ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

Применение степенных рядов

Приближенное вычисление значений функции

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x = x_1$. В интервале $(-R, R)$ функцию $f(x)$ можно разложить в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

где $x_1 \in (-R; R)$, то точное значение $f(x_1)$ равно сумме этого ряда при $x = x_1$, т.е.

$$f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n + \ldots,$$

а приближенное – частичной сумме $S_n(x_1)$, т.е.

$$f(x_1) \approx S_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n.$$

Ошибку $\left|f(x_1) - S_n(x_1)\right|$ можно найти, оценив остаток $r_n(x_1)$ ряда.

Для рядов лейбницевского типа

$$\left|r_n(x_1)\right| = \left|u_{n+1}(x_1) + u_{n+2}(x_1) + u_{n+3}(x_1) + \ldots\right| < \left|u_{n+1}(x_1)\right|.$$

Приближенное вычисление определенных интегралов

Пусть требуется вычислить $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с точностью до $\varepsilon > 0$. Если подынтегральную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по степеням x и интервал сходимости $(-R, R)$ включит в себя отрезок $[a, b]$ то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда.

Приближенное решение дифференциальных уравнений

Пусть требуется решить уравнение $y'' = f(x; y; y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y\Big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\Big|_{x=x_0} = y_0'$.

Решение $y = y(x)$ ищем в виде ряда Тейлора:

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...,$$

при этом первые два коэффициента находим из начальных условий. Подставив в уравнение значения $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, находим третий коэффициент: $y''(x_0) = f(x_0; y_0; y'_0)$. Значения $y'''(x_0), y^{(4)}(x_0),...$ находим путем последовательного дифференцирования уравнения по x и вычисления производных при $x = x_0$. Найденные значения производных подставляем в ряд, который и представляет искомое частное решение уравнения для тех значений x, при которых он сходится. Частичная сумма этого ряда будет приближенным решением дифференциального уравнения.

Примеры решения задач

1. Вычислить arctg 0.3 с точностью $\varepsilon = 0.01$.

Решение.

$$arc\,\mathrm{tg}\, x = \int_0^x \frac{dx}{1 + x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ..., \qquad \mathrm{arctg}\, 0.3 = 0.3 - \frac{(0.3)^3}{3} + \frac{(0.3)^5}{5} + ...$$

По следствию из признака Лейбница остаток числового знакочередующегося ряда оценивается модулем первого отброшенного члена. $|r_n| \le \frac{(0.3)^{n+1}}{n+1} < 0{,}01$. Из этого неравенства найдем n, n=2.

Ответ: $\mathrm{arctg}\, 0.3 \approx 0{,}3$.

2. Вычислить $e^{0,2}$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

Решение. Используя разложение

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty),$$

найдем

$$e^{0,2} = 1 + 0{,}2 + \frac{(0{,}2)^2}{2!} + \frac{(0{,}2)^3}{3!} + \frac{(0{,}2)^4}{4!} + \ldots.$$

Так как $\frac{(0{,}2)^4}{4!} < 0{,}0001$, то для получения нужной точности достаточно взять первые четыре члена ряда:

$$e^{0,2}=1+0,2+\frac{(0,2)^2}{2!}+\frac{(0,2)^3}{3!}\approx 1,2213$$

Ответ: $e^{0,2}\approx 1,2213$.

3. Вычислить определенный интеграл

$$\int\limits_0^{0,9}\frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^5}}$$

с точностью до 0,001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{1+x^5}}$ в ряд по степеням x, воспользовавшись формулой

$$(1+t)^{\alpha}=1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}t^n+\ldots$$

при $t=x^5$ и $\alpha=-\dfrac{1}{5}$:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{1+x^5}}=1-\frac{1}{5}x^5+\frac{3}{25}x^{10}-\frac{11}{125}x^{15}+\frac{44}{625}x^{20}-\frac{924}{15625}x^{25}+\ldots$$

Разложение справедливо в интервале $(-1,1]$, который покрывает интервал интегрирования, поэтому возможно интегрировать почленно полученный степенной ряд.

Интегрируем почленно полученный ряд:

$$\int\limits_0^{0,9}\frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^5}}=\int\limits_0^{0,9}\left(1-\frac{1}{5}x^5+\frac{3}{25}x^{10}-\frac{11}{125}x^{15}+\frac{44}{625}x^{20}-\frac{924}{15625}x^{25}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{1}{30}x^6+\frac{3}{25\cdot 11}x^{11}-\frac{11}{125\cdot 16}x^{16}+\frac{44}{625\cdot 21}x^{21}-\frac{924}{15625\cdot 26}x^{26}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,9}=$$

$$=0,9-\frac{0,9^6}{30}+\frac{3}{275}0,9^{11}-\frac{11}{2000}0,9^{16}+\frac{44}{13125}0,9^{21}-\frac{924}{406250}0,9^{26}+\ldots$$

Оценим остаток ряда. Так как ряд знакочередующийся,

$a_1 = 0,9 > a_2 = \frac{1}{30}0,9^6 > a_3 = \frac{3}{275}0,9^{11} > a_4 = \frac{11}{2000}0,9^{16} > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то справедливо неравенство $\left|R_n\right| \le a_{n+1}$.

