

Занятие № 10

Приближенные способы преобразования

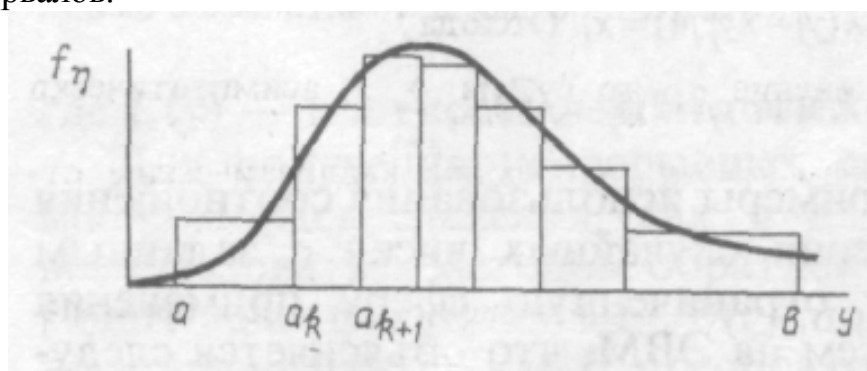
В практике моделирования систем приближенные способы преобразования случайных чисел классифицируются следующим образом:

- а) универсальные способы, с помощью которых можно получать случайные числа с законом распределения любого вида;
- б) неуниверсальные способы, пригодные для получения случайных чисел с конкретным законом распределения.

Универсальный способ

Универсальный способ получения случайных чисел, базируется на кусочной аппроксимации функции плотности.

Пусть требуется получить последовательность случайных чисел $\{y_i\}$ с функцией плотности $f_n(y)$, возможные значения которой лежат в интервале (a, b) . Представим $f_n(y)$ в виде кусочно-постоянной функции, т. е. разобьем интервал (a, b) на m интервалов.



Будем считать, что функция плотности на каждом интервале постоянна. Тогда случайную величину η можно представить в виде

$$\eta = ak + \eta_k^*$$

где ak — абсцисса левой границы k -го интервала;

η_k^* — случайная величина, возможные значения которой располагаются равномерно внутри k -го интервала.

На участке (a_k, a_{k+1}) случайная величина η_k^* распределена равномерно. Целесообразно разбить (a, b) на интервалы так, чтобы вероятность попадания случайной величины η_k^* в любой интервал (a_k, a_{k+1}) была постоянной и не зависела от номера интервала.

Для вычисления ak воспользуемся следующим соотношением:

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_n(y) dy = 1/m. \quad (1)$$

Алгоритм машинной реализации этого способа получения случайных чисел сводится к выполнению следующих действий:

1) генерируется случайное равномерно распределенное число x_i из интервала $(0, 1)$;

2) с помощью этого числа случайным образом выбирается интервал (a_k, a_{k+1}) ;

3) генерируется число x_{i+1} и масштабируется с целью приведения его к интервалу (a_k, a_{k+1}) , т. е. домножается на коэффициент $(a_{k+1} - a_k)x_{i+1}$

4) вычисляется случайное число $y_i = a_k + (a_{k+1} - a_k)x_{i+1}$ с требуемым законом распределения.

В п.2 целесообразно для этой цели построить таблицу (сформировать массив), в которую предварительно поместить номера интервалов k и значения коэффициента масштабирования, которые получаются из соотношения (1) для приведения числа к интервалу (a, b) . Получив из генератора случайное число x_i , с помощью таблицы сразу определяем абсциссу левой границы a_k и коэффициент масштабирования $(a_{k+1} - a_k)$.

Достоинства способа: При реализации на ЭВМ требуется небольшое количество операций для получения каждого случайного числа, так как операция масштабирования выполняется только один раз перед моделированием.

Не универсальные способы преобразования

Рассмотрим способы преобразования последовательности равномерно распределенных случайных чисел $\{x_i\}$ в последовательность с заданным законом распределения $\{y_j\}$ на основе предельных теорем теории вероятностей. Такие способы ориентированы на получение последовательностей чисел с конкретным законом распределения, т. е. не являются универсальными.

Пусть требуется получить последовательность случайных чисел имеющих распределение Пуассона.

