ЛЕКЦИЯ 1

ЗАКОН КУЛОНА. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Значение учения об электромагнетизме для инженеров

Все вещества состоят из заряженных частиц: электронов и ядер атомов. Электромагнитное взаимодействие между ними преобладает, т.к. гравитационные силы на много порядков слабее, а ядерные не простираются за пределы ядер. Именно электромагнитное взаимодействие лежит в основе микроскопических свойств вещества, объясняет его реакцию на внешние электрические и магнитные поля, может служить инструментом воздействия на различные среды в технологических процессах, позволяет осуществлять преобразование одних видов энергии в другие, лежит в основе передачи информации в пространстве, а также от одного элемента к другому в радиоэлектронной и вычислительной аппаратуре. Поэтому практически нет инженерной специальности, для которой знания в области электричества и магнетизма не относились бы к профессионально значимым. Более того, многие инженерные специальности возникли в результате непосредственного применения на практике тех или иных законов электродинамики: это электромеханика, энергетика, радиотехника, электроника и т.д. Для представителей таких специальностей раздел «Электричество и магнетизм» имеет особую профессиональную значимость.

Основу окружающего нас мира составляют две формы материи: вещество и поле. Наши ощущения лучше приспособлены для восприятия свойств вещества. Полевую форму материи мы познаем в основном через абстрактные физические теории. Теория электричества и магнетизма дает представление об одной из полевых форм материи – электромагнитном поле.

В разделе «Электричество и магнетизм» рассматриваются взаимодействия между зарядами, токами, электрическими и магнитными полями. Теория этого раздела называется классической макроскопической электродинамикой.

Электродинамика – это физическая теория электромагнитных явлений, в которых основную роль играют взаимодействия между заряженными частицами, осуществляемые посредством электромагнитного поля. Ее основные законы сформулированы Дж.Максвеллом (1864г.) в виде уравнений, которые носят его имя и установлены путем обобщения частных законов, полученных ранее на основе экспериментальных исследований.

Основным объектом изучения электродинамики является электромагнитное поле. По современным представлениям *электромагнитное поле* – есть особая форма материи, обеспечивающая взаимодействие между зарядами и токами. В истории развития физики имели место борьба двух теорий: дальнодействия и близкодействия. В теории дальнодействия принимается, что электрические явления определяются мгновенным взаимодействием зарядов на любых расстояниях. Согласно теории близкодействия, все электрические явления определяются изменениями полей зарядов, причем эти изменения распространяются со скоростью света. Победу одержала теория близкодействия, по которой взаимодействие между зарядами и токами передается электромагнитным полем от точки к точке с конечной скоростью.

Электростатика - раздел электродинамики, который изучает свойства и взаимодействие неподвижных электрических зарядов и создаваемых ими электрических полей.

1.1. Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда

Электрический заряд q – это физическая величина, которая характеризует свойство тел или частиц вступать в электромагнитные взаимодействия и определяет значения сил и энергий при таких взаимодействиях. Ему присущи следующие фундаментальные свойства:

1) электрический заряд существует в двух видах: отрицательные и положительные заряды;

2) электрический заряд дискретен;

3) алгебраическая сумма электрических зарядов замкнутой системы остается постоянной (*закон сохранения электрического заряда*);

4) электрический заряд - величина релятивистки инвариантная, т.е. не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от того, движется заряд или покоится.

Рассмотрим подробнее эти свойства.

1. Все тела в природе способны электризоваться, т.е. приобретать электрический заряд. *Электризация* – процесс сообщения телу электрического заряда. Существуют следующие способы электризации: а) *трением* (происходит соприкосновение двух различных тел, обладающих контактной разностью потенциалов, в результате чего на поверхности одного тела оказывается положительный заряд, а другого – отрицательный); б) *заряжением через влияние* или электростатической индукцией (тела заряжаются, когда они находятся на некотором расстоянии от заряженного

тела и их разделяют друг от друга во внешнем поле); в) *нагреванием*; г) *химическим путем*; д) *воздействием на тело светом* или электромагнитным волнами**.**

Элементарные заряды. В состав любого вещества входят положительно заряженные частицы – протоны и отрицательно заряженные элементарные частицы – электроны.

Электрон (е) $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-9}$ Кл $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

Протон (р) $q_p = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг

Взаимодействие электрических зарядов:

←○○→ одноименные заряды отталкиваются

●→←○ разноименные заряды притягиваются.

Заряд тел. Тело называется электрически нейтральным, если в теле одинаковое количество положительных и отрицательных зарядов, и они равномерно распределены по телу. *Зарядом тела* называют избыточный заряд, который и определяет собой электрические свойства заряженного тела: *отрицательный заряд* тела обусловлен избытком электронов над протонами, *положительный* – недостатком электронов. Таким образом, тело является заряженным, если оно содержит заряженных частиц одного знака больше, чем противоположного.

2. Опытным путем (1910 – 1914) американский физик Милликен показал, что электрический *заряд дискретен*, т.е. заряд любого тела составляет целое кратное от элементарного электрического заряда.

$$Q = nq_e \qquad (n = 1, 2, 3...)$$

3. *Закон сохранения электрического заряда* утверждает: электрические заряды не возникают и не исчезают, они могут быть лишь переданы от одного тела другому или перемещены внутри данного тела. Это фундаментальный закон природы, экспериментально подтвержденный в 1843 году английским физиком М. Фарадеем

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \text{const}$$

или

$$q_1 + q_2 + q_3 + ... = \text{const},$$

т.е. алгебраическая сумма зарядов замкнутой системы (системы, не обменивающейся зарядами с внешними телами) остается постоянной.

В зависимости от концентрации свободных, не связанных с отдельным атомом зарядов тела делятся на: *проводники, диэлектрики* и *полупроводники*.

