ЛЕКЦИЯ 1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Физика – самая фундаментальная из всех естественных наук. Она изучает простые и общие свойства материи и сравнительно простые явления природы. Поэтому физика составляет универсальную основу всей науки и техники.

Научное исследование какого-либо физического явления можно разделить на три этапа: эксперимент (или наблюдения), построение модели и математический формализм. Два последних этапа являются составными частями физической теории, назначение которой – составить представление о механизме исследуемого явления и дать его количественное описание. Для построения теории сначала на основании наблюдений или экспериментальных данных конструируется образная модель изучаемого явления. Модель должна быть достаточно простой для того, чтобы быть пригодной для математического описания. Применение математики позволяет получить количественные соотношения между физическими величинами, которые могут быть проверены на опыте.

Для установления эмпирических соотношений и законов необходимо определить способы и методы измерения различных физических величин. Измерить какую-либо физическую величину – это значит сравнить ее с одноименной величиной, принятой за единицу. Единицы измерения физических величин разделяют на основные и производные от основных. Основные единицы определяют посредством эталонов, выбранных по международному соглашению. Эталон представляет собой меру или прибор, служащие для хранения, воспроизведения и передачи единицы измерения физической величины. Единицы всех прочих величин устанавливают при помощи физических законов, связывающих эти величины с основными.

В международной системе единиц, обозначаемой сокращенно СИ, основными единицами являются: единица длины – метр (м), единица времени – секунда (с), единица массы – килограмм (кг), единица силы тока – ампер (А), единица термодинамической температуры – кельвин (К), единица силы света – кандела (кд) и единица количества вещества – моль (моль). Система единиц СИ, как установлено государственным стандартом, должна применяться как предпочтительная в науке, технике и при преподавании.

Название «общая физика» предполагает существование нескольких специальных разделов физики, в которых изучаются различные частные явления – фрагменты единой картины окружающего нас материального мира.

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Согласно основным положениям материалистического учения, окружающий нас мир состоит из различных видов материи, которая движется в пространстве и изменяется с течением времени.

Пространство есть совокупность протяженных тел, а время – совокупность часов, расположенных в различных местах пространства и отсчитывающих длительности временных интервалов. Протяженность тел характеризуется длиной l, а длительность протекающих процессов – временем t.

Движение, понимаемое в широком смысле как всякое изменение, является неотъемлемым всеобщим свойством матер ии. Простейшей формой движения является механическое движение, или перемещение, т.е. изменение положения одного тела относительно другого. Механика есть наука о механическом движении тел. Ее основы были заложены английским ученым Исааком Ньютоном (1643-1727). Механика делится на три раздела: кинематику, динамику и статику.

1.1. Механические модели

Основными понятиями ньютоновской (классической) механики, составляющими механистическую модель мира, являются *абсолютное пространство*, *абсолютное время* и *материальная точка*.

Абсолютное пространство можно представить себе как пространство внутри ящика, стенки которого раздвинули до бесконечности. Оно вмещает в себя всю материю, но от нее не зависит. Абсолютное пространство одновременно неосязаемо и незыблемо. Основными его свойствами являются однородность и изотропность, т.е. все точки абсолютного пространства и все направления в нем равноценны.

Абсолютное время t по определению протекает равномерно, не зависит от свойств материи и от места в пространстве, т.е. предполагается, что существует принципиальная возможность измерить величину t посредством синхронизированных часов сразу во всех точках пространства, и в результате этих измерений получить всюду одно и то же значение t. Абсолютное время однородно, но не изотропно, т.е. все его мгновения равноценны, но из двух мгновений одно было раньше другого. В механике для описания движения тел используются разные физические модели. Простейшей моделью является материальная точка – тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

Материальная точка есть абстрактное понятие, так как все реальные тела, даже элементарные частицы, имеют некоторые размеры. Протяженные тела в механике рассматриваются как системы, в состав которых входит несколько (иногда очень много) материальных точек.

Абсолютно твердым телом называется система материальных точек, расстояния между которыми со временем не изменяются. Следовательно, размеры и форма абсолютно твердого тела сохраняются с течением времени.

Тело, относительно которого определяют положения и рассматривают перемещения других тел, называется *телом отсчета*. Для количественного описания движения других тел с этим телом связывают некоторую систему координат. Приборы для измерения времени t и координат x, y, и z произвольной точки пространства вместе с телом, на котором они находятся, составляют *систему отсчета*.

1.2. Основные понятия кинематики

Кинематика – раздел механики, в котором дается математическое описание движения тел, но не объясняются причины, определяющие тот или иной характер их движения.

Самое простое механическое движения – это *прямолинейное поступательное движение*, т.е. движение тела вдоль прямой линии без вращения. Положение тела на прямой можно задать при помощи координаты x (рис. 1.1), которая есть расстояние от начала отсчета до тела, взятое с учетом знака.

Прямолинейное движение тела удобно описывать при помощи функции

$$x = x(t). \tag{1.1}$$

Зная эту зависимость, можно определить положение тела на оси x в любой момент времени t.

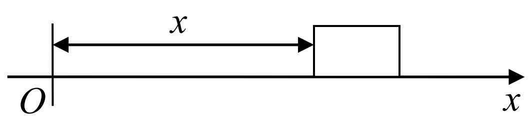


Рис. 1.1

Пусть t_1 и t_2 – два произвольных времени. Разность

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

называется приращением времени, а разность

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

соответствующих значений функции (1.1)

$$x_1 = x(t_1) \text{ и } x_2 = x(t_2)$$

– *приращением координаты*. Отношение этих приращений

$$\langle \upsilon_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

называется *средней скоростью* тела за время от t_1 до t_2.

Производная от координаты $x(t)$ по времени t

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} \tag{1.2}$$

называется *мгновенной скоростью* тела, или просто *скоростью*, а производная от скорости $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ по времени t

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}$$

называется *ускорением тела*. На основании определения (1.3) мгновенной скорости, можно утверждать, что ускорение есть вторая производная от координаты по времени:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Скорость тела есть некоторая функция от времени $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$. Отношение приращения этой функции

$$\Delta\upsilon_x = \upsilon_{x_2} - \upsilon_{x_1} \equiv \upsilon_x(t_2) - \upsilon_x(t_1)$$

к соответствующему приращению времени Δt называется *средним ускорением* тела за время от t_1 до t_2:

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t}.$$

Путь ds, пройденный телом вдоль оси x за время от t до $t + dt$, есть неотрицательная величина, которая связана с приращением dx координаты соотношением

$$ds = |dx|.$$

Из этого соотношения следует, что за время от t_1 до $t_2 > t_1$ тело проходит путь

$$s = \int ds = \int_{t_1}^{t_2} \frac{|dx|}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\upsilon_x| dt.$$

1.3. Кинематика движения материальной точки

Движение материальной точки считается известным, если заданы функции $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, при помощи которых можно в любой момент времени t определить ее положение в пространстве.

Совокупность функций эквивалента зависимости радиус-вектора тела от времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Линия, которую прочерчивает материальная точка при своем движении в пространстве, называется ее *траекторией*.

Вектор

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

называется *вектором перемещения* частицы из точки P в точку Q, а вектор

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

– ее *средней скоростью* за время от t_1 и t_2 (рис. 1.2).

Вектор называется *мгновенной скоростью* материальной точки, или просто *скоростью*:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.3)$$

При необходимости соотношение (1.3) можно записать в виде

$$d\vec{r} = \vec{\upsilon} dt.$$

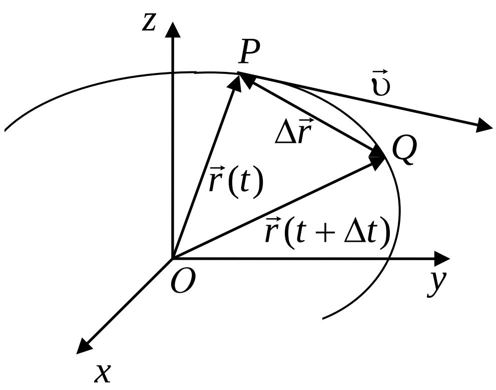


Рис. 1.2

Модуль вектора скорости:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}\ .$$

Производная от вектора скорости $\vec{\upsilon}(t)$ по времени t называется *мгновенным ускорением* частицы:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}.$$

Модуль вектора ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Вектор $\vec{a}$ ускорения частицы можно представить в виде суммы двух взаимно ортогональных векторов $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ (рис. 1.3):

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau\,,\ \ \vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau\,.$$

Вектор $\vec{a}_\tau$ называется *касательным*, или *тангенциальным ускорением*. Этот вектор является касательным к траектории в любой ее точке, т.е. он направлен так же, как вектор скорости, или противоположен ему:

$$\vec{a}_\tau \parallel \vec{\upsilon}\,.$$

Проекция касательного ускорения на вектор скорости равна производной от модуля вектора скорости по времени:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

Вектор $\vec{a}_n$ называется *нормальным*, или *центростремительным ускорением*. Этот вектор перпендикулярен к траектории частицы в любой ее точке:

$$\vec{a}_n \perp \vec{\upsilon}$$

и направлен к точке *C*, которая называется *центром кривизны* траектории. Модуль центростремительного ускорения определяется формулой

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R},$$

где величина *R* называется *радиусом кривизны* траектории. Если траекторией движения частицы является окружность, то центр кривизны есть центр окружности, а радиус кривизны равен ее радиусу. В силу теоремы Пифагора модули векторов $\vec{a}$, $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ связаны соотношением

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2.$$

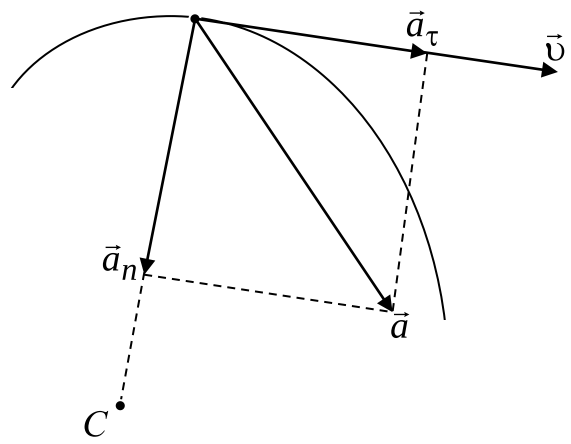


Рис. 1.3

Контрольные вопросы

1. Что называется материальной точкой? В каких случаях может использоваться эта модель?
2. Что такое система отсчета?
3. Что такое вектор перемещения? Всегда ли модуль вектора перемещения равен отрезку пути, пройденному точкой?
4. Как определяется вектор ускорения и что он характеризует?

