Пример 1. *Пусть скалярное поле U описывает потенциальную энергию заряда $q_1 = 1$ в поле другого заряда $q_2 = 1$, т.е. $U = q_1 q_2 / r = 1/r$. Найти поверхности уровня.*

Решение. Выберем декартову систему координат с центром в заряде q_1. Тогда $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где (x, y, z)–суть координаты заряда q_2, расположенного в точке $M(x, y, z)$. Очевидно, что скалярное поле определено во всем пространстве кроме начала координат. Для нахождения эквипотенциальной поверхности приравняем потенциальную энергию (скалярное поле) U постоянной $C = U_0$. Таким образом, уравнение потенциальной поверхности принимает вид $1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = U_0$. Отсюда, возводя в квадрат, получим $x^2 + y^2 + z^2 = (1/U_0)^2$. Это уравнение описывает сферу радиусом $R = |1/U_0|$. Эквипотенциальная поверхность с бо́льшим значением потенциальной энергии U_0 находится ближе к началу координат (заряду q_1). Таким образом, поверхностями уровня будут концентрические сферы, и наше скалярное поле является сферическим.

Пример 2 . *Пусть скалярное поле описывает потенциальную энергию взаимодействия единичных зарядов $q_1 = 1$ и $q_2 = 1 : U = 1/r$. Вычислить градиент поля в произвольной точке и в точках $M_0(1, 2, -2)$ и $M_1(-1, -1, 0)$.*

Решение. В декартовой системе координат искомое скалярное поле имеет вид $U = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Вычислим частные производные скалярного поля по x, y и z :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, вектор градиента имеет вид

$$\overline{gradU} = -\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Здесь $\vec{r} = (x, y, z)$ – является радиус —вектором точки $M(x, y, z)$. Вычислим теперь вектор градиента в т. M_0 и M_1.

$$\overline{gradU_{M_0}} = -\frac{(1, 2, -2)}{(1 + 4 + 4)^{3/2}} = -\frac{(1, 2, -2)}{27};$$

$$\overline{gradU_{M_1}} = -\frac{(-1, -1, 0)}{(1 + 1 + 0)^{3/2}} = -\frac{(-1, -1, 0)}{\sqrt{8}}.$$

Пример 3 . *Вычислить производную скалярного поля $U = 1/r$ в точке $M_0(1, 2, -2)$ по направлению точки $M_1(1, -1, 0)$.*

Решение. Для вычисления производной по направлению необходимо вычислить вектор градиента в точке M_0 и координаты направляющего вектора $\vec{l}$.Градиент искомого поля был вычислен во втором примере. Далее находим координаты вектора $\overline{M_0M_1}$. По правилу - "из конца вычитаем начало" получаем $\overline{M_0M_1} = (-1-1, -1-2, 0+2) = (-2, -3, 2)$.

Единичным вектором $\vec{l}$ в направлении вектора $\overline{M_0M_1}$ является орт вектора $\overline{M_0M_1}$: $\vec{l} = \overline{M_0M_1}/|\overline{M_0M_1}| = (-2,-3,2)/\sqrt{4+9+4} = (-2,-3,2)/\sqrt{17}$. Таким образом $\cos\alpha = -2/\sqrt{17}$, $\cos\beta = -3/\sqrt{17}$, $\cos\gamma = 2/\sqrt{17}$. По общим правилам имеем :

$$\frac{\partial U}{\partial l} = (\overline{gradU}, \vec{l}) =$$

$$-\frac{(1,2,-2)}{27}\frac{(-2,-3,2)}{\sqrt{17}} = -\frac{1\cdot(-2)+2\cdot(-3)-2\cdot(2)}{27\sqrt{17}} = \frac{12}{27\sqrt{17}}.$$

Пример 4. *Вычислить наибольшую скорость изменения скалярного поля $U = 1/r$ в точке $M_0(1,2,-2)$.*

Решение.

Градиент искомого поля в точке M_0 был вычислен в примере 2 : $\overline{gradU} = -(1,2,-2)/27$. Далее вычисляем длину вектора градиента – $|\overline{gradU}| = \sqrt{1+4+4}/27 = 1/9$. Таким образом, наибольшая скорость изменения поля равна 1/9. Для сравнения отметим, что производная скалярного поля в той же точке M_0, но в направлении точки M_1 (см. пример 3) равна $12/27\sqrt{17}$, что в $4/\sqrt{17}$ меньше.

Пример 5. *Вычислить косинус угла между градиентами скалярного поля $U = 1/r$ в точках $M_0(1,2,-2)$ и $M_1(-1,-1,0)$.*

Решение. Градиенты скалярного поля в искомых точках были вычислены в примере 3 :

$$\overline{gradU}_{M_0} = -\frac{(1,2,-2)}{27} \ , \ \overline{gradU}_{M_1} = -\frac{(-1,-1,0)}{\sqrt{8}} \ .$$

Далее, используя известное из аналитической геометрии выражение для косинуса угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$: $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{c}}) = (\vec{a}\vec{c})/|\vec{a}||\vec{c}|$ получим

$$\cos(\widehat{\overline{gradU}_{M_0}\overline{gradU}_{M_1}}) = \frac{(\overline{gradU}_{M_0}\overline{gradU}_{M_1})}{|\overline{gradU}_{M_0}|\cdot|\overline{gradU}_{M_1}|} =$$

$$= \frac{(1,2,-2)}{27}\cdot\frac{(-1,-1,0)}{\sqrt{8}} \Big/ \frac{3}{27}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1\cdot(-1)+2\cdot(-1)-2\cdot(0)}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ .$$

Таким образом, искомый угол равен 135°.