Проводники – тела, в которых электрический заряд может перемещаться по всему объему тела. Проводники делятся на две группы:

1) проводники I рода (металлы) – перенос в них зарядов (свободных электронов) не сопровождается химическими превращениями;

2) проводники II рода (соли, растворы кислот) – перенос в них зарядов (положительных и отрицательных ионов) ведет к химическим изменениям.

Диэлектрики (стекло, пластмассы) – тела, в которых практически отсутствуют свободные заряды.

Полупроводники (германий, кремний) – занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками.

Указанное деление тел является весьма условным, однако, различие в концентрации свободных зарядов обусловливает огромное качественное различие в поведении этих тел.

Единица электрического заряда – Кулон (Кл) – это электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока в 1 ампер за 1 секунду.

1.2. Взаимодействие зарядов. Закон Кулона

Введем понятие «точечного заряда». *Точечным* называется заряд, сосредоточенный на теле, линейные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, с которыми он взаимодействует. Понятие точечного заряда, как материальной точки является физической абстракцией.

Сила взаимодействия неподвижных точечных электрических зарядов подчиняется закону электростатического взаимодействия, который был установлен Ш. Кулоном в 1785 году экспериментальным путем с помощью крутильных весов. Кулон установил, что сила взаимодействия между двумя небольшими зараженными металлическими шариками обратно пропорциональна квадрату расстояния **r** между ними и зависит от величины их зарядов q_1 и q_2.

Итак, *закон Кулона* утверждает: сила взаимодействия *F* между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними. Этот закон можно записать в виде:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad (1)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. В СИ $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, где величина ε_0 – электрическая постоянная. Она относится к числу фундаментальных физических постоянных: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м или Кл^2/н$\cdot$м^2. (Фарад (Ф)– единица электроемкости.) Тогда численное значение коэффициента $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

Кулон экспериментально установил, что силы, действующие на заряды, являются центральными, т.е. они направлены вдоль прямой, соединяющей заряды (рис. 1.1).

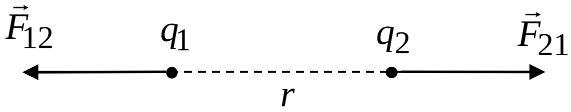


Рис. 1.1

Для одноименных зарядов ($q_1 > 0$ и $q_2 > 0$ или $q_1 < 0$ и $q_2 < 0$) произведение $q_1 q_2 > 0$, поэтому в формуле (1) сила F > 0 соответствует случаю взаимного отталкивания одноименных зарядов, а сила F < 0 – случаю взаимного притяжения разноименных зарядов.

Закон Кулона (1) можно записать в векторной форме. Сила $\vec{F}_{12}$, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 равна:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}_{21}}{r},$$

где $\vec{r}_{21}$ - радиус вектор, соединяющий заряд q_1 с зарядом q_2, $r = |\vec{r}_{21}|$.

Сила $\vec{F}_{21}$, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 равна:

$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r},$$

где $\vec{r}_{12}$ - радиус вектор, соединяющий заряд q_1с зарядом q_2 , $|\vec{r}_{21}| = -|\vec{r}_{12}|$.

Таким образом, кулоновские силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ подчиняются третьему закону Ньютона:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Кулон изучал взаимодействие между зарядами, находящимися в воздухе. Дальнейшие экспериментальные исследования показали, что при прочих равных условиях, сила электростатического взаимодействия между двумя точечными зарядами зависит от свойств среды, в которой эти заряды находятся. Поэтому ввели безразмерную величину ε, характеризующую электрические свойства среды - относительную диэлектрическую проницаемость (ε) среды. Она не зависит от выбора системы единиц и считается равной 1 для вакуума. *Относительная диэлектрическая проницаемость* (ε) *среды* показывает, во сколько раз в данной среде сила взаимодействия между двумя точечными зарядами q_1 и q_2, находящимися друг от друга на расстоянии r, меньше, чем в вакууме. Тогда, с учетом этого формула (1) примет вид:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}. \qquad (2)$$

Такая форма записи закона Кулона общепринята в электротехнике и называется рационализированной. В векторной форме закон Кулона запишется:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \qquad (3)$$

1.3. Электрическое поле. Напряженность поля, силовые линии

Пространство, в котором находится электрический заряд, обладает определенными свойствами: в нем существует *силовое электрическое поле,* которое осуществляет взаимодействие между неподвижными электрическими точечными зарядами, причем, взаимодействие осуществляется не мгновенно, а распространяется в вакууме со скоростью света. Таким образом, *электрическое поле* – это особый вид материи, неразрывно связанный с электрическими зарядами и передающий действия одних зарядов на другие. *Электростатическое поле* – поле, созданное неподвижными электрическими зарядами.

Для обнаружения и опытного исследования электростатического поля используется *пробный точечный положительный заряд* – такой заряд, который не искажает исследуемое поле. Он достаточно мал и не вызывает перераспределения зарядов, создающих поле. Он не участвует в создании поля, которое с его помощью измеряется.

Итак, если в поле, создаваемое зарядом q поместить пробный заряд q_0, то на него действует кулоновская сила F, различная по величине в разных точках поля и, согласно закону Кулона, пропорциональная пробному заряду q_0. Следовательно, эта сила не может служить характеристикой самого поля. Для характеристики электрического поля вводится физическая величина, называемая напряженностью этого поля.

Напряженностью электростатического поля в какой-либо точке называется вектор $\vec{E}$, численно равный силе, с которой это поле действует на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку и направленный в сторону действия силы.

