Наиболее общим видом линейного уравнения в частных производных второго порядка с неизвестной функцией u в области Ω пространства с координатами (x_i), $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ является

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + F(u) = G. \tag{2.4.1}$$

Классификация таких уравнений зависит только от присутствующих в них старших производных и мотивируется классификацией квадратичных уравнений вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2.4.2}$$

которые могут иметь эллиптический, параболический или гиперболический тип в соответствии с тем, является ли дискриминант $B^2 - 4AC$ отрицательным, нулевым или положительным.

Определение. Уравнение, линейное относительно частных производных второго порядка, т. е. относительно r, s и t, называется *квазилинейным* УрЧП второго порядка.

Например, уравнение

$$Rr + Ss + Tt + f(x, y, z, p, q) = 0, \tag{2.4.3}$$

где функция $f(x, y, z, p, q)$ не обязательно линейная, является квазилинейным уравнением в частных производных. Здесь коэффициенты R, S, T являются функциями от x и y.

Говорят, что уравнение (2.4.3)

(i) имеет эллиптический тип, если $S^2 - 4RT < 0$,

(ii) имеет параболический тип, если $S^2 - 4RT = 0$, и

(iii) имеет гиперболический тип, если $S^2 - 4RT > 0$ в точке (x_0, y_0).

Если это верно во всех точках области Ω, то уравнение (2.4.3) называется уравнением эллиптического, параболического или гиперболического типа в этой области. Если имеется две или три независимых переменных, то всегда можно найти преобразование, приводящее данное УрЧП к канонической форме (нормальной форме). Вообще говоря, если число независимых переменных больше трех, то такое преобразование найти невозможно, за исключением некоторых особых случаев. Идея приведения данного УрЧП к канонической форме состоит в том, что уравнение приводится к простому виду, так что последующее решение уравнения оказывается несложным.

2.4.1. Канонические формы

Чтобы привести уравнение в частных производных (2.4.3) к канонической форме, мы применяем преобразование

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \tag{2.4.4}$$

такое, что функции ξ и η бесконечно дифференцируемы и якобиан

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0 \tag{2.4.5}$$

в области Ω, в которой рассматривается уравнение (2.4.3).

Мы имеем:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \xi_x z_\xi + \eta_x z_\eta, \qquad q = \xi_y z_\xi + \eta_y z_\eta,$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}[\xi_x z_\xi + \eta_x z_\eta] = \xi_x^2 z_{\xi\xi} + z_\xi \xi_{xx} + \eta_x^2 z_{\eta\eta} + z_\eta \eta_{xx} + 2\xi_x \eta_x z_{\xi\eta},$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2\xi_y \eta_y z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta}\eta_y^2 + z_\xi \xi_{yy} + z_\eta \eta_{yy},$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + z_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + z_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + z_{\xi\eta}\eta_x\xi_y + z_\eta \eta_{xy} + z_\xi \xi_{xy}.$$

Подставляя эти выражения для p, q, r, s и t в (2.4.3), получаем:

$$A(\xi_x, \xi_y) z_{\xi\xi} + 2B(\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y) z_{\xi\eta} + A(\eta_x, \eta_y) z_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta), \tag{2.4.6}$$

где

$$A(u, v) = Ru^2 + Suv + Tv^2,$$

$$2B(u_1, v_1, u_2, v_2) = 2Ru_1u_2 + S(u_1v_2 + u_2v_1) + 2Tv_1v_2.$$

Можно легко проверить, что

$$2B^2(\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y) - A(\xi_x, \xi_y)A(\eta_x, \eta_y) = (S^2 - 4RT)J, \tag{2.4.7}$$

где J — якобиан замены, заданный формулой (2.4.5).

Случай I. $S^2 - 4RT > 0$.

