2(1-x)}dx=$$

$$=\int_0^1\left((19-14x)2(1-x)-4(1-x)^2\right)dx=\int_0^1(34-58x+24x^2)dx=$$

$$=(34x-29x^2+8x^3)\Big|_0^1=34-29+8=13.$$

Ответ: П=13.

2. Найти поток векторного поля $\mathbf{F}=(x+xy^2)\mathbf{i}+(y-yx^2)\mathbf{j}+(z-3)\mathbf{k}$ через часть поверхности S: $x^2+y^2=z^2(z\ge 0)$, вырезаемую плоскостью $z=1$ (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

Решение. Поверхность S является конусом, проекция которого на плоскость Oxy представляет собой круг радиуса 1. Нормаль к поверхности найдем как градиент скалярной функции

$$\Phi(x,y,z)=x^2+y^2-z^2,$$

то есть

$$\operatorname{grad}\Phi = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}.$$

Тогда единичная нормаль к поверхности имеет координаты:

$$\mathbf{n}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Отсюда,

$$\cos\gamma = -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad ds = \frac{dxdy}{|\cos\gamma\ |}.$$

Поток векторного поля **F** вычислим как поверхностный интеграл первого рода

$$\Pi = \iint_S \mathbf{Fn}ds,$$

сводя его к двойному интегралу по проекции поверхности *S* на плоскость *0xy*:

$$\Pi = \iint_S \frac{x^2\left(1+y^2\right)+y^2\left(1-x^2\right)-z(z-3)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}ds = \iint_{Dxy}\left[\frac{x^2(1+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2(1-x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\left(\sqrt{x^2+y^2}-3\right)\right]dxdy.$$

Поскольку областью *D* является кругом с центром в начале координат, то удобно перейти к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\cdot\left[\frac{\rho^2\cos^2\varphi(1+\rho^2\sin^2\varphi)}{\rho}+\frac{\rho^2\sin^2\varphi(1-\rho^2\cos^2\varphi)}{\rho}-\rho+3\ \right]d\rho.$$

Упростив подынтегральное выражение, вычислим внутренний интеграл $\int_0^1 3\rho\, d\rho = \frac{3}{2}$.

Окончательно найдем $\Pi = \int_0^{2\pi}\frac{3}{2}d\varphi = 3\pi.$

Ответ: $\Pi = 3\pi.$

3. Найти дивергенцию векторного поля $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}.$

Решение. Согласно определению дивергенции, имеем

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(z^2)}{\partial z} = 2x+2y+2z.$$

Ответ: $\mathrm{div}F = 2x+2y+2z$.

4. Найти поток векторного поля **F** через замкнутую поверхность *S*, если

$$\mathbf{F} = (e^y+2x)\mathbf{i}+(xz-y)\mathbf{j}+\frac{1}{4}(e^{xy}-z)\mathbf{k}, \quad S:\ x^2+y^2+z^2 = 2y+3.$$

Решение. Поток через замкнутую поверхность можно вычислить по формуле Остроградского–Гаусса:

$$\Pi = \iiint\limits_V \mathrm{div}\mathbf{F}dv,$$

где $\mathrm{div}\mathbf{F} = \dfrac{dP}{dx} + \dfrac{dQ}{dy} + \dfrac{dR}{dz}$, V – область, ограниченная поверхностью S.

Уравнение поверхности S преобразуем к виду $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$, из которого видно, что это сфера радиуса 2 с центром в точке C (0; 1; 0).

Найдем дивергенцию $\mathrm{div}\mathbf{F} = 2 - 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Вычислим поток

$$\Pi = \iiint\limits_V \frac{3}{4}\cdot dxdydz = \frac{3}{4}\cdot\iiint\limits_V dxdydz.$$

Объем шара вычисляется по формуле $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, поэтому $\Pi = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\pi 2^3 = 8\pi$.

Ответ: $\Pi = 8\pi$.

5. Найти поток векторного поля $\mathbf{F} = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность S: $x^2 = y$, $y = 4x^2$, $z = y$, $z = 0$, $x \ge 0$ (нормаль внешняя).

Решение. Поток через замкнутую поверхность вычислим по формуле Остроградского–Гаусса. Для этого найдем дивергенцию

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} = \frac{d(2x)}{dx} + \frac{d(2y)}{dy} + \frac{d(z)}{dz} = 5.$$

Поток равен тройному интегралу от дивергенции по области V, ограниченной снизу плоскостью $z = 0$, сверху плоскостью $z = y$, а боковая поверхность представляет собой цилиндрическую поверхность с образующей параллельной оси Oz. Таким образом, поток равен

$$\Pi_S = \iiint\limits_V \mathrm{div}\mathbf{F}dv = 5\iiint\limits_V dxdydz = 5\int_0^1 dy \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} dx \int_0^y dz = 5\int_0^1 dy \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} y dx = 5\int_0^1 y\left(\sqrt{y} - \frac{\sqrt{y}}{2}\right)dy =$$

$$= \frac{5}{2}\int_0^1 y^{\frac{3}{2}}dy = \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{y^5}\,\Big|_0^1 = 1.$$

Ответ: П=1.

