ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах. Приложения двойных интегралов

Рассмотрим частный случай замены переменных, часто используемый при вычислении двойного интеграла, а именно замену декартовых координат *x* и *y* полярными координатами ρ и φ. Они связаны с декартовыми координатами формулами: $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$. Тогда,

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi,$$

где D^* – область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат.

Если область D^* имеет вид, изображенный на рис. 1, то правую часть последней формулы можно записать в виде

$$\iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\rho. \tag{1}$$

Внутренний интеграл берется при постоянном φ.

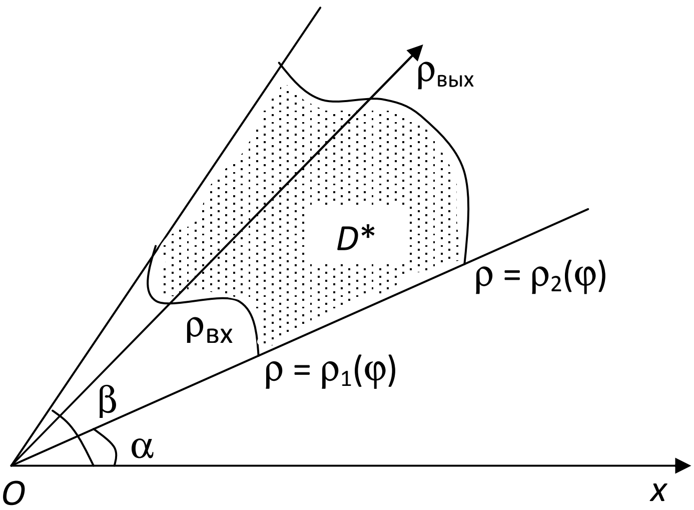

Рис. 1

Переход к полярным координатам полезен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2)$, область D есть круг, кольцо или часть таковых.

Приведем некоторые *приложения двойного интеграла*.

1) Если D – ограниченная область плоскости Oxy, то ее площадь S вычисляется по формуле:

$$S = S(D) = \iint_D dxdy\,. \qquad (2)$$

2) Предположим, что плоская пластина D имеет поверхностную плотность распределения масс $\gamma(x, y)$ непрерывную в D. Тогда масса m этой пластины вычисляется по формуле

$$m = \iint_D \gamma(x, y)dxdy. \qquad (3)$$

3) Статические моменты материальной пластины D с поверхностной плотностью $\gamma(x, y)$ относительно координатных осей Ox, Oy и координаты ее центра тяжести соответственно вычисляются по формулам:

$$M_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y)dxdy,\ M_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y)dxdy\,, \quad x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}\,. \qquad (4)$$

Примеры решения задач

1. Вычислить $\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$, где D – область, ограниченная линиями: $x^2 + y^2 = 4$, $y = x,\ y = \sqrt{3}x$.

Решение. Перейдем к полярным координатам:

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \iint_D ((\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2)\rho d\rho d\varphi = \iint_D \rho^3 d\rho d\varphi\,.$$

Так как $x^2 + y^2 = \rho^2$ и $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$, то область D : $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$, $0 \le \rho \le 2$ (рис. 2).

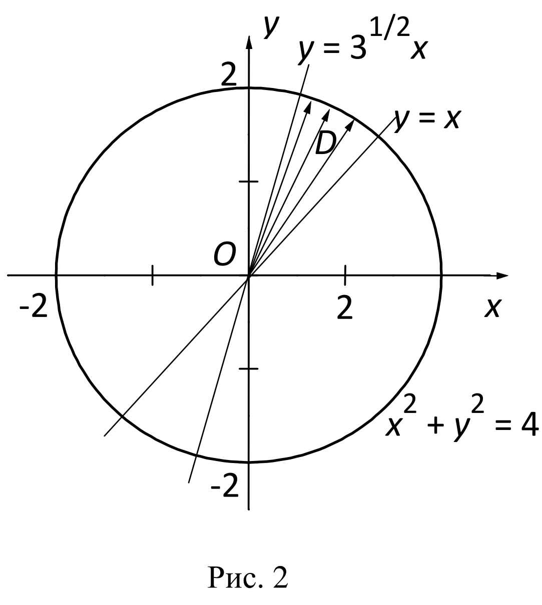

Рис. 2

Поэтому, согласно формуле (1):

$$\iint_D \rho^3 d\rho d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2 d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/3} 4d\varphi = 4\varphi\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \dfrac{\pi}{3}$.

2. Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты.

$$\int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Решение. Область интегрирования задается неравенствами

$$-\sqrt{3} \le x \le 0, \quad 0 \le y \le \sqrt{3-x^2}$$

и представляет собой четверть окружности с центром в начале координат и радиуса $\sqrt{3}$, расположенной во втором октанте (рис.3).

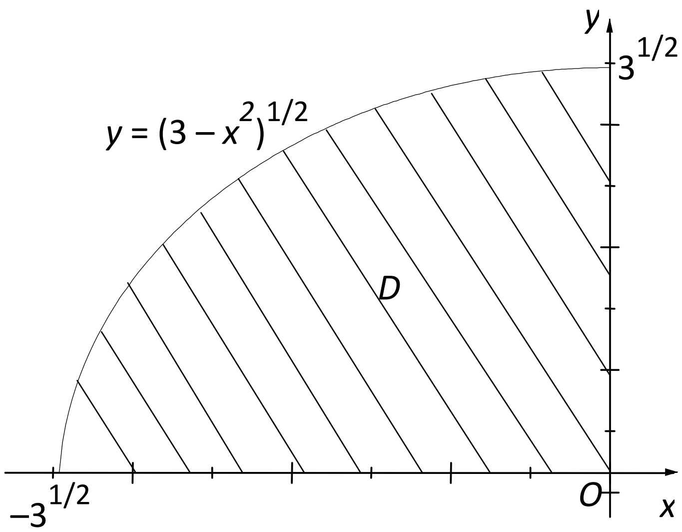

Рис. 3

Переходим к полярным координатам, тогда область интегрирования представится в виде

$$0 \le \rho \le \sqrt{3}, \quad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi.$$

Заданный двойной интеграл в полярных координатах примет вид

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{d(1+\rho^2)}{\sqrt{1+\rho^2}} = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1+\rho^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\sqrt{1+3}-1\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \frac{\pi}{4}.$

3. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной заданными линиями.

а) $D: y = \ln x, \quad y = \frac{e}{x}, \quad x = 1$; б) $D: x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = x$.

Решение.

а) Площадь области D вычисляется по формуле (2). Область D определяется неравенствами

$$D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{c} \ln x \le y \le \frac{e}{x} \\ 1 \le x \le e \end{array} \right\}$$

и изображена на рис. 4.

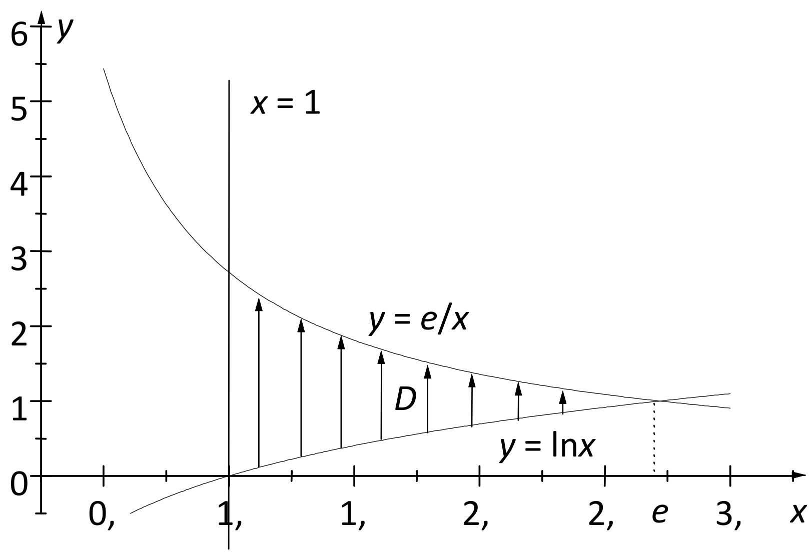

Рис. 4

Правую границу изменения переменной x определили как точку пересечения кривых $y = \ln x$ и $y = \frac{e}{x}$: $\ln x = \frac{e}{x} \Rightarrow x = e$. Направление интегрирования выбираем как указано на рисунке. Переходя от двойного интеграла к повторному, получим

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^{e/x} dy =$$

{интегрируем сначала по переменной y}

$$= \int\limits_1^e y\Big|_{\ln x}^{e/x} dx = \int\limits_1^e \left(\frac{e}{x} - \ln x \right) dx =$$

{используем свойство линейности определенного интеграла}

$$= \int\limits_1^e \frac{e}{x} dx - \int\limits_1^e \ln x dx =$$

{используем формулу интегрирования по частям во втором интеграле: $u = \ln x,\ dv = dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x},\ v = x$ }

$$= e \cdot \ln x\Big|_1^e - \left(x \cdot \ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e dx \right) = e\ln e - e\ln 1 - (e\ln e - \ln 1 - x\Big|_1^e) = e - 1.$$

б) Область D ограничена окружностями и прямыми, проходящими через начало координат (рис. 5). Действительно,

$x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ – окружность с центром в т. (1, 0) и радиусом 1;

$x^2 - 6x + y^2 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9$ – окружность с центром в т. (3, 0) и радиусом 3.