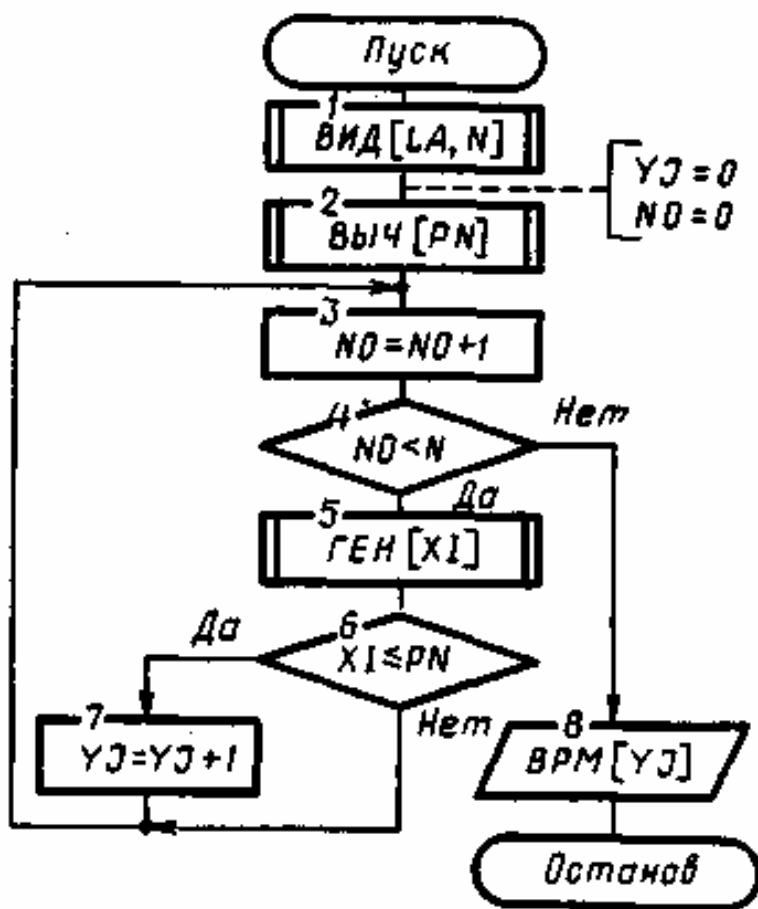
$$p(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

Воспользуемся предельной теорией Пуассона.

Если p - вероятность наступления события A в одном из испытаний, то вероятность наступления m событий в N независимых испытаниях при $N \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, Np = \lambda$ ассимптотически равняется $p(m)$. выберем достаточно бостаточно большое количество испытаний N , такое что $p = \frac{\lambda}{N} < 1$.

Будем проводить серии из N независимых испытаний, в каждом из которых событие A наступает с вероятностью p . Будем подсчитывать число случаев y_j фактического наступления события A в серии с номером j . Число y_j будет приближенно следовать закону Пуассона. Практически номер выбирается таким образом, что $p \leq 0.1 - 0.2$

Алгоритм



Алгоритм генерации последовательности случайных чисел y_p имеющих пуассоновское распределение.

$LA \equiv \lambda, N \equiv N, PN \equiv p, XI \equiv x_i$ — случайные числа последовательности, равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$;

$YJ \equiv y_j$;

NO — вспомогательная переменная;

ВИД [...] — процедура ввода исходных данных;

ВЫЧ [...] — процедура вычисления;

ГЕН [...] — процедура генерации случайных чисел;

ВРМ [...] — процедура выдачи результатов моделирования.

Моделирование случайных векторов.

При решении задач исследования характеристик процессов функционирования систем методом статистического моделирования на ЭВМ возникает необходимость в формировании реализаций случайных векторов, которые обладают заданными вероятностными характеристиками. Случайный вектор можно задать проекциями на оси координат, эти проекции являются случайными величинами, и описываются совместным законом распределения.

Случайные вектора можно задать проекциями на оси координат. В двухмерном случае, когда вероятность распределения на плоскости XOY, он может быть задан совместным законом распределения его проекций ξ и η на оси Oх и Oу.

Моделирование дискретных векторов

Пусть имеется дискретный случайный процесс. Двухмерная случайная величина (ξ, η) является дискретной. Ее составляющая ξ принимает возможные значения x_1, x_2, \dots, x_n . η принимает значения y_1, y_2, \dots, y_n .

Каждой паре (x_i, y_i) соответствует вероятность p_i . Возможному значению x_i случайной величины ξ , будет соответствовать

$$p_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}.$$

В соответствии распределением вероятностей можно определить конкретное значение x_i случайной величины ξ и из значений p_{ij} выбрать последовательность

$$p_{i_1,1}, p_{i_1,2}, \dots, p_{i_1,n} \quad (2)$$

которая описывает условное распределение величины η при условии $\xi = x_i$. Тогда конкретное значение y_i случайной величины η будет определяться в соответствии с распределением вероятностей (2). Пара чисел (x_i, y_i) будет первой реализацией моделируемого случайного вектора. Далее аналогичным образом определяем возможные значения x_{i_2} , выбираем последовательность

$$p_{i_2,1}, p_{i_2,2}, \dots, p_{i_2,n} \quad (3)$$

и находим d в соответствии с распределением (3). Это дает реализацию вектора (x_{i_2}, y_{i_2}) и т. д.