ЛЕКЦИЯ 2

2.1. Движение материальной точки по окружности

Если частица движется по окружности, то угол φ изменяется с течением времени. Таким образом, движение по окружности можно описать посредством функции (рис. 2.1)

$$\varphi = \varphi(t).$$

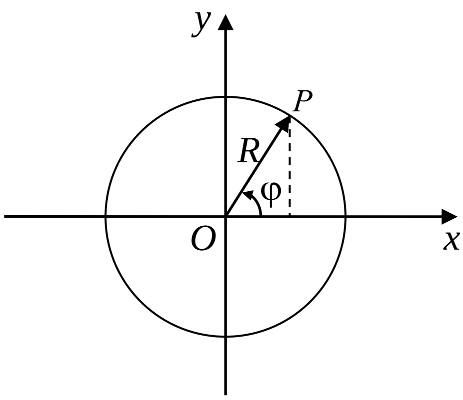


Рис. 2.1

Угловой скоростью ω называется производная от функции $\varphi(t)$ по времени t:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловое ускорение ε есть производная от угловой скорости $\omega(t)$ по времени t

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

т.е. угловое ускорение есть вторая производная от угла по времени.

Модуль вектора линейной скорости связан с модулем угловой скорости

$$\upsilon = R|\omega|,$$

где R – радиус окружности.

Для модулей нормального и тангенциального ускорений:

$$a_n = R\omega^2, \quad a_\tau = R|\varepsilon|, \quad a_n = \frac{\upsilon^2}{R}.$$

2.2. Кинематика вращательного движения твердого тела

Рассмотрим вращательное движение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси. Для этого построим прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ось z совпала с осью вращения (рис. 2.2). Пусть P есть произвольная точка твердого тела. Координаты радиус-вектора $\vec{r}$ этой точки можно представить в виде

$$x = R\cos\varphi,\ \ y = R\sin\varphi,\ \ z = \text{const},$$

где R – расстояние от точки P до оси вращения; φ – угол между плоскостью, проходящей через ось z и точку P, и координатной плоскостью xz. При вращении тела угол φ будет изменяться со временем, а вектор скорости точки P будет иметь координаты

$$\upsilon_x = -R\omega\sin\varphi,\ \ \upsilon_y = R\omega\cos\varphi,\ \ \upsilon_z = 0,$$

где

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

– вектор угловой скорости.

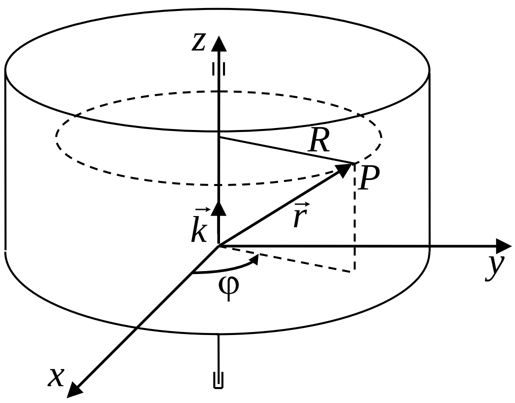


Рис. 2.2

Линейная скорость связана с угловой скоростью

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}\vec{r}].$$

Это соотношение называется *формулой Эйлера*.

Рассмотрим произвольное движение абсолютно твердого тела в пространстве. Выделим две какие-нибудь точки A и B, жестко связанные с телом. Мгновенные скорости $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_B$ этих точек связаны соотношением

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \left[\vec{\omega}\overrightarrow{AB}\right],$$

которое также называют формулой Эйлера.

Скорости разных точек твердого тела в общем случае различны, но вращение тела в заданный момент времени характеризуется одним вектором $\vec{\omega}$ угловой скорости. Любую прямую линию, параллельную вектору угловой скорости, можно назвать осью вращения. Поступательным называется движение абсолютно твердого тела, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается, оставаясь параллельной самой себе. При поступательном движении угловая скорость равна нулю и все точки тела имеют одну и ту же мгновенную линейную скорость. По формуле Эйлера произвольное движение твердого тела можно рассматривать как совокупность поступательного и вращательного движений. Первое слагаемое $\vec{\upsilon}_A$ в правой части этой формулы в такой интерпретации описывает поступательное движение тела, а последнее – вращение тела вокруг оси, проходящей через точку A.

ДИНАМИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

2.3. Принцип инерции Галилея. Инерциальные системы отсчета

Динамика – это раздел механики, предметом исследования в котором так же, как и в кинематике, является механическое движение тел, но с учетом физических причин, обусловливающих тот или иной характер движения. *Прямолинейным* называется движение материальной точки вдоль прямой линии или поступательное движение абсолютно твердого тела, при котором траектории всех точек тела суть параллельные прямые. Прямолинейное движение представляет собой самый простой вид механического движения.

Первые количественные исследования механического движения были проведены итальянским ученым Галилео Галилеем (1564-1642). На основании этих измерений Галилей сформулировал утверждение, которое теперь называют *принципом инерции Галилея* (или *первым законом Ньютона*): всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, если отсутствует воздействие на него со стороны других тел. Иначе говоря, принцип инерции утверждает, что свободное тело, т.е. тело, не взаимодействующее с другими телами, имеет равное нулю ускорение. Однако прежде, чем говорить о величине ускорения, следует указать систему отсчета, по отношению к которой это ускорение измеряется.

Системы отсчета, в которых принцип инерции Галилея выполняется, называют *инерциальным*. Тогда как системы отсчета, в которых этот принцип не справедлив, называют неинерциальными. Инерциальных (так же, как и неинерциальных) систем отсчета бесконечно много.

Если некоторая система отсчета K является инерциальной, то любая другая система отсчета K', движущаяся относительно системы K с постоянной скоростью, также будет инерциальной.

Гипотеза абсолютности времени предполагает, что ход времени во всех системах отсчета одинаков, т.е. синхронизированные часы в различных системах отсчета показывают одно и то же время:

$$t = t' .$$

2.4. Сила. Масса. Законы Ньютона

Различные тела и частицы материи взаимодействуют друг с другом. Количественной характеристикой взаимодействия тел и частиц является *сила*.

Для определения силы также необходимо указать способ ее измерения.

На опыте установлено, что ускоренное движение тел и их деформация, т.е. изменение размеров и формы тел, являются результатом их взаимодействия. Каждое из этих проявлений взаимодействия тел может быть использовано для измерения силы. Однако практически удобнее измерять величину деформации, чем ускорение тел.

Прибор для измерения силы по величине деформации тела, подвергающегося воздействию со стороны других тел, называется *динамометром* (рис. 2.3). Деформация тела называется *упругой*, если после прекращения воздействия размеры и форма тела становятся такими же, как и до воздействия. Основной деталью динамометра служит тело, испытывающее упругую деформацию. Например, таким телом может быть пружина, деформация которой (удлинение или сжатие) тем больше, чем больше приложенное к ней усилие. Мерой деформации является величина

$$\Delta l = l - l_0 ,$$

называемая *удлинением*, где l – длина деформированного тела; l_0 – длина тела до его деформации. Экспериментально установлено (закон Гука), что при определенных условиях удлинение тела пропорционально приложенной силе F, которая называется силой *упругости*:

$$F = k|\Delta l|,$$

где коэффициент пропорциональности k называется *коэффициентом упругости*. В случае, когда деформируемым телом является пружина, коэффициент k называется коэффициентом упругости. В случае, когда деформируемым телом является пружина, коэффициент k называется ее жесткостью. Этот закон выполняется, когда удлинение тела не очень велико.

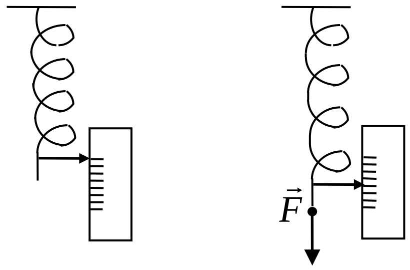


Рис. 2.3

Воздействие одного тела на другое характеризуется не только величиной силы, но и ее направлением. Поэтому для более полного описания воздействия на тело используют *вектор силы* $\vec{F}$, направление которого совпадает с направлением оказываемого воздействия. *Точкой приложения силы* называется точка тела, в которой оно испытывает воздействие со стороны другого тела. Принято считать, что начало вектора силы совпадает с точкой ее приложения. *Линией действия* силы называется прямая, вдоль которой направлен вектор силы. На одно тело могут одновременно действовать сразу несколько сил. Векторная сумма

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

всех сил, приложенных к телу, называется *равнодействующей*, или *результирующей силой*.

Ньютоном был установлен закон: *ускорение тела прямо пропорционально действующей на него силе*:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\sum \vec{F}_i}{m},$$

где коэффициент пропорциональности m, являющийся количественной характеристикой рассматриваемого тела, называется *инертной массой* этого тела. Закон можно записать в другой форме

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}).$$

Величина $\vec{P} = m\vec{\upsilon}$ называется импульсом (количеством движения).

Выражение

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

является более общей формулировкой второго закона Ньютона: скорость изменения импульса материальной точки равна результирующей силе (векторной сумме действующих сил).

Единица силы в СИ – ньютон (Н) 1 Н = 1 кг $\cdot \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

В частном случае, когда отсутствуют воздействия на тело со стороны других тел или результирующая сила равна нулю, ускорение будет также равно нулю. Таким образом, принцип инерции Галилея или первый закон Ньютона можно рассматривать как следствие второго закона Ньютона. Однако первый закон Ньютона рассматривается как самостоятельный закон, так как именно он утверждает существование инерциальных систем отсчета, и второй закон Ньютона справедлив относительно некоторой инерциальной системы отсчета.

Воздействие одного тела на другое никогда не бывает односторонним и всегда имеет характер взаимодействия. Если тело 1 действует на тело 2 с силой $\vec{F}_{21}$, то и тело 2 в свою очередь действует на тело 1 с некоторой силой $\vec{F}_{12}$ (рис. 2.4). Причем, эти силы равны по величине, но противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \ F_{12} = F_{21}.$$

Эти силы приложены к разным телам, всегда действуют парами и являются силами одной природы. Это утверждение составляет содержание третьего закона Ньютона.

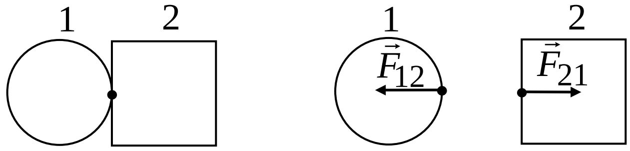


Рис. 2.4

Третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики материальной точки к динамике системы материальных точек, для которой взаимодействие сводится к силам парного взаимодействия.

