<u>Практическое занятие 6</u>

Разложение функций в ряды Фурье

Тригонометрическим рядом называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+...+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+...$$

или, $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

Рядом Фурье для функции для функции $f(x)$ в интервале $(-\pi;\pi)$ называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx;\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx;\quad n=1,2,...;\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\quad n=1,2,...$$

Если $f(x)$ – четная периодическая функция с периодом 2π, ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx\qquad (n=0,1,2,...).$$

Ряд Фурье для нечетной функции $f(x)$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx;\qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx;\qquad (n=1,2,...).$$

Теорема Дирихле. Если функция $f(x)$ имеет период 2π и на отрезке $[-\pi;\pi]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода, и отрезок $[-\pi;\pi]$ можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них функция $f(x)$ монотонна, то ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности функции $f(x)$ его сумма равна $f(x)$, а в точках разрыва его сумма равна

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},$$

т.е. среднему арифметическому предельных значений слева и справа.

При отыскании коэффициентов Фурье полезно знать некоторые формулы:

1) $\cos n\pi=(-1)^n,\ n\in Z$;

2) $\cos\frac{n\pi}{2}=0$, $n\in Z$, n – нечетное;

3) $\sin n\pi=0$, $n\in Z$.

Также отметим, что если $f(x)$ – нечетная функция, то интеграл $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0.$

Примеры решения задач

1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x^3$ с периодом $T=2\pi$ на отрезке [-π;π].

Решение. Заданная функция является нечетной, следовательно, коэффициенты Фурье ищем в виде:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nxdx; \qquad (n=1,2,...).$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^3\sin nxdx=\left\{\begin{matrix} u=x^3; & dv=\sin nxdx; \\ du=3x^2dx; & v=-\dfrac{\cos nx}{n}; \end{matrix}\right\}=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^3\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{3}{n}\int\limits_0^{\pi} x^2\cos nxdx\right)=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x^2; & dv=\cos nxdx; \\ du=2xdx; & v=\dfrac{\sin nx}{n}; \end{matrix}\right\}=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}+\frac{3}{n}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}dx\right]\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}-\frac{6}{n^2}\int\limits_0^{\pi} x\sin nxdx\right)=\left\{\begin{matrix} u=x; & dv=\sin nxdx; \\ du=dx; & v=-\dfrac{\cos nx}{n}; \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}-\frac{6}{n^2}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}+\frac{6\pi\cos\pi}{n^3}-\frac{6}{n^3}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right)\right)=-\frac{2\pi^2\cos\pi n}{n}+\frac{12\cos\pi n}{n^3}=(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)$$

Получаем:

$$x^3=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx.$$

Ответ: $x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx$.

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -\pi < x < 0 \\ 2, & \text{при } 0 \le x < \pi \end{cases}$.

Решение. Так как данная функция задана двумя формулами, то разбиваем интеграл $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ на сумму двух:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{\pi} 2 \cdot dx \right) = \frac{1}{\pi} 2x \Big|_0^{\pi} = 2 .$$

Аналогично поступаем с остальными двумя интегралами:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \cos nx\, dx + \int_{0}^{\pi} 2 \cdot \cos nx\, dx \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} \sin \pi x = 0 ;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \sin \pi x\, dx + \int_{0}^{\pi} 2 \cdot \sin nx\, dx \right) = -\frac{2}{n\pi} \cdot \cos nx \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{n\pi} (\cos n\pi - \cos 0) = -\frac{2}{n\pi} \left((-1)^n - 1 \right) = \frac{2}{n\pi} \left(1 - (-1)^n \right).$$

Следовательно,

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(1 - (-1)^n \right) \sin nx = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - (-1)^n \right)}{n} \sin nx .$$

Ответ: $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(1 - (-1)^n \right) \sin nx = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - (-1)^n \right)}{n} \sin nx$

3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = \pi + x$ с периодом T = 2π на отрезке [-π;π].

Решение. Вычисляем коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) dx = \frac{1}{\pi} (\pi x + \frac{x}{2}) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\cdot\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cdot\cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}x\cdot\cos nx\,dx\right) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

здесь интеграл $\int_{-\pi}^{\pi}x\cdot\cos nx\,dx = 0$, так как подынтегральная функция является нечетной функцией. Находим теперь коэффициенты b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\cdot\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cdot\sin nx\,dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin nx, & v = -\dfrac{\cos nx}{n}\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{n}\cdot\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cdot x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{n}\cdot\cos n\pi + \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2}{n}\cdot(-1)^n = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}.$$

Следовательно, получим разложение функции $f(x) = \pi + x$ в ряд Фурье:

$$f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Отметим, что график рассматриваемой функции имеет вид (рис. 1)

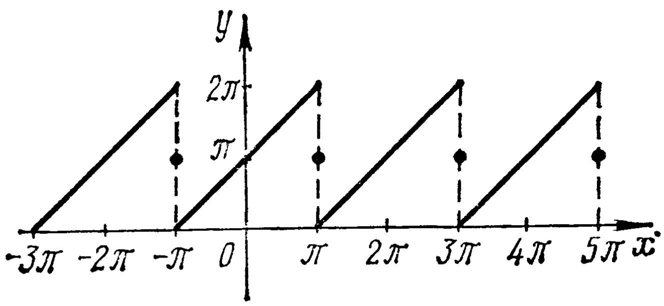

Рис. 1

Ответ: $f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$