Занятие №3.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

Основные этапы построения математической модели:

1. составляется описание функционирования системы в целом;
2. составляется перечень подсистем и элементов с описанием их функционирования, характеристик и начальных условий, а также взаимодействия между собой;
3. определяется перечень воздействующих на систему внешних факторов и их характеристик;
4. выбираются показатели эффективности системы, т.е. такие числовые характеристики системы, которые определяют степень соответствия системы ее назначению;
5. составляется формальная математическая модель системы;
6. составляется машинная математическая модель, пригодная для исследования системы на ЭВМ.

Требования к математической модели:

Требования определяются прежде всего ее назначением, т.е. характером поставленной задачи:

"Хорошая" модель должна быть:

1. целенаправленной;
2. простой и понятной пользователю;
3. достаточной с точки зрения возможностей решения поставленной задачи;
4. удобной в обращении и управлении;
5. надежной в смысле защиты от абсурдных ответов;
6. допускающей постепенные изменения в том смысле, что, будучи вначале простой, она при взаимодействии с пользователями может становиться более сложной.

Математическая модель, в широком смысле, это приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Применительно к задачам исследования качества системы математическая модель должна обеспечивать адекватное описание влияния параметров и условий функционирования на показатели ее качества. Что касается точности модели, то ее уровень должен обеспечивать достоверное сравнительное оценивание и ранжирование по уровню качества альтернативных вариантов

В основе изучения и моделирования процессов функционирования технических систем всегда лежит эксперимент - реальный или логический. Суть реального эксперимента состоит в непосредственном изучении конкретного физического объекта. В ходе логического эксперимента свойства объекта исследуются не на самом объекте, а с помощью его математической или содержательной (словесной) модели, изоморфной объекту с точки зрения изучаемых эксперименте свойств.

Подавая на вход системы различные входные процессы и измеряя процесс на ее выходе, исследователь получает возможность установить и записать математически существующую между ними связь в виде уравнения, связывающего для каждого интервала времени значения входных и выходных воздействий и потому называемого уравнением «вход-выход». Кроме того, для адекватного отражения связи между входом и выходом системы в системотехнике вводится понятие «состояние». По своему смыслу состояние $z(\tau)$ представляет собой совокупность существенных свойств (характеристик) системы, знание которых в настоящем (в момент времени τ) позволяет определить ее поведение в будущем (в моменты времени $t > \tau$). Благодаря этому понятию, уравнение “вход-выход”-состояние принимает вид:

$$\boldsymbol{Y_T = A(T,\ z(\tau),\ X_T)}, \quad (2.1)$$

где X_T, Y_T – входной и выходной процесс на интервале времени T;

$A(*)$ - оператор выходов.

Согласно (2.1), выходной процесс полностью определяется входным процессом и начальным состоянием и не зависит от того, каким образом система была переведена в это состояние. Отсюда ясно, что уравнение (2.1) ограничивает класс рассматриваемых систем только такими системами, функционирование которых в настоящем не зависит от того, как они функционировали в прошлом.

Для полного описания процесса функционирования системы необходимо задать условия определения состояния системы. Для этого вводится понятие уравнения состояния:

$$\boldsymbol{z(t) = B(\tau t,\ z(\tau),\ X_{\tau t})}, \quad (2.2)$$

где

$B(*)$ - оператор, устанавливающий однозначную зависимость $z(t)$ от пары $(z(\tau),\ X_{\tau t})$, которая задана на интервале $\tau\ t$, и называемый оператором перехода.

Уравнения (2.1) и (2.2) имеют достаточно логичное обобщение и на многомерный случай, когда каждая из компонент уравнений имеет векторный вид:

$$X \to \vec{X}, Y \to \vec{Y}, Z \to \vec{Z}$$

Таким образом, модель функционирования системы должна обеспечивать прогнозирование процесса функционирования на всем интервале функционирования $\boldsymbol{T}$ (множество времени) по заданному вектору начального состояния $\vec{Z}(\tau)$ записанном в векторном виде входному процессу $\vec{X}\ (T)$. Согласно изложенному выше, для решения этой задачи достаточно задать множества допустимых значений входных $\boldsymbol{X}$ и выходных $\boldsymbol{Y}$ процессов, а также множество возможных состояний системы $\boldsymbol{Z}$ и операторы выхода $\boldsymbol{A}$ и перехода $\boldsymbol{B}$. Модель функционирования системы без предыстории представляет собой кортеж

$$\boldsymbol{MF = \langle T,\ X,\ Y,\ Z,\ A,\ B\rangle}. \quad (2.3)$$

Если все компоненты в (2.3) известны, модель функционирования полностью определена и может быть использована для описания и изучения свойственных системе процессов функционирования. Множества и операторы, составляющие *общесистемную модель* (2.3), могут обладать различными свойствами, совокупность которых позволяет конкретизировать характер функционирования системы:

N – непрерывность;

L – линейность;

C – стационарность;

P – стохастичность (вероятность).

Наделяя систему теми или иными свойствами общесистемная модель конкретизируется до *системной модели.*

Системные свойства:

1). Если интервал функционирования системы $\boldsymbol{T} = [\varepsilon,\eta]$ представляет отрезок оси действительных чисел, заданный началом ε и концом η, то система функционирует в непрерывном времени. Если, кроме того непрерывны операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, то система наз. непрерывной.