Третий закон Ньютона справедлив в инерциальных системах отсчета.

Контрольные вопросы

1. Как определяются векторы угловой скорости и углового ускорения? Как они направлены?
2. Как линейная скорость связана с угловой скоростью вращения тела?
3. Какие системы отсчета называются инерциальными?
4. Что такое равнодействующая сила и как она может быть найдена?
5. Какие виды сил чаще всего встречаются в механике? Как они направлены?

ЛЕКЦИЯ 3

3.1. Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела

Движение материальной точки в пространстве можно описать посредством зависимости ее радиус-вектора от времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Эта зависимость может быть найдена из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

в котором следует положить $\vec{a} = \dfrac{d^2 r}{dt^2}$:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \qquad (3.1)$$

В этом уравнении действующая на частицу сила считается известной и рассматривается как заданная функция от времени, радиус-вектора и скорости:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{\upsilon}),$$

где $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. В координатной форме второй закон Ньютона (3.1) для материальной точки будет иметь вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y,\ m\frac{d^2z}{dt} = F_z, \tag{3.2}$$

где проекции F_x, F_y, F_z вектора силы являются известными функциями от времени t, координат частицы x, y, z и проекций υ_x, υ_y, υ_z вектора ее скорости на координатные оси. Уравнения (3.2) образуют систему дифференциальных уравнений для трех неизвестных функций

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t).$$

Основной задачей динамики в данном случае является решение уравнений движения (3.1) или (3.2). Единственное частное решение этих уравнений может быть найдено, если заданы *начальные условия*:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0,\ \vec{\upsilon}(t_0) = \vec{\upsilon}_0,$$

где $\vec{r}_0$ и $\vec{\upsilon}_0$ – известные векторы, первый из которых определяет положение частицы в момент времени t_0, а второй – ее скорость в этот момент времени. Эти условия в координатной форме можно записать так:

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0,\ \upsilon_x(t_0) = \upsilon_{x_0},\ \upsilon_y(t_0) = \upsilon_{y_0},\ \upsilon_z(t_0) = \upsilon_{z_0},$$

где x_0, y_0, z_0 и υ_{x_0}, υ_{y_0}, υ_{z_0} – координаты векторов $\vec{r}_0$ и $\vec{\upsilon}_0$ соответственно.

3.2. Закон сохранения импульса. Центр масс механической системы

Совокупность материальных точек или тел, рассматриваемых как единое целое, называется *механической системой*.

Внутренние силы – это силы взаимодействия между материальными точками или телами механической системы.

Внешние силы – это силы, с которыми внешние тела действуют на тела механической системы.

Механическая система называется замкнутой или изолированной, если на нее действуют внешние силы или их результирующая равна нулю.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n тел, взаимодействующих между собой, на которую действуют внешние силы.

Запишем второй закон Ньютона для каждого тела механической системы:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{\upsilon}_1\right)=\vec{F}_1'+\vec{F}_1;$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_2\vec{\upsilon}_2\right)=\vec{F}_2'+\vec{F}_2;$$

…………

$$\frac{d}{dt}\left(m_n\vec{\upsilon}_n\right)=\vec{F}_n'+\vec{F}_n.$$

Складывая почленно эти уравнения, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i'+\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_n.$$

По третьему закону Ньютона $\sum\limits_{i=1}^{n}F_i'$ – геометрическая сумма внутренних сил механической системы равна 0, $\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i=\vec{P}$ – импульс системы $\frac{dP}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}_i$, где $\sum\vec{F}_i$ – результирующая внешних сил для замкнутой системы, она равна нулю, поэтому

$$\frac{dP}{dt}=0\text{, т.е. }\vec{P}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i=\text{const}.$$

Это выражение и является законом сохранения импульса: импульс замкнутой системы тел, взаимодействующих между собой, сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

Этот закон является фундаментальным законом природы, носит универсальный характер, выполняется в замкнутой системе микрочастиц, подчиняющихся законам квантовой механики.

Закон сохранения импульса является следствием определенного свойства симметрии пространства – однородности. Однородность пространства заключается в том, что физические свойства и законы движения замкнутой системы тел не зависят от выбора начала координат инерциальной системы отсчета.

Импульс системы тел можно выразить через скорость ее центра масс (или центра инерции). Центром масс системы называется воображаемая точка *C*, положение которой характеризует распределение массы этой системы. Радиус-вектор точки *C* равен

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m},$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – соответственно масса и радиус-вектор каждой из n материальных точек системы, $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – масса системы.

Скорость центра масс

$$\vec{\upsilon}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i}{m},$$

так как $\sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i = P$ – импульс системы, можно записать

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon}_C,$$

т.е. импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

В соответствии этим выражением из закона сохранения импульса вытекает

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_i .$$

Эта формула представляет собой закон движения центра масс: центр масс замкнутой системы $\left(\sum_{i=1}^{n} F_i = 0\right)$ либо остается в состоянии покоя, либо движется прямолинейно и равномерно.

3.3. Уравнение движения тела переменной массы

Движение некоторых тел сопровождается изменением их массы. Можно вывести уравнение движения тела переменной массы, использовав закон сохранения импульса, на примере движения ракеты.

Пусть в момент времени t масса ракеты m, скорость υ. Через время dt ее масса уменьшается на dm, а скорость увеличится на $d\upsilon$. Изменение импульса системы за промежуток времени dt

$$d\vec{p} = \left[(m - dm)(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}) + dm(\vec{\upsilon} + \vec{u}) - m\vec{\upsilon}\right],$$

где $\vec{u}$ – скорость истечения газов относительно ракеты.

Тогда

$$d\vec{p} = md\vec{\upsilon} + \vec{u}dm\,.$$

Если на систему действуют внешние силы, то $d\vec{p} = \vec{F}dt$, поэтому

$$\vec{F}dt = md\vec{\upsilon} + \vec{u}dm$$

или

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} - \vec{u}\frac{dm}{dt},$$

где $\vec{u}\dfrac{dm}{dt} = \vec{F}_{\text{р}}$ называют реактивной силой.

Если $\vec{u}$ противоположен $\vec{\upsilon}$ по направлению, то ракета ускоряется, а если совпадает с $\vec{\upsilon}$, то тормозится.

Таким образом

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{р}}$$

– уравнение движения тела переменной массы, было получено И.Б. Мещерским.

К.Э. Циолковский предложил теорию движения ракеты, основанную на принципе реактивного движения. При условии отсутствия внешних сил, $\vec{F} = 0$, и полагая, что скорость выбрасываемых газов относительно ракеты постоянна (ракета движется прямолинейно), получим

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\vec{u}\frac{dm}{dt},$$

откуда

$$\upsilon = -u\int\frac{dm}{m} = -u\ln m + C\,.$$

Значение постоянной C можно определить из начальных условий. Если начальная скорость ракеты равна нулю, стартовая масса m_0, то $C = u\ln m_0$, следовательно

$$\upsilon = u\ln\frac{m_0}{m}$$

– формула Циолковского.

Контрольные вопросы

1. Что называется центром инерции системы? Как записывается закон движения центра инерции?
2. В чем заключается закон сохранения импульса? В каких системах он выполняется?
3. Каким свойством пространства обуславливается справедливость закона сохранения импульса?
4. Сформулируйте уравнение движения тела переменной массы.

ЛЕКЦИЯ 4

4.1. Работа и мощность

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Для количественной характеристики процесса обмена энергией между взаимодействующими телами в механике вводится понятие работы силы. Если под действием постоянной силы F тело движется прямолинейно и совершает перемещение S, то работа это силы равна

$$A = FS\cos\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{S}$ (рис. 4.1).

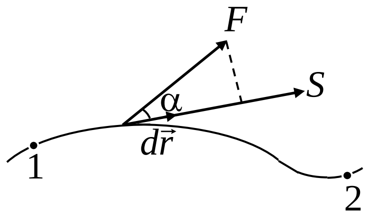


Рис. 4.1

В случае переменной силы скалярное произведение вектора силы, которая действовала на частицу, на вектор бесконечно малого перемещения $d\vec{r}$ называется *элементарной работой*, или работой, совершенной силой $\vec{F}$ при перемещении $d\vec{r}$, и обозначается как

$$dA = \vec{F}d\vec{r}\,. \tag{4.1}$$

Согласно определению скалярного произведения векторов, формула (4.1) может быть записана так:

$$dA = Fdr\cos\alpha\,,$$

где F – модуль силы; α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$. В координатной форме равенство (4.1) имеет вид

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz\,.$$

Работа, совершенная силой $\vec{F}$ при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 вдоль некоторой кривой, равна сумме совершенных при этом элементарных работ и выражается интегралом

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r}\,,$$

который является криволинейным. Этот интеграл может быть сведен к определенному интегралу. Для этого, используя формулу

$$d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt\,,$$

преобразуем выражение (4.1) к виду

$$dA = Pdt\,, \tag{4.2}$$

где величина

$$P = \vec{F}\vec{\upsilon} \tag{4.3}$$

называется *мощностью*. Как следует из формулы (4.2), мощность есть работа, совершенная за единицу времени:

$$P = \frac{dA}{dt}.$$

В системе СИ единица измерения мощности – ватт (Вт) 1 Вт = 1 Дж/с.

В том случае, когда движение тела известно, мощность можно рассматривать как заданную функцию от времени: $P = P(t)$. Подстановка выражения (4.2) в криволинейный интеграл преобразует его в определенный интеграл

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt,$$

где t_1 и t_2 - моменты времени, когда тело находилось в точках 1 и 2 соответственно.

4.2. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия механической системы – энергия механического движения этой системы.

Величина

$$T = \frac{1}{2}m\upsilon^2, \tag{4.4}$$

где m – масса тела; υ – скорость, называется *кинетической энергией*. В некоторых случаях кинетическую энергию удобно выразить через ее импульс $p = m\upsilon$, т.е. представить кинетическую энергию в виде

$$T = \frac{p^2}{2m}.$$

В координатной форме формулу (4.4) можно записать

$$T = \frac{1}{2}m\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2\right).$$

Производная от кинетической энергии по времени:

$$\frac{dT}{dt} = m\left(\upsilon_x \frac{d\upsilon_x}{dt} + \upsilon_y \frac{d\upsilon_y}{dt} + \upsilon_z \frac{d\upsilon_z}{dt}\right) \equiv m\vec{\upsilon}\vec{a} = \vec{F}\vec{\upsilon}\,.$$

Используя второй закон Ньютона и определение мощности (4.3), придем к уравнению

$$\frac{dT}{dt} = P\,.$$

Из этого уравнения вытекает *закон сохранения кинетической энергии.* Когда мощность силы равна нулю, кинетическая энергия тела остается постоянной: если $P = 0$, то $T = \text{const}$. Из формулы (4.3) видно, что мощность будет равна нулю, когда сила перпендикулярна скорости или когда сама сила равна нулю.