Таким образом, если на пробный точечный заряд q_0 поле действует с силой $\vec{F}$, то согласно определению, напряженность $\vec{E}$ этого поля равна:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \tag{4}$$

Напряженность поля точечного электрического заряда q. Найдем выражение для напряженности поля точечного электрического заряда q в точке, находящейся на расстоянии r от него. Полагая в законе Кулона (3), что $q_1 = q$ – это заряд, создающий электростатическое поле, а $q_2 = q_0$ – это пробный заряд и учитывая, что сила $\vec{F}$, действующая на пробный заряд q_0, равна

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ - радиус вектор, соединяющий заряд q с q_0, по формуле (4), найдем напряженность поля точечного заряда q:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{qq_0}{q_0 r^2 r}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{5}$$

В скалярной форме величина напряженности электростатического поля определяется выражением:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}. \tag{6}$$

Численное значение напряженности электростатического поля E прямо пропорционально величине заряда q и обратно пропорционально квадрату расстояния от рассматриваемой точки поля до заряда.

Из формулы (5) следует, что направление вектора $\vec{E}$ совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд. Если поле создается положительным зарядом, то вектор $\vec{E}$ направлен вдоль радиус вектора, соединяющего заряд и данную точку от заряда (отталкивание пробного положительного заряда). Если поле создается отрицательным зарядом, то вектор $\vec{E}$ направлен к заряду (рис. 1.2).

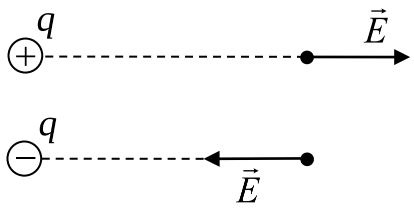


Рис. 1.2

Из формулы (4) также следует, что *единица напряженности электростатического поля* – [Н/Кл]. 1 Н/Кл – напряженность такого поля, которое на точечный заряд в 1 Кл действует с силой в 1 Н. Кроме того 1 Н/Кл = 1 В/м.

*Графическое изображение электростатических полей***.** Графически электростатическое поле изображают с помощью силовых линий или линий напряженности. *Линии напряженности* – это кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\vec{E}$. Так как в каждой точке пространства вектор напряженности $\vec{E}$ имеет лишь одно направление, то линии напряженности никогда не пересекаются (рис. 1.3). Линиям напряженности приписывается направление, совпадающее с направлением вектора напряженности.

Для однородного поля (когда вектор $\vec{E}$ в любой точке постоянен по величине и направлению $\vec{E} = \mathrm{const}$) линии напряженности параллельны друг другу и вектору $\vec{E}$.

Если поле создается точечным зарядом, то линии напряженности – это радиальные прямые, исходящие из заряда, если он положителен. Линии входят в заряд, если он отрицательный. В пространстве, где зарядов нет, они непрерывны. Вследствие большой наглядности графический способ представления электростатического поля широко применяется в электротехнике.

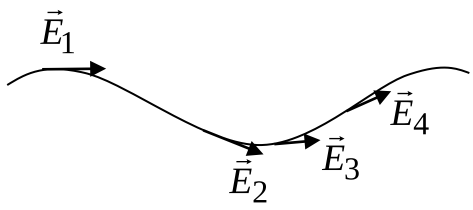
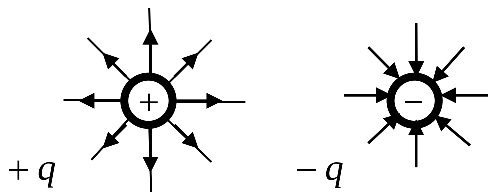


Рис. 1.3

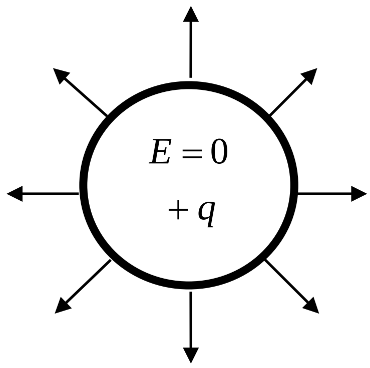
Свойства линий напряженности. Линии напряженности (силовые линии) электростатического поля - незамкнутые линии: начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных или на бесконечности, нигде не пересекаются и не прерываются. Густота линий напряженности характеризует значение напряженности электростатического поля: число линий напряженности, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряженности, должно быть равно модулю вектора $\vec{E}$. Приведем примеры некоторых электростатических полей.

Центральная симметрия

Поле уединенных точечных зарядов

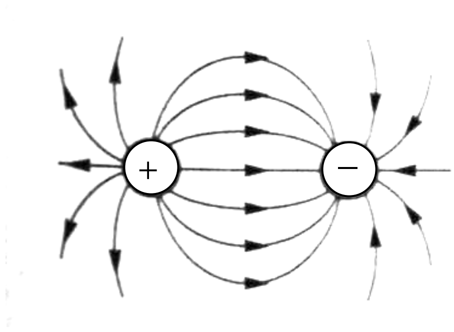


Поле шара



Осевая симметрия

Поле диполя



Принцип суперпозиции электростатических полей. Основная задача электростатики: по заданным распределению в пространстве и величине электрических зарядов – найти величину и направление вектора напряженности $\vec{E}$ в каждой точке поля.

Пусть поле создано системой неподвижных точечных зарядов q_1, q_2, q_3,... q_n. Опыт показывает, что к кулоновским силам применим принцип независимости действия сил, т.е. результирующая сила $\vec{F}$, действующая со стороны поля на пробный заряд q_0, равна векторной сумме сил, приложенных к нему со стороны каждого из зарядов q_i:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \,. \qquad (7)$$