Вектор градиента можно использовать для аналитического построения касательной плоскости к поверхности. Допустим, что поверхность задана уравнением $f(x,y,z) = 0$ в некоторой декартовой системе координат. Очевидно, что эту поверхность можно рассматривать как поверхность уровня некоторого скалярного поля $U = f(x, y, z)$ при $C = 0$. Из аналитической геометрии хорошо известно, что для получения уравнения плоскости необходимо задать две величины : вектор нормали плоскости $\vec{N}(A, B, C)$ и точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащую плоскости. В этом случае уравнение плоскости принимает вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Из свойства 1 следует, что вектор градиента перпендикулярен поверхности уровня и его можно принять за вектор нормали касательной плоскости : $\vec{N} = \overline{gradU}$. Таким образом, уравнение касательной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскости имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial x}|_{M_0}(x - x_0) + \frac{\partial U}{\partial y}|_{M_0}(y - y_0) + \frac{\partial U}{\partial z}|_{M_0}(z - z_0) = 0 .$$

Пример 6. *Получить уравнение касательной плоскости к поверхности трехосного эллипсоида* $x^2/9 + y^2/16 + z^2/25 = 3$ *в точке* $M_0(1, 1, 1)$.

Решение. Данный эллипсоид можно рассматривать как поверхность уровня скалярного поля $U = x^2/9 + y^2/16 + z^2/25 - 3$. Как отмечалось выше, в качестве вектора нормали искомой плоскости можно выбрать градиент поля, вычисленный в точке касания $M_0(1, 1, 1)$: $\vec{N} = \overline{gradU_{M_0}} = (2x/9, y/8, 2z/25)|_{M_0(1,1,1)} = (2/9, 1/8, 2/25)$. Используя общую формулу, получаем уравнение искомой плоскости :

$$\frac{2}{9}(x - 1) + \frac{1}{8}(y - 1) + \frac{2}{25}(z - 1) = 1 .$$

В курсе математической физики доказывается утверждение, что производная по направлению одинакова вдоль любой кривой касательной к этому направлению. Поэтому для вычисления производной по направлению достаточно задать точку, в которой вычисляется производная и кривую, проходящую через эту точку, касательная к которой совпадает с заданным направлением.

Пример 7. *Вычислить производную двумерного скалярного поля* $W = \operatorname{arctg}(xy)$ *в точке* $M_0(2, 4)$ *по направлению параболы* $y = x^2$, *проходящей через эту точку, в сторону увеличения абсциссы* x.

Решение. Для вычисления производной необходимо задать направление в точке M_0, т.е. касательный вектор в этой точке. Для нахождения вектора, касательного к параболе представим ее в параметрическом виде. Простейший способ – принять переменную x за параметр t :

$$x = t\ ,\ y = t^2\ .$$

Если считать переменную t "временем", то эти уравнения описывают координаты точки, движущейся по параболе. Как хорошо известно из механики, вектор скорости движения точки касателен к траектории. Дифференцируя эти уравнения по "времени" t, получаем, что вектор, касательный к траектории имеет вид $\vec{v} = (1, 2t)$. Поскольку координата $v_x = 1 > 0$, полученный вектор скорости направлен в сторону увеличения абсциссы. Если бы требовалось вычислить производную по направлению в сторону уменьшения переменной x, в качестве касательного вектора необходимо было бы взять $-\vec{v}$. Точке $M_0(2,4)$ соответствует значение параметра $t = 2$. Подставляя это значение в вектор скорости, получаем вектор, касательный к параболе в точке $M_0(2,4) : \vec{v} = (1,4)$. Далее действуем обычным способом. Находим орт вектора скорости $\vec{l} = \vec{v}/|\vec{v}| = (1,4)/\sqrt{1^2+4^2} = (1,4)/\sqrt{17}$. Далее вычисляем производные скалярного поля:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{y}{1+(xy)^2}, \; \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{x}{1+(xy)^2}.$$

Затем вычисляем градиент в точке $M_0(2,4)$:

$$\overline{gradU_{M_0}} = (4/(1+(2\cdot4)^2), 2/(1+(2\cdot4)^2)) = (4,2)/65.$$

Наконец вычисляем производную скалярного поля W в направлении вектора $\vec{l}$:

$$\frac{\partial W}{\partial l} = (\overline{gradU}, \vec{l}) = \frac{(4,2)}{65} \cdot \frac{(1,4)}{\sqrt{17}} = \frac{4\cdot1+2\cdot4}{65\sqrt{17}} = \frac{12}{65\sqrt{17}}.$$