Приращение кинетической энергии:

$$dT = Pdt = dA.$$

Интегрируя обе части этого равенства по времени в пределах от t_1 до t_2, получим:

$$\Delta T = A,$$

где

$$\Delta T = T_2 - T_1 \equiv T(t_2) - T(t_1) = A.$$

Следовательно, приращение кинетической энергии тела, которое она получила за некоторое время, равно работе, совершенной за это время действующей на тело силой. Из этих соотношений следует также, что работа и энергия имеют одинаковые размерности. В системе СИ единицей измерения энергии и работы является джоуль (Дж), который равен работе, совершенной силой в 1 Н на пути в 1 м.

4.3. Удар абсолютно упругих и неупругих тел

Используются законы сохранения импульса и энергии.

Удар – это столкновение двух и более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время. При этом силы взаимодействия между сталкивающимися телами столь велики, что внешними силами можно пренебречь. Это позволяет систему тел в процессе соударения рассматривать как замкнутую и применять к ней законы сохранения.

Во время удара тела претерпевают деформацию (нет идеальных гладких поверхностей и упругих тел), которую можно охарактеризовать коэффициентом восстановления ε

$$\varepsilon = \frac{\upsilon'_n}{\upsilon_n},$$

где υ'_n – нормальная составляющая относительной скорости после удара; υ_n – нормальная составляющая относительной скорости до удара.

Если ε = 0, то такие тела называются абсолютно неупругими; ε = 1 – тела абсолютно упругие. На практике $0 < \varepsilon < 1$.

Линия удара – это прямая, проходящая через точку сопротивления тел и нормальная к поверхности их соприкосновения.

Удар называется *центральным*, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.

Абсолютно упругий удар – столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия тел до удара превращается в кинетическую энергию после удара.

Рассмотрим выполнение закона сохранения импульса и энергии (рис. 4.2):

m_1 и m_2 – массы шаров;

υ_1 и υ_2 – скорости до удара;

υ'_1 и υ'_2 – скорости после удара.

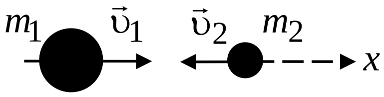


Рис. 4.2

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}'_1 + m_2\vec{\upsilon}'_2; \qquad (4.5)$$

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1\upsilon_1'^2}{2} + \frac{m\upsilon_2'^2}{2}. \qquad (4.6)$$

Произведя соответствующие преобразования, получим

$$m_1(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}'_1) = m_2(\vec{\upsilon}'_2 - \vec{\upsilon}_2); \qquad (4.7)$$

$$m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2) = m_2(\upsilon_2'^2 - \upsilon_2^2). \qquad (4.8)$$

Откуда

$$\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_1' = \vec{\upsilon}_2' + \vec{\upsilon}_2 . \tag{4.9}$$

Решая (4.9) и (4.7), получим

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2};$$

$$\upsilon_2' = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}.$$

Рассмотрим несколько случаев.

1) При $\upsilon_2 = 0$ (рис. 4.3)

$$\vec{\upsilon}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{\upsilon}_1; \ \vec{\upsilon}_2' = \frac{2m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2};$$

а) $m_1 = m_2$, при $\upsilon_2 = 0$, $\upsilon_1' = 0$, $\upsilon_2' = \upsilon_1$. Если второй шар до удара висел неподвижно, то после удара остановится первый шар, а второй будет двигаться с той же скоростью и в том же направлении, в котором двигался первый шар до удара.

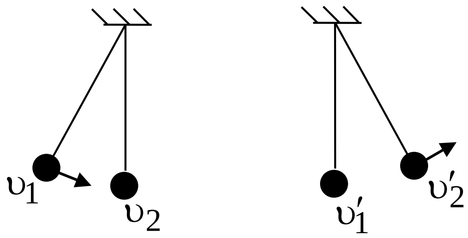


Рис. 4.3

б) $m_1 > m_2$, $\upsilon_1' < \upsilon_1$. Первый шар продолжает двигаться в том же направлении, но с меньшей скоростью. $\upsilon_2' > \upsilon_1'$; скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого после удара.

в) $m_1 < m_2$. Направление движения первого шара изменяется на противоположное (отскакивает). Второй шар движется в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью $\upsilon_2' < \upsilon_1$;

г) $m_1 << m_2$. Столкновение шара со стеной $\upsilon_1' = -\upsilon_1$; $\upsilon_2' \approx 0$.

2) При $m_1 = m_2$, $\upsilon_1' = \upsilon_2$, $\upsilon_2' = \upsilon_1$. Шары различной массы обмениваются скоростями.

Абсолютно неупругий удар – столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое.

Используя закон сохранения импульса, можно записать

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon},$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость шаров после удара

$$\vec{\upsilon} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}. \tag{4.10}$$

Если шары движутся навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом.

Если $m_1 = m_2$, то

$$\vec{\upsilon} = \frac{\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2}{2}.$$

При центральном абсолютно неупругом ударе кинетическая энергия изменяется. Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии ΔT, которая переходит в тепловую или другие формы энергии. ΔT можно определить по разности кинетических энергий тел до и после удара:

$$\Delta T = \left(\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2} = Q.$$

Используя (4.10) можно получить

$$\Delta T = \frac{m_1\upsilon_1}{2(m_1 + m_2)}(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2.$$

Абсолютно неупругий удар – пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.

Контрольные вопросы

1. В чем различие между понятиями энергии и работы?
2. Как найти работу переменной силы?
3. Чем обусловлено изменение кинетической энергии?

4. Какие законы сохранения выполняются при абсолютно упругом и абсолютно неупругом соударениях?

ЛЕКЦИЯ 5

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.1. Момент инерции. Теорема Штейнера

При поступательном движении масса тела рассматривается как мера инертности. При изучении вращения твердого тела используют понятие *момента инерции* J. Момент инерции тела – мера инертности при вращательном движении. В отличие от массы, момент инерции определяется относительно оси вращения. Момент инерции материальной точки

$$J = mr^2,$$

где m – масса; r – расстояние до оси вращения. В системе СИ единица измерения момента инерции килограмм-метр в квадрате (кг · м^2).

Моментом инерции тела относительно данной оси называется физическая величина, равная сумме произведений масс n материальных точек тела на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

Суммирование производится по всем элементарным массам m_i, на которые разбивается тело.

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегрированию по всему объему тела:

$$J = \int r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV ,$$

где r – радиус-вектор положения точки; ρ – плотность тела.

Для неоднородных тел и тел неправильной формы момент инерции определяют экспериментально, а для однородных тел геометрически правильной формы – посредством интегрирования. В табл. 5.1 приведены формулы для расчета J некоторых однородных тел геометрически правильной формы массой m относительно оси симметрии.

Таблица 5.1

Тело	Положение	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось симметрии	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиусом R		$J = \frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$J = \frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$J = \frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$J = \frac{2}{5}mR^2$
Брусок длиной а, шириной b	Ось симметрии	$J = \frac{m(a^2 + b^2)}{2}$

Если известен момент инерции J_C тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции J тела относительно произвольной оси можно вычислить по теореме Штейнера

$$J = J_C + ma^2,$$

где a – расстояние между осями; m – масса тела.

5.2. Момент силы

Для характеристики вращательного действия силы на твердое тело рассмотрим понятие момента силы. Моментом силы относительно неподвижной точки O называется физическая величина

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки O в точку A приложения силы F (рис. 5.1).

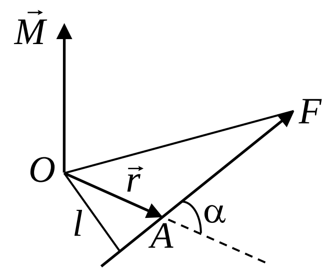


Рис. 5.1

Модуль момента силы

$$M = Fr\sin\alpha = Fl,$$

где α – угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$; $r \cdot \sin\alpha = l$ – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой *O*, называемое плечом силы.

Моментом силы относительно неподвижной оси *z* называется скалярная величина M_z, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы, определенного относительно произвольной точки *O* данной оси *z* (рис. 5.2). Значение момента M_z не зависит от выбора положения точки *O* на оси *z*.

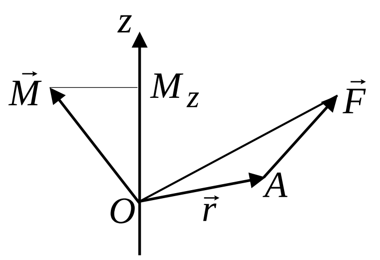


Рис. 5.2

Если ось *z* совпадает с направлением вектора *M*, то момент силы есть вектор, совпадающий с осью:

$$\vec{M}_z = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right]_z,$$

где $\vec{M}$ является псевдовектором, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

В случае действия на тело касательной силы ($\alpha = 90^\circ$, $r = l$) (рис. 5.3):

$$M = Fl.$$

Единица измерения момента силы в системе СИ ньютон-метр (Н · м).

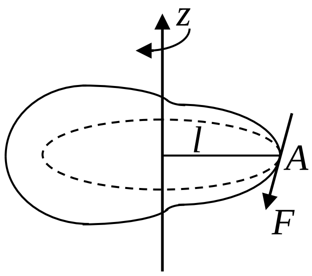


Рис. 5.3

5.3. Кинетическая энергия при вращательном движении

Кинетическая энергия поступательно движущегося тела выражается формулой

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Рассмотрим кинетическую энергию тела, вращающегося около неподвижной оси z, проходящей через него. Можно мысленно разбить это тело на объемы с элементарными массами $m_1, m_2, ..., m_n$, находящимися на расстояниях $r_1, r_2, ..., r_n$ от оси вращения (рис. 5.4).

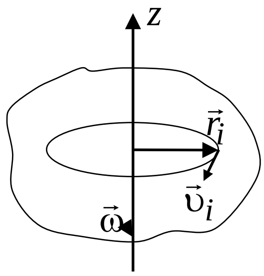


Рис. 5.4

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси его элементарные объемы опишут окружности различных радиусов r_i и будут иметь различные линейные скорости υ_i, но угловая скорость вращения ω этих объемов будет одинаковой:

$$\omega = \frac{\upsilon_1}{r_1} = \frac{\upsilon_2}{r_2} = ... = \frac{\upsilon_n}{r_n}.$$

Кинетическая энергия вращающегося тела может быть найдена как сумма кинетических энергий его элементарных объемов:

$$T_{вр} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2},$$

так как $\upsilon_i = \omega r_i$, то получим

$$T_{вр} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси z.