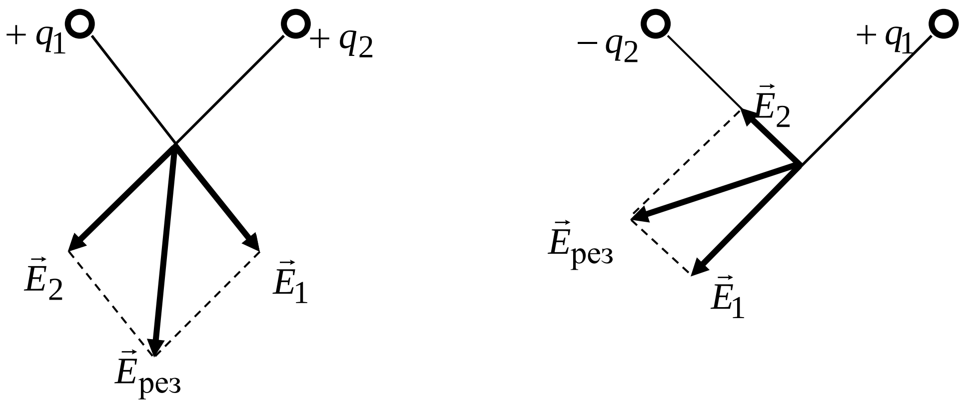
Из формулы (4) $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0}$ следует, что $\vec{F} = \vec{E}q_0$ и $\vec{F}_i = \vec{E}_i q_0$, где $\vec{E}$ - напряженность результирующего поля, $\vec{E}_i$ – напряженность поля, создаваемого одним зарядом q_i. Подставляя эти выражения в формулу(7) и сокращая на q_0, получим:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} \,. \qquad (8)$$

Эта формула выражает *принцип суперпозиции* (наложения) электростатических полей: напряженность $\vec{E}$ результирующего поля системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из этих зарядов в отдельности. Иными словами, результирующее поле можно найти простым наложением (суперпозицией) полей отдельных зарядов.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ...\vec{E}_m \,.$$

Приведем пример геометрического определения напряженности поля, созданного двумя зарядами:



Распределение зарядов. Для упрощения математических расчетов во многих случаях бывает удобно игнорировать тот факт, что заряды имеют дискретную структуру (электроны, ядра), и считать, что они «размазаны» определенным образом в пространстве. Другими словами, удобно заменить истинное распределение точечных дискретных зарядов фиктивным непрерывным распределением. Это позволяет значительно упростить расчеты, не внося сколько-нибудь значительной ошибки.

При переходе к непрерывному распределению вводят понятие о *плотности зарядов* – объемной ρ, поверхностной σ и линейной τ. По определению,

$$\rho = dq/dV\,;\quad \sigma = dq/dS\,;\quad \tau = dq/dl\,,$$

где dq – заряд, заключенный соответственно в объеме dV, поверхности dS и на длине dl. В случае непрерывного распределения зарядов в правой части формулы (8) вместо суммы берется интеграл. Например, если заряд распределен непрерывно по объему, надо заменить q_i на $dq = \rho dV$, и тогда приходим к выражению:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\frac{\rho dV}{r^2}, \tag{9}$$

где интегрирование проводится по всему пространству, в котором ρ отлично от 0.

Таким образом, зная распределение зарядов, мы можем полностью решить задачу о нахождении напряженности электрического поля по формуле (8), если распределение дискретно, и по формуле (9), если распределение непрерывно. Так *напряженность поля заряженной* нити: $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$, где τ – линейная плотность заряда, r – расстояние до заряженной нити. *Напряженность поля заряженной плоскости*: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$, где σ - поверхностная плотность заряда.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон сохранения электрического заряда.
2. Является ли электрический заряд релятивистски инвариантным? Что это означает?
3. Что называется точечным зарядом, пробным зарядом? Какова величина элементарного заряда?
4. Что называется электрическим полем? В чем смысл теории близко- и дальнодействия?
5. Какое поле называется электростатическим?
6. Напишите и сформулируйте закон Кулона. Что такое относительная диэлектрическая проницаемость среды?
7. Что называется напряженностью электростатического поля? Чему равна напряженность поля точечного заряда?
8. В чем состоит принцип суперпозиции электрических полей?
9. Что называется силовыми линиями электрического поля? Перечислите их свойства. Изобразите графически электростатическое поле точечного заряда, поле шара, поле диполя.
10. Что называется поверхностной плотностью, линейной плотностью, объемной плотностью заряда?

ЛЕКЦИЯ 2

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ВАКУУМЕ

2.1. Электрический диполь

Электрический диполь - это система двух равных по величине, но противоположных по знаку точечных зарядов $+q$ и $-q$, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния r до тех точек, в которых определяется поле системы (рис. 2.1).

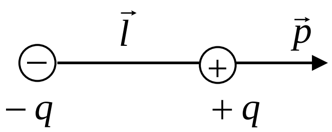


Рис. 2.1

Оказывается, что молекулы диэлектриков по своим электрическим свойствам подобны диполям. Поэтому изучение поля диполя представляет большой практический интерес. Введем некоторые определения.

Плечом диполя называется вектор l, направленный по оси диполя (прямой, проходящей через оба заряда) от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между ними. Главной характеристикой диполя является электрический дипольный момент

$$\vec{p} = q\vec{l} \; .$$

Электрическим моментом диполя или *дипольным моментом* называется вектор $\vec{p} = q\vec{l}$, совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению заряда q на плечо l.

Вид силовых линий электрического поля $\vec{E}$ в точках, находящихся на некотором расстоянии $r >> l$ от диполя, представлен на рис. 2.2.