Моделирование непрерывных случайных векторов

Пусть величины ξ и η являются составляющими случайного вектора. В этом случае двухмерная случайная величина (ξ, η) описывается совместной функцией плотности $f(x, y)$.

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

С помощью функции плотности $f_{\xi}(x)$ находится случайное число x_i . При условии $\xi = x_i$ определяется условное распределение случайной величины η :

$$f_{\eta}(y/\xi = x_i) = f(x, y)/f_{\xi}(x_i).$$

По функции плотности определяется случайное число y_i . Пара чисел (x_i, y_i) будет являться искомой реализацией вектора (ξ, η) .

В условиях многомерных векторов объем вычислений существенно увеличивается, что создает препятствия к использованию этого способа в практике моделирования систем.

В пространстве с числом измерений больше двух доступным оказывается формирование случайных векторов в рамках корреляционной теории. Рассмотрим случайный вектор с математическими ожиданиями a_1, a_2, \dots, a_n и корреляционной матрицей

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix},$$

где $k_{ij} = k_{ji}$.

Пример. Рассмотрим трехмерный случай реализации трехмерного случайного вектора с составляющими (ξ, η, φ) и имеющего нормальное распределение с математическими ожиданиями $M[\xi] = a_1, M[\eta] = a_2, M[\varphi] = a_3$ и корреляционной матрицей K , элементы которой являются дисперсиями случайных величин $k_{11} = D[\xi], k_{22} = D[\eta], k_{33} = D[\varphi]$. Элементы $k_{12} = k_{21}, k_{13} = k_{31}, k_{23} = k_{32}$ представляют собой соответственно корреляционные моменты ξ и η, ξ и φ, η и φ .

Пусть имеется последовательность некорреляционных случайных чисел $\{v_i\}$, имеющих одномерное нормальное распределение с параметрами a и σ . Выберем три числа v_1, v_2, v_3 , преобразуем так, что они имеют характеристики a_1, a_2, a_3 и K . Искомые составляющие случайного вектора (ξ, η, φ) обозначим как x, y, z и представим в виде линейного преобразования случайных величин v_i :

$$x = c_{11}(v_1 - a) + a_1, \quad y = c_{12}(v_1 - a) + c_{22}(v_2 - a) + a_2,$$

где c_{ij} — некоторые не известные коэффициенты. Для вычисления этих коэффициентов воспользуемся элементами корреляционной матрицы K . Величины v_1, v_2, v_3 независимы между собой, то $M[(v_i - a)(v_j - a)] = 0$ при $i \neq j$. В итоге имеем:

$$\begin{aligned} k_{11} &= c_{11}^2 \sigma^2, & k_{22} &= c_{12}^2 \sigma^2 + c_{22}^2 \sigma^2, \\ k_{33} &= c_{13}^2 \sigma^2 + c_{33}^2 \sigma^2, & k_{12} &= c_{11} c_{12} \sigma^2, \\ k_{13} &= c_{11} c_{13} \sigma^2, & k_{23} &= c_{12} c_{13} \sigma^2 + c_{23}^2 \sigma^2. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнения относительно c_{ij} получим

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \sqrt{k_{11}}/\sigma, \quad c_{12} = k_{12}/(\sigma \sqrt{k_{11}}), \quad c_{13} = k_{13}/(\sigma \sqrt{k_{11}}), \\
c_{22} &= \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}/(\sigma \sqrt{k_{11}}), \\
c_{23} &= \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{13}}/(\sigma \sqrt{k_{11}}), \\
c_{33} &= \sqrt{k_{11}k_{33} - k_{13}^2 - k_{11}k_{23} + k_{12}k_{13}}/(\sigma \sqrt{k_{11}}).
\end{aligned}$$

Вычислив коэффициенты c_{ij} три последовательных случайных числа v_i $i:=1, 2, 3$, преобразуются в составляющие случайного вектора (x_i, y_i, z_i) .

Требуется хранить в памяти ЭВМ $n(n+1)/2$ корреляционных моментов k_{ij} и n математических ожиданий a_i . При больших n могут встречаться сложности, связанные с большим объемом вычислений.