Итак, кинетическая энергия вращающегося тела

$$T_{вр} = \frac{J_z \omega^2}{2}.$$

Сравнивая эту формулу с формулой кинетической энергии поступательного движения $T = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$, можно указать, что момент инерции тела является мерой инертности вращающегося тела.

В случае одновременного поступательного движения и вращения (без скольжения) полная кинетическая энергия тела:

$$T = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2},$$

где m – масса тела; ω – угловая скорость вращения; υ_c – скорость центра масс тела; J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс.

5.4. Работа при вращательном движении

Рассмотрим работу, совершаемую при вращении тела. На рис. 5.5 к произвольной точке B, находящейся от оси z вращения тела на расстоянии r, приложена сила F, α – угол между направлением силы и радиус-вектором r.

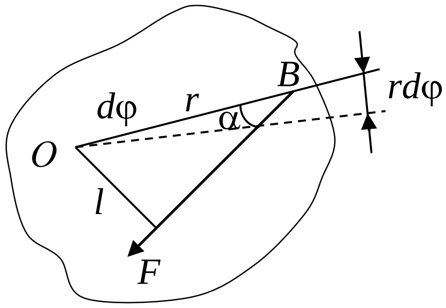


Рис. 5.5

Если тело абсолютно твердое, то работа этой силы равна работе, затраченной на поворот всего тела. При повороте тела на малый угол $d\varphi$ точка приложения силы F проходит малый путь dS

$$dS = rd\varphi .$$

Элементарная работа силы

$$dA = FdS\sin\alpha = F\sin\alpha rd\varphi .$$

Учитывая, что $Fr\sin\alpha = Fl$, где l – плечо силы

$$dA = Fl = M_z d\varphi ,$$

где M_z – момент силы относительно оси z.

Таким образом, элементарная работа при вращении тела равна произведению момента действующей силы на угол поворота.

Полная работа постоянной силы при повороте тела от 0 до φ определяется интегрированием

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi .$$

5.5. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Второй закон Ньютона является основным законом динамики поступательного движения:

$$\vec{F} = m\vec{a} .$$

Он отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение тела (материальной точки) под действием приложенных к нему сил.

Рассмотрим вывод уравнения динамики вращательного движения твердого тела.

На основании закона сохранения энергии, работа, совершаемая силой при вращении тела, идет на изменение (увеличение) его кинетической энергии:

$$dA = dT\,.$$

Изменение кинетической энергии при вращении тела:

$$dT = d\left(\frac{J_z\omega^2}{2}\right) = J_z\omega d\omega.$$

Работа при вращении тела

$$dA = M_z d\varphi\,.$$

Поэтому

$$J_z\omega d\omega = M_z d\varphi$$

или

$$M_z\frac{d\varphi}{dt} = J_z\omega\frac{d\omega}{dt}.$$

Угловая скорость вращения

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt};$$

угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

С учетом этих формул, можно получить

$$M_z = J_z\frac{d\omega}{dt} = J_z\varepsilon$$

– выражение представляет собой основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.

Доказывается, что если ось вращения z совпадает с осью инерции, проходящей через центр масс тела, то имеет место векторное равенство:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}\,,$$

где J – момент инерции тела относительно главной оси; $\vec{M}$ – результирующий момент сил, приложенных к телу; ε – угловое ускорение тела.

Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции тела? Какова роль момента инерции во вращательном движении?
2. Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.
3. Как вывести формулу для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
4. В чем состоит суть уравнения динамики вращательного движения твердого тела?

ЛЕКЦИЯ 6

6.1. Момент импульса

При вращательном движении материальной точки рассматривается понятие момента импульса (количества движения).

Моментом импульса материальной точки *A* относительно неподвижной точки *O* называется физическая величина, равная векторному произведению

$$\vec{L} = [\vec{r}\, m\vec{\upsilon}] = [\vec{r}\ \vec{p}],$$

где r – радиус-вектор, проведенный из точки O в точку A; $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – импульс материальной точки (рис. 6.1).

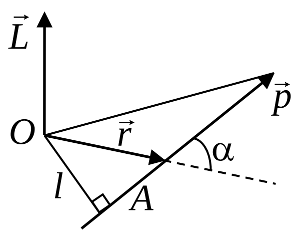


Рис. 6.1

Вектор момента импульса $\vec{L}$ является псевдовектором, его направление определяется по правилу правого винта.

Модуль вектора момента импульса

$$L = rp\sin\alpha = m\upsilon r\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$, так как $r\sin\alpha = l$ – плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки O, то

$$L = pl\,.$$

Моментом импульса относительно неподвижной оси z называется скалярная величина L_z, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки O данной оси. Момент импульса L_z не будет зависеть от положения точки O на оси z.

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси z каждая точка тела движется по окружности радиуса r_i с постоянной скоростью υ_i, перпендикулярной этому радиусу, т.е. радиус является плечом вектора импульса $m_i\vec{\upsilon}_i$. Можно записать для модуля момента импульса отдельной точки тела

$$L_{iz} = m_i \upsilon_i r_i\,,$$

направление которого определяется по правилу правого винта.

Момент импульса тела относительно оси можно определить сложением моментов импульса отдельных частей тела, которые можно рассматривать как материальные точки

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i r_i\,,$$

используя формулу $\upsilon_i = \omega r_i$, получим

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J_z \omega\,.$$

Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси L_z равен произведению момента инерции тела относительно той же оси J_z на угловую скорость вращения тела ω.

6.2. Закон сохранения момента импульса

Закон сохранения импульса является фундаментальным законом природы, который гласит, что в изолированной системе импульс системы сохраняется.

Момент импульса

$$L_z = J_z \omega .$$

Если продифференцировать это уравнение по времени

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(J_z \omega),$$

получим

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon ,$$

так как

$$J_z \varepsilon = M$$

есть основное уравнение динамики вращательного движения, то выражение

$$\frac{dL_z}{dt} = M$$

– другая форма этого закона.

Можно доказать, что имеет место векторное равенство

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} .$$

В замкнутой системе результирующий момент внешних сил

$$\vec{M} = 0 \text{ и } \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 ,$$

откуда следует, что $\vec{L} = \text{const}$, что означает сохранение момента импульса замкнутой системы.

Закон сохранения момента импульса замкнутой системы – фундаментальный закон природы. Он связан с изотропностью пространства.

6.3. Аналогии между физическими величинами и законами поступательного и вращательного движений

При сравнении физических величин и законов, характеризующих поступательное и вращательное движение, можно установить аналогии между ними. В табл. 6.1 приведены определения физических величин и формулы законов соответственно поступательного и вращательного движений.

Таблица 6.1

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Скорость	$\vec{\upsilon}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega}=\dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a}=\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon}=\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	$\vec{F}$	Момент силы	M_z или $\vec{M}$
Импульс	$\vec{p}=m\vec{\upsilon}$	Момент импульса	$L_z=J_z\omega$
Основное уравнение динамики	$\vec{F}=m\vec{a}$ $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики	$M_z=J_z\varepsilon$; $\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$
Работа	$dA=F_s ds$	Работа	$dA=M_z d\varphi$
Кинетическая энергия	$\dfrac{m\upsilon^2}{2}$	Кинетическая энергия	$\dfrac{J_z\omega^2}{2}$

Контрольные вопросы

1. Что называется моментом импульса материальной точки? твердого тела? Как определяется направление вектора момента импульса?
2. В чем заключается физическая сущность закона сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется?
3. Каким свойством пространства обуславливается справедливость закона сохранения момента импульса?
4. Сопоставьте основные формулы динамики поступательного и вращательного движений.

ЛЕКЦИЯ 7

7.1. Консервативные и неконсервативные силы

Если работа силы не зависит от пути между фиксированными точками, то сила называется консервативной (рис. 7.1)

$$\int\limits_{L_1(r_1,r_2)} \vec{F}d\vec{r} = \int\limits_{L_2(r_1,r_2)} \vec{F}d\vec{r}$$

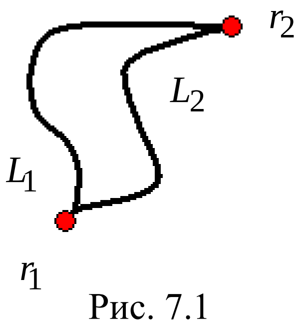


Рис. 7.1

Эквивалентное определение гласит: *консервативной называется сила, работа которой по любому замкнутому пути равна нулю* (рис. 7.1)

$$\oint\limits_{L_1(r_1,r_2)+L_2(r_2,r_1)} \vec{F}d\vec{r} = \int\limits_{L_1(r_1,r_2)} \vec{F}d\vec{r} - \int\limits_{L_2(r_1,r_2)} \vec{F}d\vec{r} = 0 .$$

Силы, для которых механическая энергия не сохраняется, называются *неконсервативными*. В этом случае имеет место превращение механической энергии в другие формы энергии, и в первую очередь в теплоту.

7.2. Потенциальная энергия и ее связь с силой, действующей на материальную точку

Если работа силы не зависит от формы траектории, а зависит только от положения начальной и конечной точек, то появляется возможность каждой пространственной точке сопоставить величину работы, производимой при перемещении в нее из некоторой произвольным образом выбранной фиксированной начальной точки. Работу, взятую с обратным знаком $U = -A$, принято использовать в качестве энергетической характеристики силового поля, называемой *потенциальной энергией*. Введение этой величины позволяет считать, что работа консервативной силы совершается за счет убыли потенциальной энергии системы $dA = -dU$. А с другой стороны, изменение потенциальной энергии механической системы является результатом совершения над ней работы.

7.3. Понятие о градиенте скалярной функции координат

При малом перемещении $d\vec{r}$ потенциальная энергия изменяется на величину

$$dU(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial x}dz,$$

которую можно представить в виде скалярного произведения вектора перемещения $d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$ и вектора $\vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial x}$, называемого градиентом и обозначаемого как $gradU$, т.е. $dU(x,y,z) = d\vec{r}\;gradU(x,y,z)$.

С математической точки зрения градиент представляет собой вектор, который указывает направление наискорейшего роста функции, а его длина дает скорость этого роста. На основании определения потенциальной энергии элементарную работу можно представить в виде $\vec{F}\,d\vec{r} = -gradU\,d\vec{r}$, где мы опустили аргументы. Отсюда следует равенство $\vec{F} = -gradU$, смысл которого заключается в следующем: *любая консервативная сила может быть представлена в виде взятого с обратным знаком градиента скалярной функции.*

Для конечного перемещения изменение потенциальной энергии равно

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} gradU d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} dU = U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0).$$

Отсюда следует, что работа силы, действующей на материальную точку, равна убыли ее потенциальной энергии, взятой с обратным знаком $A = -(U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0))$. Или, наоборот, изменение потенциальной энергии материальной точки является результатом совершения над ней работы $U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = -A$. С другой стороны, как было показано ранее, работа равна приращению кинетической энергии $A = \frac{1}{2}m\left(\upsilon^2 - \upsilon_0^2\right) = T - T_0$.