Для вычисления интеграла с заданной точностью достаточно взять четыре члена ряда, так как

$$R_3 \le \frac{44}{13125}0,9^{21} < 0,001\,.$$

Производя вычисления, получаем

$$\int\limits_0^{0,9} \frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^5}} \cong 0,9 - \frac{1}{30}0,9^6 + \frac{3}{275}0,9^{11} - \frac{11}{2000}0,9^{16} \cong 0,974\,.$$

Ответ: $\int\limits_0^{0,9} \frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^5}} \cong 0,974 \pm 0,001\,.$

4. Вычислить определенный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x} \mathrm{d}x$$

с точностью до $0,001$.

Решение. Для разложения подынтегральной функции в ряд применим разложение

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

где ряд сходится при любом значении *x*.

$$\frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(\cos x^{\frac{1}{2}} - 1\right) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \ldots - 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{2!} + \frac{x}{4!} - \frac{x^2}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(2n)!} + \ldots.$$

Обозначим данный интеграл через *S*, а искомое приближенное значение интеграла через S'.

$$S=\int_0^1\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{4!}-\frac{x^2}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{(2n)!}+\ldots\right)\mathrm{d}x=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x+\frac{1}{4!}\int_0^1 x\mathrm{d}x-\frac{1}{6!}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x+\ldots=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4!2}x^2-\frac{1}{6!3}x^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!n}x^n+\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!n}+\ldots=S'+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!(n+1)}+\ldots.$$

Для вычисления интеграла с заданной точностью достаточно, чтобы абсолютная величина последнего слагаемого в сумме S' была меньше числа 0,001.

Так как $\frac{1}{6!3}=\frac{1}{2160}<\frac{1}{1000}=0,001,$ то

$$S\approx S'=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4!2}-\frac{1}{6!3}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{48}-\frac{1}{2160}=\frac{-1080+45-1}{2160}=-\frac{259}{540}.$$

Ответ: $\int_0^1\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}\mathrm{d}x=-\frac{259}{540}\pm 0,001$.

5. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx$$

с точностью до 0,0001.

Решение. Используя известное разложение

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty;\infty),$$

найдем

$$\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{0,5}(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-...)dx=(x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-...)\Big|_0^{0,5}=0,5-\frac{0,125}{18}+\frac{0,03125}{600}-....$$

Так как $\frac{0,03125}{600}<0,0001$, то для получения нужной точности достаточно взять первые два члена ряда:

$$\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx\approx 0,5-\frac{0,125}{18}\approx 0,4931$$

Ответ: $\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx\approx 0,4931$

6. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y'=2y^3+\sin x$, удовлетворяющего данному начальному условию $y(0)=1$.

Решение. Будем искать решение уравнения в виде

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+...$$

Здесь $y(0)=1$. Находим $y'(0)$, подставив $x=0$ в исходное уравнение: $y'(0)=2\cdot 1^3+0=2$. Для нахождения следующего коэффициента дифференцируем заданное дифференциальное уравнение, получим

$$y''=3y^2y'+\cos x$$

При $x=0$ имеем: $y''(0)=2\cdot 1^2\cdot 2+1=5$. Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим:

$$y=1+x+\frac{5}{2}x^2+...$$

Ответ. $y=1+x+\frac{5}{2}x^2+....$

7. Методом последовательного дифференцирования найти пять первых членов (отличных от нуля) разложения в ряд решения уравнения

$$y''=x^2+y^2,\ y(-1)=2,\ y'(-1)=\frac{1}{2}.$$

Решение. Будем искать решение уравнения в виде

$$y = y(-1) + \frac{y'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{y''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{y'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \ldots$$

Здесь $y(-1) = 2,\ y'(-1) = \frac{1}{2}$. Находим $y''(-1)$, подставив $x = -1$ в исходное уравнение: $y''(-1) = (-1)^2 + 2^2 = 5$. Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем заданное дифференциальное уравнение:

$$y''' = 2x + 2yy',$$
$$y^{(4)} = 2 + 2(y')^2 + 2yy'',$$
$$y^{(5)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 6y'y'' + 2yy''', \ldots$$

При $x = -1$ имеем:

$$y'''(-1) = -2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$
$$y^{(4)}(-1) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 2 \cdot 5 = 22{,}5,$$
$$y^{(5)}(-1) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 0 = 15, \ldots$$

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим:

$$y = 2 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{15}{16}(x+1)^4 + \frac{1}{8}(x+1)^5 + \ldots$$

Ответ. $y = 2 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{15}{16}(x+1)^4 + \frac{1}{8}(x+1)^5 + \ldots$