6. Вычислить поток Π векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

$$\vec{a} = (xy + y^2 + z)\vec{i} + (x^2 z + yz)\vec{j} + (x^2 + xz)\vec{k},\ S: x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ z = 1.$$

Решение. Для вычисления потока заданного векторного поля $\vec{a}(M)$ по заданной замкнутой поверхности *S*, воспользуемся формулой Остроградского–Гаусса, предварительно вычислив дивергенцию векторного поля

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(xy + y^2 + z) + \frac{\partial}{\partial x}(x^2 z + yz) + \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xz) = y + z + x.$$

Тогда искомый поток по заданной замкнутой поверхности определится выражением

$$\Pi = \iiint\limits_V (x + y + z)\,dxdydz,$$

где V – область, ограниченная заданной замкнутой поверхностью (рис. 1) и определяется неравенствами:

$$V = \left\{ (x, y, z) : \begin{matrix} x^2 + y^2 \le 4 \\ 0 \le z \le 1 \end{matrix} \right\}.$$

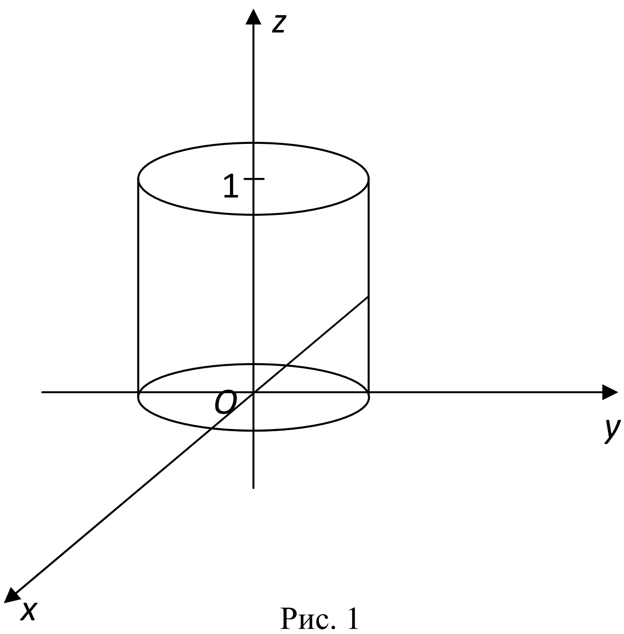

Рис. 1

Область V такова, что удобно перейти к цилиндрическим координатам. Имеем

$$V=\left\{(\rho,\varphi,z):\begin{matrix}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\rho\le 2\\ 0\le z\le 1\end{matrix}\right\}.$$

Переходя к цилиндрическим координатам в тройном интеграле, получаем

$$\Pi=\iiint\limits_V(x+y+z)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho d\rho\int\limits_0^1(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+z)dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho\left(\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)z+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(\rho^2(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{1}{2}\rho\right)d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left((\cos\varphi+\sin\varphi)\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^2}{4}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{8}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)+1\right)d\varphi=$$

$$=\left(\frac{8}{3}(\sin\varphi-\cos\varphi)+\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi.$$

Ответ. $\Pi = 2\pi$.

7. Пользуясь формулой Остроградского – Гаусса, вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_\Sigma x^2yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}z+xyz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где Σ - внешняя сторона поверхности тела T, заданного неравенствами $x^2+y^2\le 4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $0\le z\le 3$.

Решение. Сопоставляя данный поверхностный интеграл с поверхностным интегралом формулы Остроградского – Гаусса, определяем $P(M)=x^2yz, Q(M)=xy^2z$, $R(M)=xyz^2$. Найдем частные производные этих функций $P'_x(M)=2xyz, Q'_y(M)=2xyz$, $R'_z(M)=2xyz$. Функции $P(M),Q(M)$, $R(M)$ и производные $P'_x(M),Q'_y(M)$, $R'_z(M)$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда

$$\iint\limits_\Sigma x^2yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}z+xyz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\mathrm{T}}6xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\iiint\limits_{\mathrm{T}}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Замкнутая поверхность Σ образована частью цилиндрической поверхностью, двумя четвертями кругов и двумя прямоугольниками (рис.2). Для вычисления тройного интеграла целесообразно применить цилиндрические координаты.

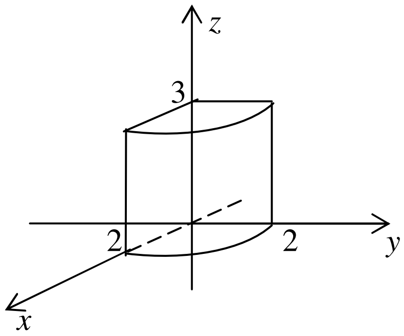

Рис. 2

Пусть $\tilde{T}$ - пространственная область в системе координат $O\varphi rz$, которая с помощью функций $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ Отображается на пространственную область T. Поскольку $\tilde{T} = \left\{(\varphi, r, z) \mid 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2, 0 \le z \le 3\right\}$, то

$$6\iiint\limits_{\tilde{T}} r^3 \cos\phi \sin\phi z \, d\phi \, dr \, dz = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^2 dr \int_0^1 r^3 \cos\phi \sin\phi z \, dz = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^2 \left(\frac{1}{2} r^3 \cos\phi \sin\phi z^2 \Big|_0^1 \right) dr =$$

$$= 3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^2 r^3 \, dr \right) = 3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\sin\varphi \right) \cdot \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^2 \right) = \frac{3}{2} \sin\varphi^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot 4 = 6 \cdot 1 = 6$$

Ответ. 6.