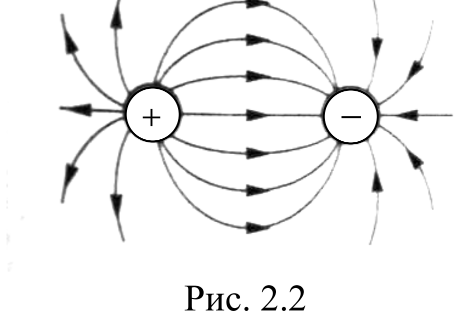


Рис. 2.2

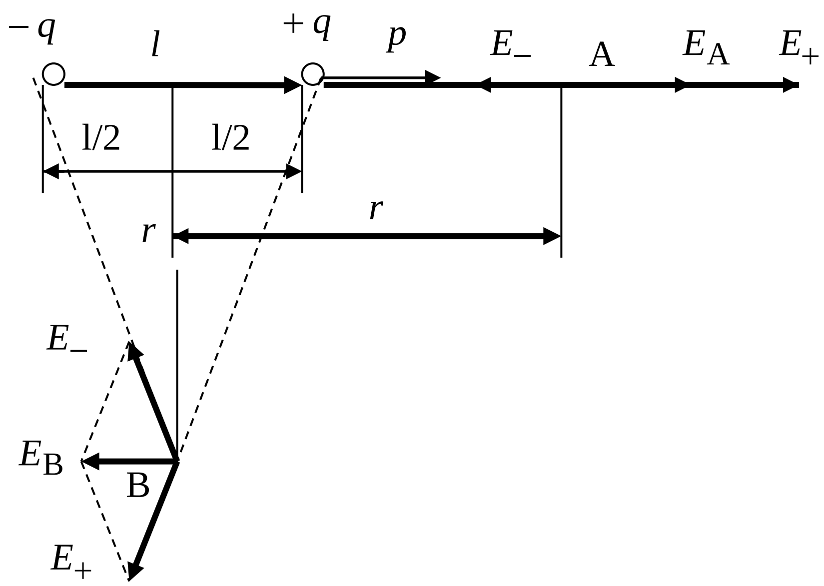
Расчет поля диполя в произвольной точке.

В соответствии с принципом суперпозиции полей, напряженность E в произвольной точке поля диполя равна:

$$E = E_{+} + E_{-},$$

где $E_{+} + E_{-}$ - напряженности полей зарядов $+q$ и $-q$. Воспользуемся этой формулой и рассчитаем напряженность поля в произвольной точке на оси диполя и на перпендикуляре к середине его оси.

1. Напряженность поля на продолжении оси диполя в точке А.



Если точка А расположена на оси диполя, то векторы $E_{+} + E_{-}$ направлены также вдоль этой оси, но в противоположные стороны. На основании формулы

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

для вакуума можно записать:

$$E_{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(r - l/2)^2} - \frac{q}{(r + l/2)^2}\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2r\cdot l}{\left(r^2 - l^2/4\right)^2} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2r\cdot q\cdot l}{r^4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2p}{r^3}. \quad (1)$$

Поскольку расстояние r во много раз больше длины диполя ($r >> l$), то слагаемым $l^2/4$ по сравнению с r^2 можно пренебречь.

2. Напряженность поля диполя в точке В на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины.

Точка В равноудалена от зарядов $+q$ и $-q$. Поэтому

$$|E_+| = |E_-| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}, \tag{2}$$

где r – расстояние от точки В до середины плеча диполя. Из подобия треугольников, опирающихся на плечо диполя и вектор $E_{\text{В}}$, получим:

$$\frac{E_{\text{В}}}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}} \approx \frac{l}{r},$$

откуда

$$E_{\text{В}} = E_+ \, l/r. \tag{3}$$

Подставив в выражение (3) значение (2), получим:

$$E_{\text{В}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}. \tag{4}$$

Вектор $E_{\text{В}}$ имеет направление, противоположное вектору электрического момента диполя.

Вывод: таким образом, напряженность электрического поля $\vec{E}$ на оси диполя параллельна дипольному моменту $\vec{p}$, а в точках прямой, проходящей через центр диполя и перпендикулярной его оси, напряженность электрического поля $\vec{E}$ антипараллельна $\vec{p}$.

Без вывода можно дать формулу для напряженности поля диполя в произвольной точке:

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}.$$

Заметим, что характерным для напряженности поля диполя является то обстоятельство, что она убывает с расстоянием от диполя как $1/r^3$, т.е. быстрее, чем напряженность поля точечного заряда (убывающая как $1/r^2$).

Теперь рассмотрим поведение диполя во внешнем однородном электрическом поле (рис. 2.3).

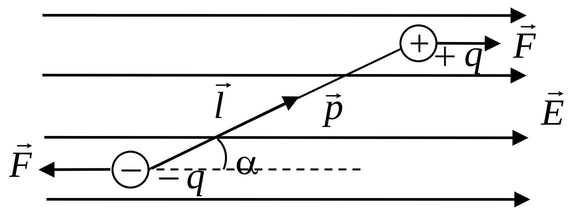


Рис. 2.3

Поле $\vec{E}$ действует на заряды с силой, определяемой формулой

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

поэтому действующая на положительный заряд сила направлена в ту же сторону, что и вектор E, а сила, действующая на отрицательный заряд, направлена в противоположную сторону. Эти силы образуют пару, плечо которой равно $l\sin\alpha$, т.е. зависит от ориентации диполя относительно поля. Момент пары сил

$$M = qEl\sin\alpha = pE\sin\alpha,$$

$$M = [\vec{p}\vec{E}]$$

стремится повернуть диполь так, чтобы его дипольный электрический момент $\vec{p}$ установился по направлению поля. Кроме того, эта пара сил приводит к растяжению диполя, если диполь не является жестким, и расстояние l может меняться.

В неоднородном электрическом поле на диполь, кроме вращательного момента M действует результирующая сила

$$\vec{F}_x = \frac{p\partial E}{\partial x}\cos\alpha,$$

под действием которой диполь будет выживаться в область более сильного поля.

2.2. Поток вектора напряженности. Теорема Остроградского-Гаусса

Чтобы *линии напряженности* характеризовали не только направление, но и значение напряженности электростатического поля, их проводят с определенной густотой: число линий напряженности, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряженности, должно быть равно модулю E (рис. 2.4).