Таким образом, работа выступает здесь как способ преобразования кинетической энергии в потенциальную $T - T_0 = A = U_0 - U$ или наоборот. Эти равенства можно переписать в виде соотношения $T + U = T_0 + U_0$, которое называется законом сохранения механической энергии для материальной точки: *сумма кинетической и потенциальной энергий материальной точки в поле консервативных сил остается постоянной*: $T + U = \mathrm{const}$.

7.4. Поле центральных сил

Центральной называют силу, линия действия которой проходит все время через одну и ту же неподвижную точку *O*. При этом величина силы может быть произвольной функцией точки. Если выбрать точку *O* в качестве начала координат, то центральная сила имеет вид $\vec{F} = f(x, y, z)\vec{r}$. Так как $\vec{F}$ коллинеарна $\vec{r}$, а векторное произведение двух коллинеарных векторов равно нулю, то *механический вращающий момент центральной силы равен нулю* $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = 0$. Второй закон Ньютона для вращательного движения имеет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}m\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = m\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \vec{M} = 0\,.$$

Из него следует, что в поле центральной силы момент импульса сохраняется и, как следствие, $\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = 2\vec{c} = \mathrm{const}$. Векторное произведение $\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\right]$ – имеет простой геометрический смысл. Абсолютная величина вектора $[\vec{r}\,d\vec{r}]$ равна удвоенной площади треугольника, заметаемого радиусом-вектором за время *dt*. Разделив эту площадь на *dt*, мы получим площадь, заметаемую радиусом-вектором в единицу времени – так называемую секторную скорость *c* (рис. 7.2).

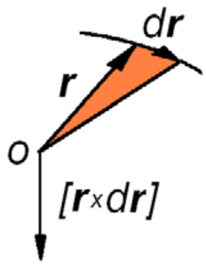


Рис. 7.2

Таким образом, мы приходим ко *второму закону Кеплера* (закону площадей), согласно которому *секторная скорость постоянна при действии любой центральной силы*. Кроме того, поскольку произведение $\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\right]$ равно постоянному вектору, нормаль к плоскости векторов $\vec{r}$ и $d\vec{r}$ сохраняет постоянное направление, т. е. траектория является плоской кривой.

7.5. Механическая энергия системы

Под механической системой будем понимать совокупность материальных точек, образующих систему. Силы взаимодействия $\vec{F}_{ij}$ между материальными точками i и j, из которых состоит система, называются *внутренними силами*. Здесь мы рассмотрим только случай *центральных сил* $\vec{F}_{ij}$, т.е. сил, действующих вдоль прямой, соединяющей точки i и j. Силы воздействия $\vec{F}_i$ на материальные точки со стороны внешних тел называются *внешними*.

Кинетическая энергия механической системы – это энергия механического движения образующих ее материальных точек. Она равна сумме кинетических энергий образующих ее материальных точек $T = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}$ и зависит от выбора инерциальной системы отсчета.

7.6. Потенциальная энергия системы

Потенциальная энергия механической системы – это сумма $U = \sum\limits_{i \neq j=1}^{N} U_{ij} + \sum\limits_{i=1}^{N} U_i$ энергии взаимодействия образующих ее материальных точек между собой $\sum\limits_{i \neq j=1}^{N} U_{ij}$ и энергии взаимодействия с внешними телами $\sum\limits_{i=1}^{N} U_i$. Она определяется характером сил взаимодействия, конфигурацией системы и ее расположением относительно внешних тел.

7.7. Закон сохранения и изменения механической энергии

Полная механическая энергия системы – это энергия механического движения и взаимодействия, которая в случае консервативных сил равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + U.$$

Как и для отдельной материальной точки, можно показать, что:

- работа *A*, производимая при смещении материальных точек, равна приращению кинетической энергии системы $A = T - T_0$, где T_0 – начальное, а T – конечное значения кинетической энергии.
- работа *A* совершается за счет убыли ее потенциальной энергии $A = U_0 - U$, где U_0 – начальное, а U – конечное значения потенциальной энергий.

Отсюда следует равенство $T + U = T_0 + U_0$ или, в более общей форме, $T + U = \mathrm{const}$, которое представляет собой математическую формулировку *закона сохранения энергии механической системы*: *сумма кинетической и потенциальной энергий механической системы остается постоянной, если внешние и внутренние силы, действующие на образующие ее материальные точки, имеют консервативную природу.*

В консервативных механических системах могут происходить только превращения энергии из потенциальной формы в кинетическую и обратно, без изменения ее полного количества. Этот фундаментальный закон природы является следствием *однородности времени*. Под этим имеется в виду инвариантность физических законов относительно выбора начала отсчета времени.

Механическая энергия сохраняется не всегда. Но при достаточно тщательном анализе всегда удавалось показать, что уменьшение механической энергии сопровождается эквивалентным увеличением энергии другого вида. В этом проявляется свойство неуничтожимости движения материи. Таким образом, закон сохранения энергии имеет самый общий характер: *энергия не исчезает и не возникает, она лишь превращается из одной формы в другую*.

Например, в диссипативных системах, часть механической энергии теряется за счет ее превращения в тепло. Закон сохранения механической энергия нарушается. Однако обобщенный с учетом тепловой энергии, в которую превращается «недостающая» часть механической энергии, закон сохранения энергии остается в силе.

7.8. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета

Законы динамики справедливы для инерциальных систем отсчета. Однако их можно сделать применимыми и для описания движений в неинерциальных системах отсчета, если ввести в рассмотрение так называемые *силы инерции*

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_{\text{со}},$$

где $\vec{a}_{\text{со}}$ – ускорение неинерциальной системы отсчета. Силы инерции с точки зрения наблюдателя, связанного с неинерциальной системой, являются фиктивными потому, что для них в отличие от «обычных» сил невозможно указать, действием каких именно других тел (на рассматриваемое тело) они обусловлены. Очевидно, по этой причине к силам инерции невозможно применить третий закон Ньютона (и его следствия).

Введение сил инерции позволяет записывать второй закон Ньютона (и его следствия) в обычной форме, только под действующей силой надо теперь понимать результирующую «обычных» сил и сил инерции:

$$\vec{F} + \vec{F}_i = m\vec{a},$$

где m – масса тела, $\vec{a}$ – его ускорение.

Силы инерции возникают как в прямолинейно движущихся, так и во вращающихся неинерциальных системах отсчета. В качестве примера рассмотрим тело, находящееся на вращающейся платформе (в неинерциальной системе). Благодаря трению оно будет вовлечено во вращение. При достаточно большой угловой скорости оно будет перемещаться в радиальном направлении от центра платформы. С точки зрения наблюдателя, связанного с платформой, перемещение тела относительно нее обусловлено так называемой центробежной силой инерции.

Ее не следует смешивать с «обычной» центробежной силой. Это силы различной природы, приложенные к разным объектам: центробежная сила инерции приложена к телу, а центробежная сила – к связи, удерживающей тело на криволинейном участке траектории.

Силы инерции и силы тяготения пропорциональны массе тела, на которое они действуют. Поэтому ускорение, сообщаемое телу каждой из этих сил, не зависит от массы тела. Отсюда следует, что ускоренное движение системы отсчета эквивалентно (по своему действию на тела) возникновению соответствующих сил тяготения. Это положение получило название принципа эквивалентности сил тяготения и инерции. Он положен Эйнштейном в основу *общей теории относительности*.

Контрольные вопросы

1. Приведите определения консервативной силы, потенциальной энергии и формулы связи между ними.

2. При каких условиях выполняется закон сохранения механической энергии?

3. Каковы особенности движения в поле центральной силы?

4. Применимы ли законы Ньютона в неинерциальных системах отсчета? Что такое центробежная сила инерции?

ЛЕКЦИЯ 8

8.1. Механика жидкостей и газов

Вспомним основные положения гидростатики. На тело, погруженное в жидкость или газ, действуют силы, распределенные по поверхности тела. Для их описания вводится физическая величина, называемая *давлением*. Давление определяется как отношение модуля силы $\vec{F}$, действующей перпендикулярно поверхности, к площади S этой поверхности $p = F/S$. В системе СИ давление измеряется в паскалях: 1 Па = 1 Н/м^2.

В середине XVII века Б. Паскаль эмпирически установил закон: *давление в жидкости или газе передается во всех направлениях одинаково и не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует.*

Для доказательства предположим, что плотность материала призмы (рис. 8.1) равна плотности жидкости. Тогда призма должна находиться в жидкости в состоянии безразличного равновесия. Это означает, что силы давления, действующие на грани призмы, должны быть уравновешены, что возможно только в том случае, если давления на поверхности граней одинаковы: $p_1 = p_2 = p_3 = p$.

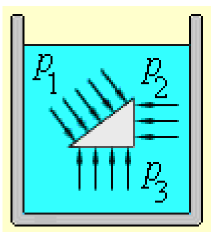


Рис. 8.1

Сила давления жидкости на дно цилиндрического сосуда высоты h и площади основания S равна весу столба жидкости mg, где $m = \rho hS$ – масса жидкости в сосуде, ρ – плотность жидкости. Следовательно, $p = \rho gh$, и, в соответствии с законом Паскаля, такое же давление на глубине h жидкость оказывает на боковые стенки сосуда. Давление столба жидкости ρgh называют *гидростатическим давлением*.

Действуя поршнем на жидкость, находящуюся в цилиндре, с некоторой внешней силой F, можно создавать в жидкости дополнительное давление

$$p_0 = F / S,$$

где S – площадь поршня. В соответствии с законом Паскаля оно передается во все направления одинаково, так что полное давление в жидкости на глубине h можно записать в виде

$$p = p_0 + \rho g h.$$

Если поршень убрать, то давление на поверхности жидкости будет равно атмосферному давлению $p_0 = p_{атм}$.