Область D такова, что проще решать задачу, перейдя к полярным координатам. При этом область D перейдет в область D^*, ограниченную линиями $\rho = 2\cos\varphi$, $\rho = 6\cos\varphi$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Искомая площадь будет равна $S = \iint\limits_{D^*} \rho d\varphi d\rho$.

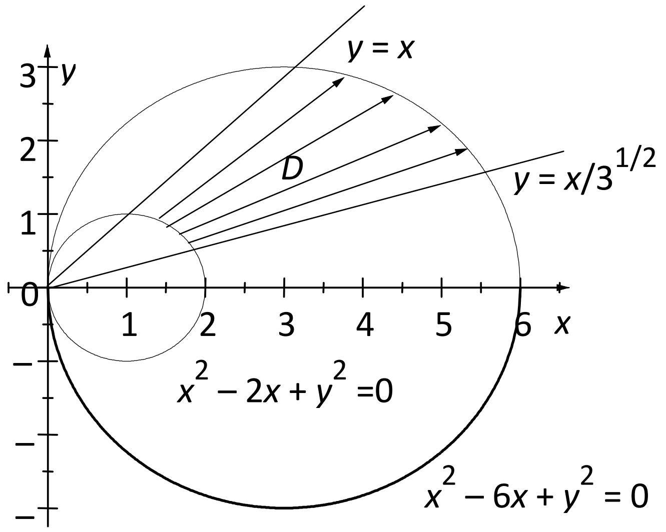

Рис. 5

Переходим от двойного интеграла к повторному

$$S=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi} \rho d\rho .$$

Последовательно интегрируя, получим

$$S=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi} \rho d\rho=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi} d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}(36\cos^2\varphi-4\cos^2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}32\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=8\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=8\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/4}=8\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)-8\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}+4-2\sqrt{3}.$$

Ответ: а) $S_D=e-1$; б) $S_D=\frac{2\pi}{3}+4-2\sqrt{3}$.

4. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, μ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки, если $D: x=0,\ y=4,\ y=x^2\ (x\ge 0)$; $\mu(x,y)=x^2+2y$.

Решение. Масса пластины D с поверхностной плотностью $\mu(x,y)=x^2+2y$ определяется формулой (3):

$$m = \iint\limits_D (x^2 + 2y)\,dxdy\,.$$

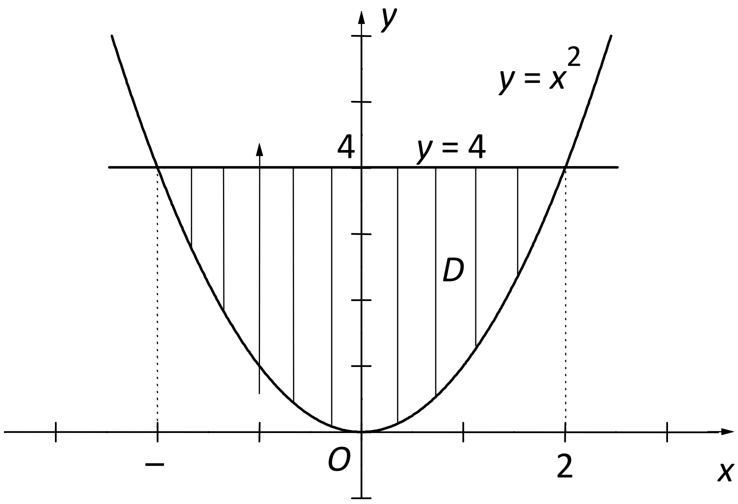

Рис. 6

Вычисляем полученный двойной интеграл. Область D изображена на рис. 6.