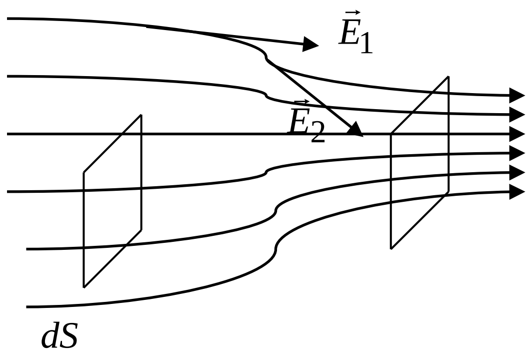


Рис. 2.4

Для однородного поля и плоской поверхности число линий напряженности, пронизывающих площадку S, пропорционально величине площадки S и зависит от угла α между нормалью n к площадке и вектором E (рис. 2.5).

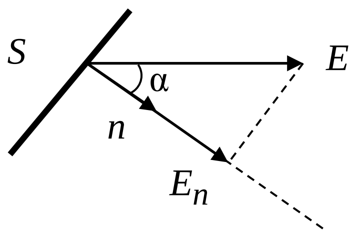


Рис. 2.5

Величина

$$\Phi_E = E_n S = ES\cos\alpha = \vec{E}d\vec{S} \qquad (5)$$

называется *потоком вектора напряженности* через площадку S. Здесь $E_n = E\cos\alpha$ – проекция вектора E на нормаль к поверхности. $\vec{S} = S\vec{n}$ - вектор, модуль которого равен S, а направление совпадает с направлением $\vec{n}$ к площадке.

Единица потока вектора напряженности электростатического поля – $1\,В \cdot м$. $1\,В \cdot м$ равен потоку напряженности сквозь поверхность $1\,м^2$, перпендикулярную линиям напряженности поля напряженностью $1\,В/м$.

В общем случае поверхность S может иметь любую форму, а векторы $\vec{E}$ в различных ее точках могут отличаться как по модулю, так и по направлению. Однако в пределах каждого достаточно малого элемента dS поверхности ее можно считать плоской, а поле – однородным. Поэтому элементарный поток $d\Phi_E$ сквозь участок поверхности площадью dS равен:

$$d\Phi_E = EdS\cos\alpha .$$

Полный поток Φ_E сквозь произвольную поверхность S найдем в результате суммирования (интегрирования) всех элементарных потоков

$$\Phi_E = \int_S EdS\cos\alpha = \int_S \vec{E}d\vec{S} .$$

Поток вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность S. Для произвольной замкнутой поверхности *S поток вектора E* сквозь эту поверхность равен

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E_n dS . \qquad (6)$$

Интеграл берется по замкнутой поверхности *S*. Для замкнутых поверхностей *за положительное направление нормали принимается нормаль, направленная наружу от области, охватываемой этой поверхностью*. Поток вектора *E* – скалярная величина (зависит от конфигурации поля и от направления нормали).

Теорема Остроградского-Гаусса для электростатического поля в вакууме. Вычисление напряженности электростатического поля с помощью принципа суперпозиции можно значительно упростить, используя выведенную немецким ученым К.Гауссом (1777-1855), теорему Гаусса, определяющую поток вектора напряженности электрического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность.

Рассмотрим поток вектора *E* сквозь сферическую поверхность радиуса *r*, охватывающую точечный заряд *Q* (рис. 2.6).

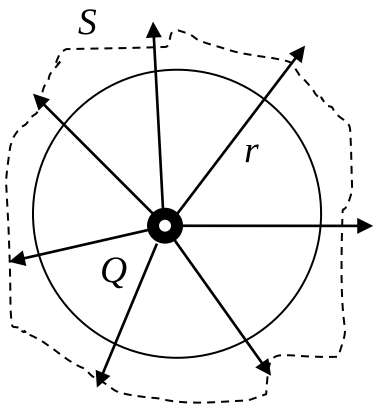


Рис. 2.6

В соответствии с формулой (6) поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность радиуса *r*, охватывающую точечный заряд *Q*, находящийся в ее центре, равен:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \int dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \qquad (7)$$

Этот результат справедлив для замкнутой поверхности любой формы. Так, если окружить сферу произвольной замкнутой поверхностью, то каждая линия напряженности, пронизывающая сферу пройдет и через поверхность.

Поток вектора E сквозь произвольную замкнутую поверхность, окружающую n зарядов (поле, создаваемое системой точечных зарядов)

Согласно принципу суперпозиции $\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$, поэтому

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \oint_S (\sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i) dS = \sum_{i=1}^{N} \oint_S \vec{E}_i d\vec{S}. \qquad (8)$$

Интеграл суммы равен сумме интегралов, и каждый из интегралов, стоящий под знаком $\sum$ равен Q/ε_0 , поэтому

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} Q_i, \qquad (9)$$

E – напряженность поля, создаваемого всеми зарядами;
E_i – напряженность поля, создаваемого зарядом Q_i ;

E_n – проекция вектора напряженности на направление нормали;

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная.

Формула (9) выражает теорему Остроградского-Гаусса для электростатического поля в вакууме:

Теорема Гаусса (в случае дискретного распределения зарядов). Поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на электрическую постоянную ε_0.

Теорема выведена математиком Остроградским М.В. (1801-1862) и независимо от него немецким ученым К. Гауссом. Теорема позволяет значительно упростить расчет полей в вакууме.

Ранее мы вводили объемную плотность заряда $\rho = \dfrac{dQ}{dV}$ - физическую величину, определяемую зарядом, приходящимся на единицу объема. Суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности *S*, охватывающей некоторый объем *V*:

$$\sum_i Q_i = \int_V \rho dV. \qquad (10)$$

С учетом этого теорему Гаусса можно записать:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV. \qquad (11)$$

Теорема Гаусса (в случае непрерывного распределения зарядов). Поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен заряду, заключенному в объеме, ограниченном этой поверхностью, деленному на ε_0.

2.3. Применение теоремы Гаусса к расчету полей в вакууме

1. *Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.*

Бесконечная плоскость заряжена с поверхностной плотностью

$$\sigma = \frac{dQ}{dS},$$

где σ – заряд, приходящийся на единицу поверхности). Линии напряженности перпендикулярны плоскости и направлены в обе стороны от нее. В качестве замкнутой поверхности мысленно построим цилиндр, основания которого параллельны заряженной плоскости (рис. 2.7).