При условии $S^2 - 4RT > 0$ уравнение

$$R\lambda^2 + S\lambda + T = 0$$

имеет различные вещественные корни. Пусть эти корни λ_1 и λ_2. Выберем ξ и η так, чтобы

$$\xi_x = \lambda_1 \xi_y, \qquad \eta_x = \lambda_2 \eta_y. \tag{2.4.8}$$

Теперь поскольку $\xi_x = \lambda_1 \xi_y$ эквивалентно равенству $\xi_x - \lambda_1 \xi_y = 0$, являющемуся линейным уравнением в частных производных первого порядка, мы имеем:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\lambda_1} = \frac{d\xi}{0},$$

откуда $d\xi = 0 \Rightarrow \xi = \text{const}$ и

$$\frac{dy}{-\lambda_1} = \frac{dx}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \lambda_1(x,y) = 0. \tag{2.4.9}$$

Аналогично,

$$\frac{dy}{dx} + \lambda_2(x,y) = 0. \tag{2.4.10}$$

Пусть решения этих уравнений заданы в виде $f_1(x,y) = \text{const}$ и $f_2(x,y) = \text{const}$. Таким образом, мы получаем:

$$\xi = f_1(x,y) \quad \text{и} \quad \eta = f_2(x,y). \tag{2.4.11}$$

Теперь

$$A(\xi_x, \xi_y) = R\xi_x^2 + S\xi_x\xi_y + T\xi_y^2 = \xi_y^2(R\lambda_1^2 + S\lambda_1 + T) = \xi_y^2 \cdot 0 = 0,$$

поскольку λ_1 является корнем уравнения

$$R\lambda^2 + S\lambda + T = 0. \tag{2.4.12}$$

Аналогично, $A(\eta_x, \eta_y) = 0$, так как λ_2 также является корнем (2.4.12). Имеем:

$$B^2 = (S^2 - 4RT)J \neq 0,$$

следовательно, уравнение (2.4.6) приводится к виду

$$z_{\xi\eta} = g(\xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta), \tag{2.4.13}$$

который является требуемой канонической формой для уравнения гиперболического типа.

Случай II. $S^2 - 4RT = 0$. В этом случае уравнение $R\lambda^2 + S\lambda + T = 0$ имеет равные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Мы выбираем $\xi = f_1(x,y)$, где $f_1(x,y) = \text{const}$ — решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} + \lambda(x,y) = 0.$$

Поскольку в данном случае $A(\xi_x, \xi_y) = 0$ и $S^2 - 4RT = 0$, из (2.4.7) следует, что $B = 0$.

Однако, $A(\eta_x, \eta_y) \neq 0$, иначе η будет зависеть от ξ. Используя равенства $A(\xi_x, \xi_y) = 0 = B$ в уравнении (2.4.6), мы получаем

$$z_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta), \tag{2.4.14}$$

что является канонической формой для уравнения параболического типа.

Случай III. $S^2 - 4RT < 0$. В этом случае корни уравнения

$$R\lambda^2 + S\lambda + T = 0$$

комплексно сопряженные, с ненулевыми мнимыми частями, поэтому функции ξ и η также будут комплексно сопряженными.

Пусть $\xi = \alpha + i\beta$ и $\eta = \alpha - i\beta$, тогда

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad \beta = \frac{i}{2}(\eta - \xi).$$

При этом преобразовании мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - i\frac{\partial}{\partial \beta}\right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + i\frac{\partial}{\partial \beta}\right),$$

откуда

$$z_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(z_{\alpha\alpha} + z_{\beta\beta})$$

и, преобразовав ответ (2.4.13) случая I, получаем каноническая форма уравнения эллиптического типа:

$$z_{\alpha\alpha} + z_{\beta\beta} = \varphi(\alpha, \beta, z, z_\alpha, z_\beta). \tag{2.4.15}$$

Пример 2.4.1. Привести уравнение

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x^2}{y}\frac{\partial z}{\partial y} \tag{2.4.16}$$

к канонической форме и затем его решить.

Решение. Имеем: $R = y^2$, $S = -2xy$, $T = x^2$, откуда

$$S^2 - 4RT = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0.$$

Следовательно, данное уравнение (2.4.16) имеет параболический тип. Теперь

$$R\lambda^2 + S\lambda + T = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2\lambda^2 - 2xy\lambda + x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda y - x)^2 = 0,$$

значит,

$$\lambda = x/y.$$

Таким образом, мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y},$$

следовательно,

$$xdx + ydy = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \text{const}.$$