Выбрав направления интегрирования в направлении Oy и определив правую границу изменения переменной x, как пересечение функций $y = 4$ и $y = x^2$, сводим двойной интеграл к повторному

$$m = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^4 (x^2 + y)\,dy\,.$$

Осуществляя повторное интегрирование, получаем

$$m = \int\limits_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=4} dx = \int\limits_0^2 \left(4x^2 + 8 - x^4 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \int\limits_0^2 \left(4x^2 + 8 - \frac{3x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{4x^3}{3} + 8x - \frac{3x^5}{10} \right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{32}{3} + 16 - \frac{48}{5} \right) - 0 = \frac{256}{15}\,.$$

Ответ. $m = \dfrac{256}{15}$.

5. Найти координаты центра тяжести пластины, ограниченной параболой $ay = x^2$ и прямой $x + y = 2a$, если плотность пластины постоянная и равна γ_0.

Решение. Изобразим пластину (рис. 7). Находим абсциссы точек пересечения прямой $x+y=2a$ и параболы $ay=x^2$. Из системы уравнений $\begin{cases} x+y=2a, \\ y=\dfrac{x^2}{a} \end{cases}$ находим $x_1=-2a, x_2=a.$

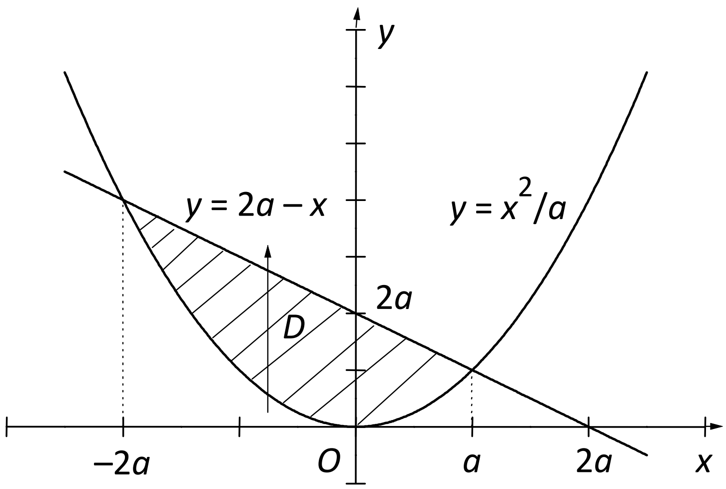

Рис. 7

Находим массу пластины по формуле (3)

$$m=\iint\limits_D \gamma_0 dxdy=\gamma_0\int\limits_{-2a}^{a}dx\int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=\gamma_0\int\limits_{-2a}^{a}y\Big|_{x^2/a}^{2a-x}dx=\gamma_0\int\limits_{-2a}^{a}(2a-x-\frac{x^2}{a})dx=$$

$$=\gamma_0\left(2ax-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a}=\gamma_0\left(2a^2-\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3}+4a^2+2a^2-\frac{8}{3}a^2\right)=\frac{9}{2}a^2\gamma_0.$$

Вычисляем статические моменты пластины относительно координатных осей, используя формулы (4)

$$M_x=\iint\limits_D \gamma_0 ydxdy=\gamma_0\int\limits_{-2a}^{a}dx\int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}ydy=\gamma_0\int\limits_{-2a}^{a}\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2/a}^{2a-x}dx=\frac{\gamma_0}{2}\int\limits_{-2a}^{a}((2a-x)^2-\frac{x^4}{a^2})dx=$$

$$=\frac{\gamma_0}{2}\left(-\frac{(2a-x)^3}{3}-\frac{x^5}{5a^2}\right)\Bigg|_{-2a}^{a}=\frac{\gamma_0}{2}\left(-\frac{a^3}{3}+\frac{64a^3}{3}-\frac{a^3}{5}-\frac{32a^3}{5}\right)=\frac{36}{5}\gamma_0 a^3,$$

$$M_y=\iint_D \gamma_0 x dx dy=\gamma_0\int_{-2a}^{a} x dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy=\gamma_0\int_{-2a}^{a} x\cdot y\Big|_{x^2/a}^{2a-x} dx=\frac{\gamma_0}{2}\int_{-2a}^{a} x((2a-x)-\frac{x^2}{a})dx=$$

$$=\gamma_0\left(ax^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a}=\gamma_0\left(a^3-\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{4}-4a^3-\frac{8a^3}{3}+4a^3\right)=-\frac{9}{4}a^3\gamma_0,$$

а также находим координаты центра тяжести пластины

$$x_c=\frac{M_y}{m}=-\frac{a}{2},\quad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{8}{5}a\,.$$

Ответ: $x_c=-\frac{a}{2},\quad y_c=\frac{8}{5}a\,.$