2). С т.зр. реакции на внешнее воздействие объекты подразделяют на линейные и нелинейные. Линейными наз. такой объект, реакция которого на совместное воздействие 2-х любых внешних возмущений равно сумме реакций на каждое из этих воздействий, приложенных к системе порознь.

$F^0(x_1(t)+x_2(t)) = F^0(x_1(t)) + F^0(x_2(t))$ - принцип суперпозиции,

F^0 (0)=0 (начальное состояние системы),

где F^0 - оператор объекта, устанавливает связь входа и выхода.

Для линейных систем выполняется принцип суперпозиции.

3). Поскольку стационарная система при фиксированном начальном состоянии $Z(t_0)$ одинаково реагирует на эквивалентные, отличающиеся только сдвигом по времени, входные воздействия, то наложение интервала t_0, t на оси времени не оказывает влияния на процесс функционирования системы. Модель M для стационарных систем не содержит в явном виде интервал функционирования T.

4) Если в модели M операторы A и B каждой паре $(X, V, Z(t_0))$ (вход, состояние) ставят в соответствие *единственные* значения Y и Z, описываемая этой моделью система называется *детерминированной*. Для стохастической (вероятностной) системы Y и Z, *случайные* величины, заданные

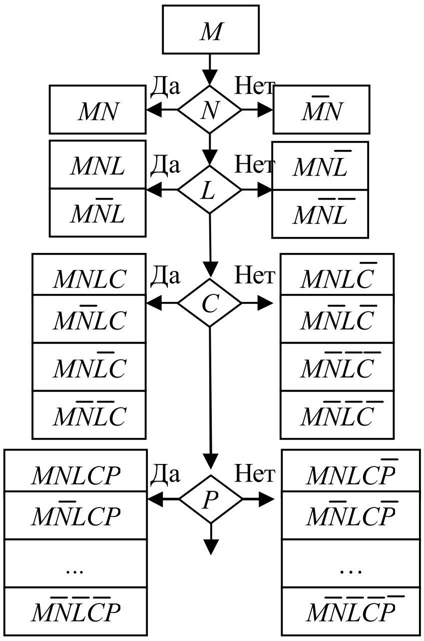
законами распределения.

Общесистемная и системные модели функционирования (в дальнейшем термин «модель функционирования» для краткости может заменяться термином «модель» с сохранением исходного смысла) обладают исключительно высокой степенью общности. Они, безусловно, необходимы для теоретических исследований и полезны, так как выявляют общие закономерности, присущие весьма широкому классу систем. Но в повседневной практической деятельности инженеры традиционно используют так называемые *конструктивные модели* - гораздо менее общие, но позволяющие производить конкретные вычисления. ***Конструктивные модели*** в сущности представляют собой алгоритмы, пользуясь которыми, можно определить значения одних переменных, характеризующих данную систему, по заданным или измеренным значениям других переменных. Однако между системными и конструктивными моделями нет противоречия. По мере накопления знаний о системе, уточнения и конкретизации ее свойств и характеристик системная модель естественным образом преобразуется в конструктивную. Следовательно, конструктивная модель может и должна закономерно вырастать из более общей системной модели. Такой - истинно системотехнический подход – представляется более обоснованным, чем априорное задание конструктивной модели исследователем, использующим для этого лишь свою интуицию и субъективные представления о возможностях тех или иных математических схем.

Таким образом, наиболее важные и принципиальные этапы построения модели функционирования системы определяются процессом реализации системотехнической цепочки преобразований **«общесистемная модель → системная модель → конструктивная модель → машинная модель»**.

Моделирование процессов функционирования конкретной системы должно начинаться с записи всех компонент общесистемной модели (2.3), определения их содержательного смысла и областей изменения. Согласно модели (2.3), необходимо определить: интервал времени, на котором нас интересует функционирование системы; множество входных и выходных воздействий и области их возможных изменений; множество характеристик состояния системы и область их возможных изменений.

<u>Классификация системных моделей</u>



$MNLC\overline{P}$ - легко мат.описание
$M\overline{N}\overline{L}\overline{C}P$ - нет адекватного мат.описания (трудно)

Инверсия ($\overline{N}$) – *данное свойство не выполняется, например нет свойства непрерывности*

Общесистемная и системные модели обладая высшей степенью общности устанавливают закономерности, которые присущи всем или достаточно широкому классу систем. В инженерной практике используют так называемые <u>конструктивные модели,</u> пригодные для инженерных расчетов.

<u>КМ</u> – алгоритмы, пользуясь которыми можно определить значения одних переменных, характеризующих систему по заданным или измеренным значениям других переменных.

<u>КМ</u> – может и должна вырастать из большой общей системной модели путем конкретизации ее свойств.

При построении моделей функционирования систем применяют следующие подходы:

1) непрерывно-детерминированный подход (дифференцированные уравнения);
2) дискретно-детерминированный (конечные автоматы);
3) дискретно-стохастический подход (вероятностные автоматы);
4) непрерывно-стохастический подход (системы СМО)
5) обобщенный / универсальный подход (агрегитивные системы)