Пусть $\xi = x^2 + y^2$. Поскольку η нужно выбрать независимым от ξ, положим

$$\eta = x^2 - y^2.$$

Тогда

$$z_x = z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x = 2x(z_\xi + z_\eta), \tag{2.4.17}$$

$$z_y = z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y = 2y(z_\xi - z_\eta), \tag{2.4.18}$$

$$\begin{aligned} z_{xx} = {} & 2(z_\xi + z_\eta) + 2x(z_{\xi\xi}\xi_x + z_{\xi\eta}\eta_x + z_{\eta\xi}\xi_x + z_{\eta\eta}\eta_x) = \\ = {} & 2(z_\xi + z_\eta) + 4x^2(z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta}), \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

$$z_{yy} = 2(z_\xi - z_\eta) + 4y^2(z_{\xi\xi} - 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta}), \tag{2.4.20}$$

$$z_{xy} = 2x(z_{\xi\xi}\xi_y + z_{\xi\eta}\eta_y + z_{\eta\xi}\xi_y + z_{\eta\eta}\eta_y) = 4xy(z_{\xi\xi} - z_{\eta\eta}). \tag{2.4.21}$$

Подставляя в уравнение (2.4.16) выражения для частных производных (2.4.17)–(2.4.21) и упрощая полученное уравнение, имеем:

$$4z_{\eta\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = A\eta + B,$$

где A и B — произвольные функции от ξ, т. е.

$$z = \eta A(\xi) + B(\xi)$$

или

$$z = (x^2 - y^2)A(x^2 + y^2) + B(x^2 + y^2),$$

что является искомым решением уравнения (2.4.16).

Пример 2.4.2. Привести уравнение

$$(n-1)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^{2n}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=ny^{2n-1}\frac{\partial z}{\partial y}, \quad n\neq 1 \qquad (2.4.22)$$

к канонической форме и найти его общее решение.

Решение. Здесь $R=(n-1)^2$, $S=0$, $T=-y^{2n}$, откуда

$$S^2-4RT=4(n-1)^2y^{2n}=\left[2(n-1)y^n\right]^2>0.$$

Следовательно, данное уравнение в частных производных — гиперболического типа.

Теперь

$$R\lambda^2+S\lambda+T=0 \quad\Rightarrow\quad (n-1)^2\lambda^2-y^{2n}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2=\frac{y^{2n}}{(n-1)^2},$$

отсюда

$$\lambda=\pm\frac{y^n}{n-1}.$$

Таким образом, мы имеем:

$$\frac{dy}{dx}\pm\frac{y^n}{n-1}=0$$

или

$$(n-1)y^{-n}dy\pm dx=0 \quad\Rightarrow\quad x\pm y^{1-n}=\text{const}.$$

Пусть

$$\xi=x+y^{1-n} \quad \text{и} \quad \eta=x-y^{1-n},$$

тогда

$$z_x=z_\xi\xi_x+z_\eta\eta_x=z_\xi+z_\eta, \qquad (2.4.23)$$

$$z_y=z_\xi\xi_y+z_\eta\eta_y=(1-n)y^{-n}(z_\xi-z_\eta), \qquad (2.4.24)$$

$$z_{xx}=z_{\xi\xi}\xi_x+z_{\xi\eta}\eta_x+z_{\eta\xi}\xi_x+z_{\eta\eta}\eta_x=z_{\xi\xi}+2z_{\xi\eta}+z_{\eta\eta}, \qquad (2.4.25)$$

$$\begin{aligned}z_{yy}=&-n(1-n)y^{-1-n}(z_\xi-z_\eta)+\\&+(1-n)y^{-n}(z_{\xi\xi}\xi_y+z_{\xi\eta}\eta_y-z_{\eta\xi}\xi_y-z_{\eta\eta}\eta_y)=\\=&-n(1-n)y^{-1-n}(z_\xi-z_\eta)+(1-n)^2y^{-2n}(z_{\xi\xi}-2z_{\xi\eta}+z_{\eta\eta}).\end{aligned} \qquad (2.4.26)$$

Подставляя в уравнение (2.4.22) выражения для частных производных из формул (2.4.23)–(2.4.26), после упрощения получаем:

$$4(n-1)^2z_{\xi\eta}=0 \quad\Rightarrow\quad z_{\xi\eta}=0,$$

откуда имеем искомое решение:

$$z=f_1(\xi)+f_2(\eta) \quad \text{или} \quad z=f_1(x+y^{1-n})+f_2(x-y^{1-n}),$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции.