Пример 3.2.1. Рассмотрим уравнения Максвелла электромагнитного поля

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi i}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

где $\vec{E}$ — напряженность электрического поля, ρ — плотность электрического заряда, $\vec{H}$ — напряженность магнитного поля, i — плотность тока и c — скорость света. Показать, что при отсутствии зарядов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяют однородному волновому уравнению.

Решение. Применяя к обеим частям уравнения $\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ операцию ротор и пользуясь тем, что $\rho = i = 0$, имеем:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{H}) =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Пользуясь тождеством

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E},$$

получаем, что компоненты поля $\vec{E}$ удовлетворяют волновому уравнению

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Аналогично можно показать, что магнитное поле $\vec{H}$ также удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \tag{3.3.1}$$

Напомним, что для дифференциального уравнения вида

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$$

уравнения характеристик имеют вид

$$Ady = \left(B \pm \sqrt{B^2 - AC}\right) dx.$$

В случае (3.3.1), считая, что $y = t$, имеем: $A = 1$, $B = 0$, $C = -1/c^2$, т. е. уравнения характеристик имеют вид

$$dx \pm c\, dt = 0,$$

а их решения — характеристики

$$x \pm ct = \mathrm{const}.$$

Выбирая характеристические линии

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \tag{3.3.2}$$

имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = c(u_\eta - u_\xi) = c\left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 u = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \tag{3.3.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}). \tag{3.3.4}$$

Подставляя равенства (3.3.3) и (3.3.4) в уравнение (3.3.1), получаем его каноническую форму:

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{3.3.5}$$

Интегрируя, имеем:

$$u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

где φ и ψ — произвольные функции. Заменяя ξ и η на их определения из (3.3.2), имеем общее решение волнового уравнения (3.3.1) в виде

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct). \tag{3.3.6}$$

Два слагаемых в выражении (3.3.6) могут быть интерпретированы как волны, распространяющиеся соответственно вправо и влево.

Пусть k — произвольный вещественный параметр. Тогда функция вида

$$u(x, t) = \varphi\Big(k(x - ct)\Big) + \psi\Big(k(x + ct)\Big) \tag{3.3.7}$$

также является решением волнового уравнения.

Кроме того, если $\omega = kc$, то решением волнового уравнения также является функция вида

$$u(x, t) = \varphi(kx - \omega t) + \psi(kx + \omega t). \tag{3.3.8}$$