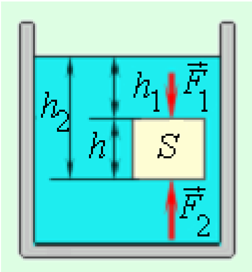


Рис. 8.2

Из-за разности давлений в жидкости на разных уровнях на тело, помещенное в жидкость, действует *выталкивающая* или *архимедова* сила. На рис. 8.2 тело в виде прямоугольного параллелепипеда высотой h и площадью основания S погружено в жидкость. Разность давлений на нижнюю и верхнюю грани равно

$$p_2 - p_1 = \rho g h.$$

Выталкивающая сила F_A будет направлена вверх, и ее модуль равен

$$F_A = F_2 - F_1 = S\Delta p = \rho g S h = \rho g V,$$

где V – объем вытесненной телом жидкости, а ρV – ее масса.

Архимедова сила, действующая на погруженное в жидкость (или газ) тело, равна весу жидкости (или газа), вытесненной телом. Это утверждение, называемое законом Архимеда, справедливо для тел любой формы.

8.2. Установившееся движение жидкости

Изменение объема жидкостей при сжатии пренебрежимо мало. Поэтому обычно можно считать, что они *несжимаемы*, т.е. их плотность постоянна. Движение жидкостей происходит под действием сил тяжести, разности давлений, сил внутреннего трения и т.д. Вследствие взаимодействия между молекулами движущихся с разными скоростями слоев, возникает внутреннее трение. Жидкости, в которых внутреннее трение велико, называются *вязкими*. Когда вязкость мала, часто используется модель *идеальной жидкости*, в которой внутренним трением пренебрегают. Законы движения жидкостей оказываются справедливы и для газов, если скорость их движения меньше звуковой.

8.3. Ламинарное течение

Различают два основных типа движения жидкости: ламинарное и турбулентное. Течение жидкостей при наличии внутреннего трения, но не сопровождающееся образованием вихрей, называется ламинарным. При ламинарном движении слои жидкости с трением скользят друг по другу, не перемешиваясь между собой. Внутреннее трение, возникающее вследствие взаимодействия между молекулами слоев, движущихся с разными скоростями, при определенных условиях способно привести к образованию вихрей. Наличие вихрей является наиболее характерным признаком турбулентного движения.

8.4. Уравнение неразрывности

Рассмотрим установившееся, или стационарное, течение, при котором гидро- или аэродинамические величины (давление, плотность, скорость течения и т.д.) в фиксированной точке не изменяются во времени $\partial/\partial t(...)=0$. При макроскопическом описании ламинарного течения жидкости используется понятие *линии тока*. Линии тока представляют собой линии, касательные к которым в любой точке совпадают по направлению с вектором скорости в этой же точке. В случае стационарного движения линии тока неподвижны и совпадают с траекториями частиц жидкости. Линии тока образуют *трубки тока*. Линия тока, проходящая через какую-либо точку, лежащую на поверхности трубки тока, целиком лежит на этой поверхности. При стационарном течении жидкости стенки трубки тока неподвижны. Поэтому выделенную трубку можно рассматривать независимо от остальной жидкости.

Предположим, что выделенная трубка тока настолько тонка, что в пределах ее поперечного сечения величина скорости неизменна. Тогда из стационарности следует, что количество вещества, проходящее через сечения S_1 и S_2, должно быть одинаковым, т.е. $\Delta m_1 = \Delta m_2$, т.е. $\rho_1 \upsilon_1 \Delta t S_1 = \rho_2 \upsilon_2 \Delta t S_2$. Отсюда следует *уравнение непрерывности*

$$\rho_1 \upsilon_1 S_1 = \rho_2 \upsilon_2 S_2.$$

Для несжимаемой жидкости, $\rho_1 = \rho_2$, оно имеет вид $\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2$, или в общем виде $\upsilon S = \text{const}$.

8.5. Уравнение Бернулли и его следствия. Динамическое давление

Воспользуемся тем, что при движении *идеальной жидкости* (то есть без внутреннего трения между движущимися слоями) выполняется *закон сохранения механической энергии*.

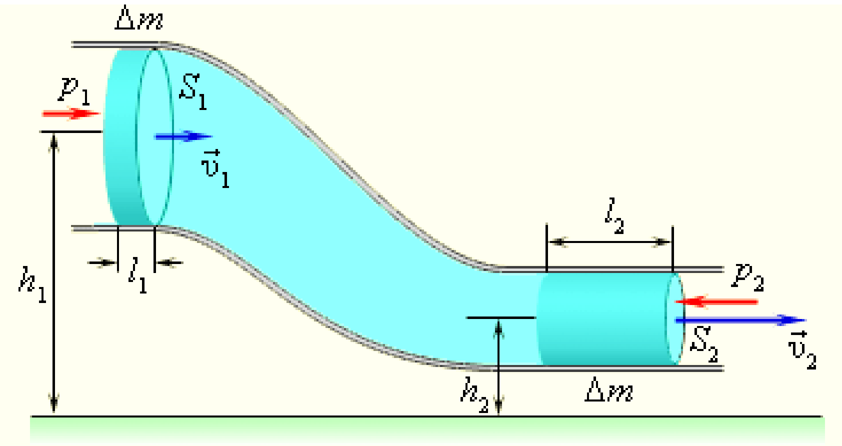


Рис. 8.3

За промежуток времени Δt жидкость в трубе (рис. 8.3) в области с сечением S_1 переместится на $l_1 = \upsilon_1 \Delta t$, а в области с сечением S_2 – на $l_2 = \upsilon_2 \Delta t$, где υ_1 и υ_2 – скорости частиц жидкости в соответствующих системах. Условие несжимаемости записывается в виде:

$$\Delta V = l_1 S_1 = l_2 S_2 \text{ или } \upsilon_1 S_1 = \upsilon_1 S_1.$$

Здесь ΔV – объем жидкости, протекшей через сечения S_1 и S_2. Таким образом, при переходе жидкости с участка трубы с большим сечением на участок с меньшим сечением скорость течения возрастает, то есть жидкость движется с ускорением. Следовательно, на жидкость действует сила. В горизонтальной трубе эта сила может возникнуть только из-за разности давлений в широком и узком участках трубы. Давление в широком участке трубы должно быть больше, чем в узком участке. Если участки трубы расположены на разной высоте, то ускорение жидкости вызывается совместным действием силы тяжести и силы давления. При перемещении жидкости силы давления совершают работу:

$$\Delta A = p_1S_1l_1 - p_2S_2l_2 = p_1S_1\upsilon_1\Delta t - \mathrm{p}_2\mathrm{S}_2\upsilon_2\Delta t = (p_1 - p_2)\Delta V.$$

Кинетическая и потенциальная энергии масс Δm_1 и Δm_2 равны:

$$E_{1\text{кин}} = \Delta m_1\upsilon_1^2/2 = \rho_1\upsilon_1^3\Delta tS_1/2;$$

$$E_{1\text{пот}} = \Delta m_1gh_1 = \rho_1\upsilon_1\Delta tS_1gh_1;$$

$$E_{2\text{кин}}= \Delta \mathrm{m}_2\upsilon_2^2/2 = \rho_2\upsilon_2^3\Delta tS_2/2;$$

$$E_{2\text{пот}} = \Delta m_2gh_2 = \rho_2\upsilon_2\Delta tS_2gh_2,$$

где h_1 и h_2 – высоты центров тяжести первого и второго элементов относительно выбранного уровня отсчета потенциальной энергии. На основании закона сохранения механической энергии можно записать:

$$E_{1\text{кин}} + E_{1\text{пот}} - E_{2\text{кин}} - E_{2\text{пот}} + (p_1 - p_2)\Delta V = 0.$$

Подставляя в это уравнение значения кинетических и потенциальных энергий и сокращая на ΔV (с учетом уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости), получаем уравнение Бернулли:

$$\rho_1\upsilon_1^2/2 + \rho_1gh_1 + p_1 = \rho_2\upsilon_2^2/2 + \rho_2gh_2 + p_2,$$

или в более общем виде

$$\rho\upsilon^2/2 + \rho gh + p = \text{const},$$

где p – статическое давление, обусловленное внешними силами, действующими на поверхность жидкости, ρgh – гидростатическое давление, определяемое потенциальной энергией жидкости, $\rho\upsilon^2/2$ – динамическое давление, определяемое кинетической энергией движущейся жидкости.

Из уравнения Бернулли следует, что *давление в жидкости, текущей по горизонтальной трубе переменного сечения, больше в тех сечениях потока, в* *которых скорость ее движения меньше,* и наоборот, давление меньше в тех сечениях, в которых скорость больше (рис. 8.4).

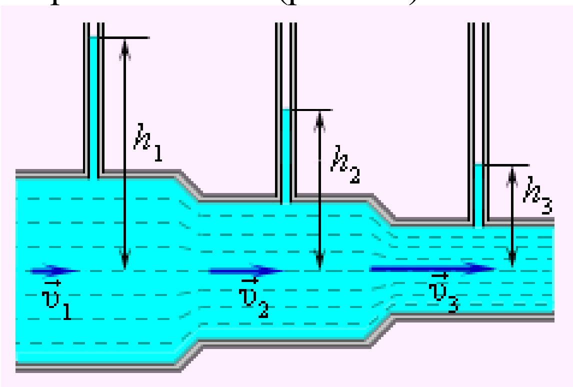


Рис. 8.4

Если сечение потока жидкости достаточно велико, то уравнение Бернулли следует применять к *линиям тока*, то есть линиям, вдоль которых перемещаются частицы жидкости при стационарном течении. Например, при истечении идеальной несжимаемой жидкости из отверстия в боковой стенке или дне широкого сосуда линии тока начинаются вблизи свободной поверхности жидкости и проходят через отверстие (рис. 8.5).

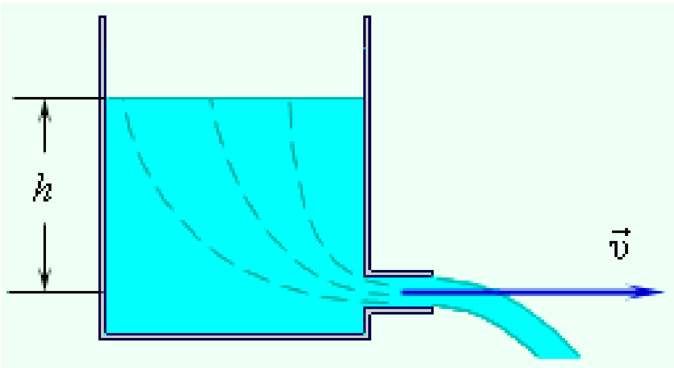


Рис. 8.5

Поскольку скорость жидкости вблизи поверхности в широком сосуде пренебрежимо мала, то уравнение Бернулли принимает вид:

$$\rho g h + p_0 = \rho\upsilon^2/2 + p_0,$$

где p_0 – атмосферное давление, h – перепад высоты вдоль линии тока.

Отсюда следует выражение

$$\upsilon = \sqrt{2gh},$$

для скорости истечения, которое называют *формулой Торричелли*.

Скорость истечения *идеальной* жидкости из отверстия в сосуде такая же, как и при свободном падении тела с высоты h без начальной скорости. Скорость истечения реальных жидкостей гораздо меньше

$$\upsilon = \mu\sqrt{2gh},$$

где μ – коэффициент истечения, характеризующий форму отверстия.

8.6. Течение жидкости по трубам. Закон Пуазейля

Для капилляра радиуса R и длины l сила трения между цилиндрическими слоями равна

$$F_{\text{тр}} = \eta\frac{d\upsilon}{dz}S,$$

где $S = 2\pi rl$, r – расстояние от оси капилляра.

Для установившегося потока со стационарным распределением скоростей $\upsilon(r)$ эта сила должна уравновешиваться силой, обусловленной перепадом давлений Δp, действующих на торцевые поверхности внутреннего цилиндра (рис. 8.6)

$$\eta\frac{d\upsilon}{dr}2\pi rl = -\Delta p\pi r^2.$$

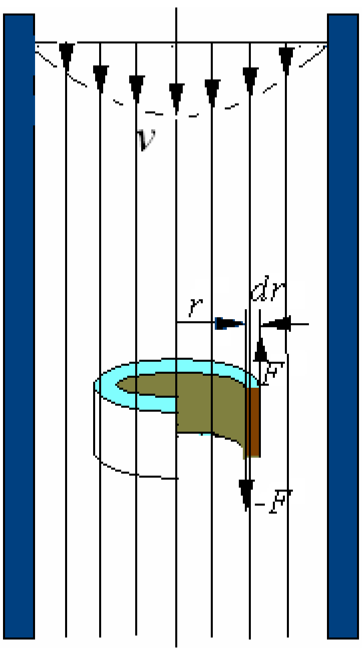


Рис. 8.6

Отсюда следует выражение для изменения скорости слоев при удалении от стенок капилляра $d\upsilon = -\dfrac{\Delta p}{2\eta l} r\,dr$, интегрирование которого дает

$$\upsilon = -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + C.$$

Постоянную интегрирования C находим из условия, что на стенках капилляра $r = R$ скорость равна нулю $\upsilon = 0$. Окончательно имеем для скорости

$$\upsilon = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right).$$

Объем V жидкости, протекающий по такому капилляру за время t, равен

$$V = \int_0^R \upsilon t\left(2\pi r\,dr\right) = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\Delta p}{l} t.$$

Эта формула Пуазейля дает возможность найти величину вязкости

$$\eta = \frac{\pi R^4}{8V}\frac{\Delta p}{l} t.$$

8.7. Понятие о турбулентном течении. Критерий Рейнольдса

Характер динамического режима определяется соотношением между кинетической энергией, сообщаемой жидкости, и той долей этой энергии, которая за счет работы сил вязкого трения переходит в энергию теплового движения. Если эта доля мала, то значительная часть кинетической энергии переходит в энергию крупномасштабных возмущений – вихрей. Проведем оценку величин, при которых это происходит, на примере обтекания шара вязкой жидкостью (рис. 8.7).

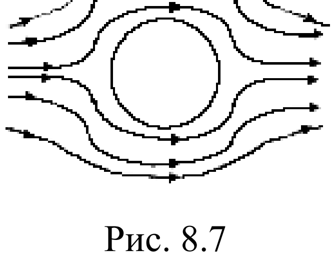


Рис. 8.7

Кинетическая энергия, сообщаемая жидкости при ее замещении шаром имеет порядок

$$E_{кин} = m\upsilon^2/2 \sim \rho_ж\, l^3\upsilon^2,$$

где l – линейные размеры шара, υ – его скорость, $\rho_ж$ – плотность жидкости.

Величина работы сил трения оценивается на основе выражения для силы трения в жидкости

$$F_{тр} = \eta\frac{d\upsilon}{dz}S\ ,$$

полученной Ньютоном. Для шара вид силы трения имеет наиболее простой вид

$$F_{тр} = 6\pi\eta r\upsilon,$$

где r – радиус шара, υ – его скорость, η – коэффициент вязкости.

Это выражение впервые получено Стоксом и известно как *формула Стокса.* В предположении, что $S\sim l^2$, а изменение скорости от υ до нуля происходит на расстоянии l, получаем

$$A_{тр}\sim F_{тр}l\sim\eta\upsilon l^2.$$

Их отношение, получившее название числа Рейнольдса, равно

$$\mathrm{Re} = E_{кин}/A_{тр} \sim \rho_ж\, l^3\upsilon^2/\eta\upsilon l^2 \sim \rho_ж l\upsilon/\eta.$$

Для течения в трубе или для течения, обтекающего тело, существуют некие критические (не равные друг другу!) значения $\mathrm{Re}_{кр}$, которые разделяют ламинарный (при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$) и турбулентный (при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$) режимы.

С увеличением скорости потока вязкой жидкости появляются поперечные ламинарным слоям компоненты скорости, возникают вихри. Возникновение вихрей приводит к эффективному росту поверхности между слоями, движущимися с разными скоростями, до тех пор, пока не установится баланс между получением механической энергии и ее превращением в тепло. Движение приобретает статистический характер. Его динамика определяется главным образом плотностью среды, но не вязкостью.

Сопротивление обтекания турбулентного течения, в отличие от ламинарного, пропорционально квадрату скорости, имеет вид

$$F_{\text{тр}} = CA\rho\upsilon^2/2$$

и называется сопротивлением давления или гидравлическим сопротивлением. Качественное объяснение этой зависимости можно дать на основании уравнения Бернулли (рис. 8.8)

$$p_0 + \frac{\rho\upsilon_n^2}{2} = p_0 + \Delta p = p_0 + \frac{\rho\bar{\upsilon}^2}{2}.$$

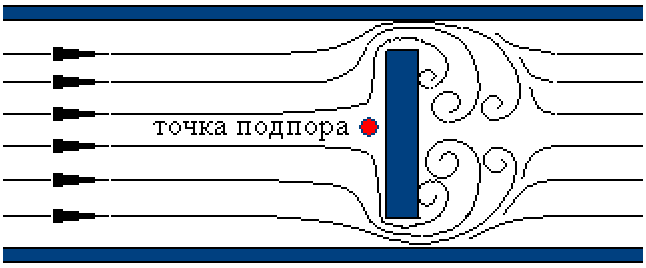
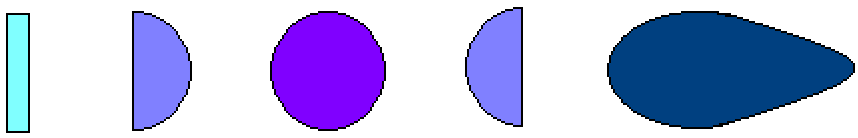


Рис. 8.8

Здесь левая часть равенства $p_0 + \frac{\rho\upsilon_n^2}{2}$ – характеризует область невозмущенного течения перед телом. Средняя часть равенства $p_0 + \Delta p$ соответствует «точке подпора» (рис. 8.8), непосредственно перед телом, где относительная скорость практически равна нулю. Наконец, правая часть равенства $p_0 + \frac{\rho\bar{\upsilon}^2}{2}$ характеризует область за движущимся телом, где средняя скорость практически совпадает со скоростью набегающего потока. Коэффициент сопротивления C существенно зависит от геометрии обтекаемого тела. На рис. 8.9 приведены значения C для тел разной формы.



1,17 1,17 0,47 0,42 0,04

Рис. 8.9

8.8. Основные закономерности гидроаэромеханики

Уравнение Бернулли можно применять для качественного анализа достаточно широкого класса задач аэродинамики, если наибольшие скорости в потоке малы по сравнению со скоростью звука в этом газе.

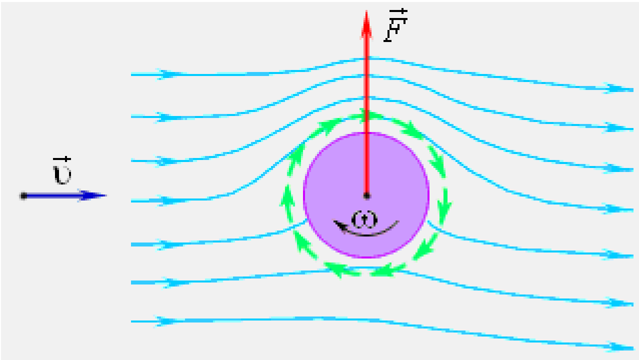


Рис. 8.10

Рассмотрим, например, вращающийся цилиндр в набегающем потоке воздуха (рис. 8.10). За счет вязкого трения поверхность вращающегося цилиндра увлекает прилегающие слои воздуха, вызывая его циркуляцию. В верхней части цилиндра скорость циркулирующего воздуха складывается со скоростью набегающего потока, в нижней части эти скорости направлены в противоположные стороны. В результате скорость воздушного потока над цилиндром оказывается больше, чем под цилиндром. В соответствии с уравнением Бернулли, давление в нижней части цилиндра будет больше, чем в верхней. В результате появляется подъемная сила. Это явление называется *эффектом Магнуса*. Эффект Магнуса проявляется, например, при полете закрученного мяча при игре в теннис или футбол.

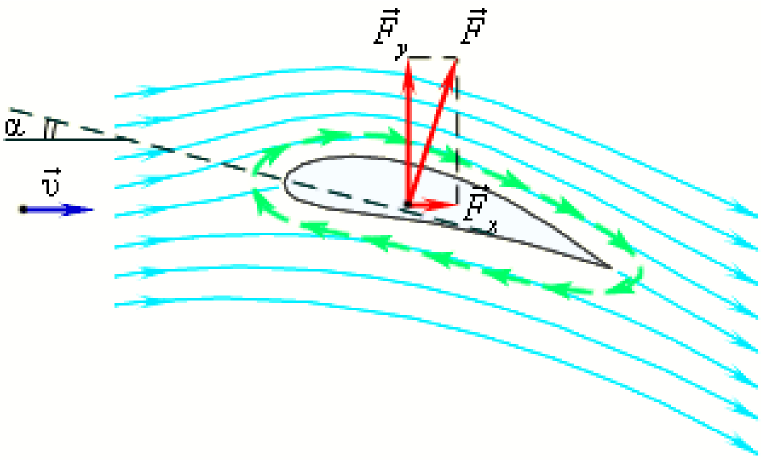


Рис. 8.11

Уравнение Бернулли позволяет дать качественное объяснение возникновению *подъемной силы* крыла. Н.Е. Жуковский показал, что существенную роль при обтекании крыла играют силы вязкого трения в поверхностном слое. В результате их действия возникает круговое движение