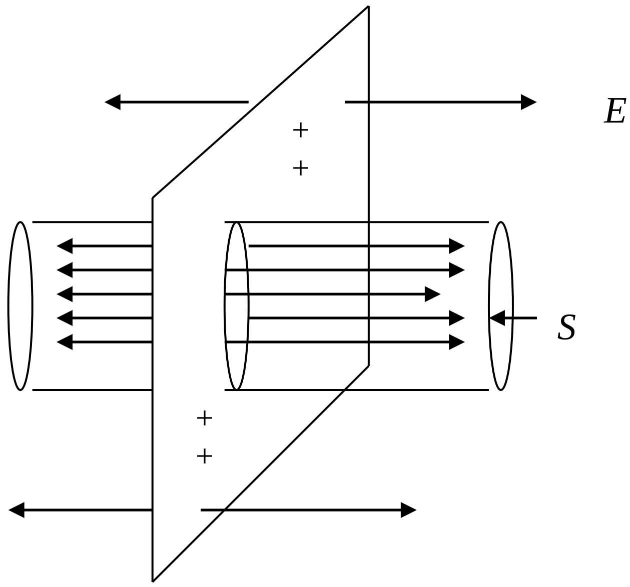


Рис. 2.7

Полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков через его основания, т.е. равен:

$$\Phi_E = 2ES.$$

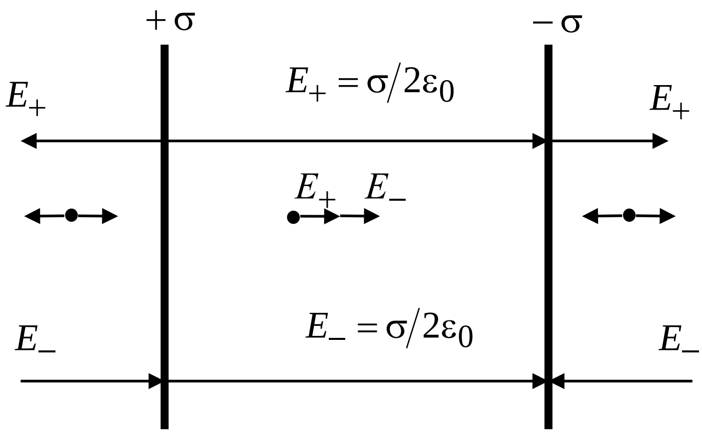
Согласно теореме Гаусса,

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},$$

следовательно, напряженность поля равномерно заряженной бесконечной плоскости:

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0 2S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

2. *Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей.*



Плоскости заряжены с поверхностной плотностью $+\sigma$ и $-\sigma$. Поле таких плоскостей найдем как суперпозицию полей, создаваемых каждой плоскостью. На рисунке верхние стрелки соответствуют полю от положительно заряженной плоскости, нижние – от отрицательной. Слева и справа от плоскости E = 0 (поля вычитаются, линии вектора E направлены навстречу друг другу). В области между плоскостями

$$E = E_+ + E_-,$$

т.е. $E = \sigma/\varepsilon_0$ – *поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей.*

3. *Поле равномерно заряженной сферической поверхности* (рис. 2.8).

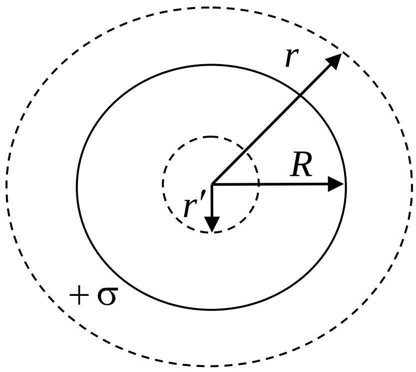


Рис. 2.8

Сферическая поверхность радиуса R общим зарядом Q заряжена равномерно с поверхностной плотностью σ. Поле сферически симметричное, линии напряженности направлены радиально. Построим мысленно сферу радиуса r, имеющую общий центр с заряженной сферой.

Если $r \ge R$, то внутрь поверхности попадает весь заряд Q, создающий рассматриваемое поле и по теореме Гаусса

$$\Phi_E = ES = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad (r \ge R).$$

При $r > R$ поле убывает с расстоянием r по такому же закону, что и поле точечного заряда. Если $r < R$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферической поверхности E = 0 ($r' \le R$).

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad (r \ge R)$$

поле равномерно заряженной сферической поверхности E = 0 ($r' \le R$) (рис. 2.9).

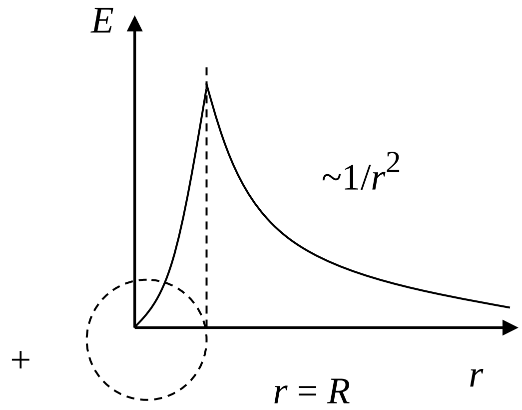


Рис. 2.9

4. *Поле объемнозаряженного шара*. Шар радиуса R с общим зарядом Q заряжен равномерно с объемной плотностью

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Для напряженности поля *вне* шара, получится тот же результат, что и в предыдущем случае при ($r \ge R$)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Внутри шара напряженность другая. Сфера радиуса $r' < R$ охватывает заряд

$$Q' = \frac{4}{3}\pi r'^3 \rho.$$

Согласно теореме Гаусса и учитывая, что

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3},$$

получаем

$$\Phi_E = ES = 4\pi r'^2 E = \frac{Q'}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi r'^3 \rho = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\frac{\pi r'^3 Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R^3}r',$$

т.е. линейно возрастет до значения

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2},$$

затем убывает.

5. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра

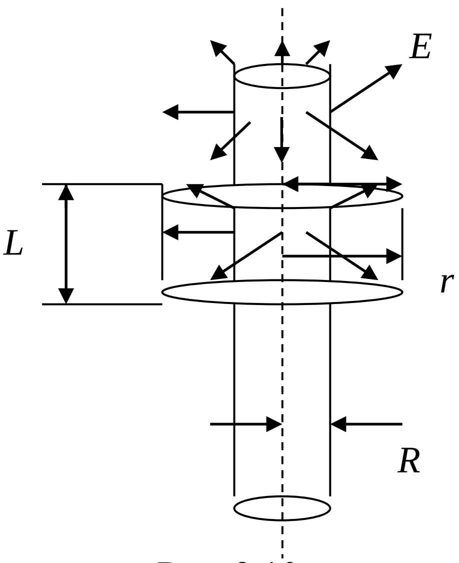


Рис. 2.10

Бесконечный цилиндр радиуса R заряжен равномерно с линейной плотностью τ (рис. 2.10)

$$\tau = \frac{dQ}{dl}.$$

Линии напряженности будут направлены по радиусам круговых сечений цилиндра с одинаковой густотой во все стороны относительно оси цилиндра. В качестве замкнутой поверхности мысленно построим, коаксиальный с заряженным цилиндр радиуса r и высотой l. Поток вектора E сквозь торцы цилиндра равен 0 (торцы параллельны линиям напряженности), а сквозь боковую поверхность

$$\Phi_E = E 2\pi r l.$$

По теореме Гаусса при $r > R$ имеем:

$$\Phi_E = E 2\pi R l = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\tau l}{\varepsilon_0},$$

следовательно, *поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити):*

$$E = \frac{\tau l}{\varepsilon_0 2\pi R l} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r},$$

при $r > R$.

Если $r < R$, то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому в этой области $E = 0$.

Контрольные вопросы

1. Что называется электрическим диполем?
2. Почему изучение поля диполя представляет большой практический интерес?
3. Что называется электрическим моментом диполя (дипольным моментом). Что называется плечом диполя?
4. Определите напряженность электрического поля диполя в точке, расположенной на продолжении оси диполя.
5. Определите напряженность электрического поля диполя в точке, расположенной на перпендикуляре, восстановленном к оси из его середины.
6. Определите механический (вращающий) момент, действующий на диполь, помещенный в однородное электрическое поле.
7. Что называется потоком вектора напряженности? Напишите и сформулируйте электростатическую теорему Гаусса.
8. Как определяется напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженной плоскостью?
9. Как определяется напряженность электрического поля, создаваемого двумя параллельными разноименно заряженными плоскостями?
10. Как определяется напряженность электрического поля, создаваемого сферической поверхностью?
11. Как определяется напряженность электрического поля, создаваемого цилиндрической поверхностью?
12. Какое электрическое поле называется однородным?

ЛЕКЦИЯ 3

ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

3.1. Работа перемещения заряда в электростатическом поле

Перемещение пробного заряда Q_0 в поле точечного заряда Q происходит под действием сил электростатического поля. Работа силы F на элементарном перемещении dl равна (рис. 3.1):

$$dA = Fdl\cos\alpha ,$$

где F – Кулоновская сила. Так как

$$dl\cos\alpha = dr ,$$

$$dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q_o}{r^2}dl\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}dr . \qquad (1)$$

Работа при перемещении заряда Q_0 на конечном пути в поле заряда Q из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}(-\frac{1}{r})\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) . \qquad (2)$$

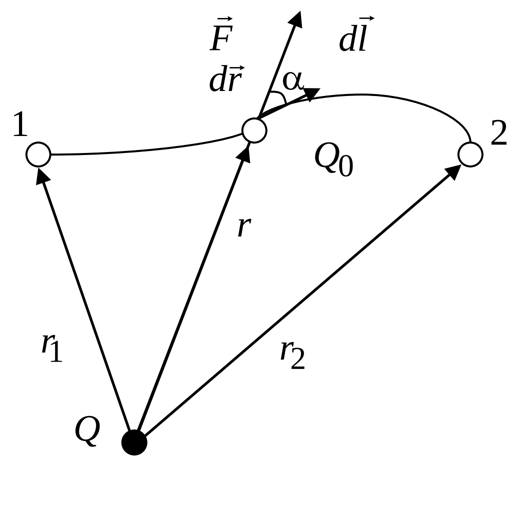


Рис. 3.1

Работа A_{12} не зависит от формы траектории, а определяется начальным и конечным положением заряда Q_0. Следовательно, электростатическое поле точечного заряда – потенциально, а сила Кулона – консервативная сила.

3.2. Теорема о циркуляции вектора напряженности

Элементарная работа сил поля по перемещению единичного заряда на пути *dl* равна:

$$dA = Fdl = q_0 Edl\,,$$

$$E = F/q_0\,.$$

Если $q_0 = +1$, то $F = E$, следовательно:

$$dA = \vec{E}d\vec{l} = Edl\cos\alpha = E_l dl\,, \tag{3}$$

где $E_1 = E\cos\alpha$ – проекция вектора E на направление элементарного перемещения dl.

Из формулы (2)

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}(-\frac{1}{r})\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

следует, что работа, совершаемая при перемещении электрического заряда во внешнем электростатическом поле по любому замкнутому пути L, равна 0:

$$\oint_L dA = 0\,.$$

С учетом формулы (3)

$$\oint_L dA = \oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0\,.$$

Интеграл

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L E_l dl$$

называется *циркуляцией вектора напряженности.* Интегрирование производится по любому замкнутому контуру (пути) L.

Теорема о циркуляции вектора E: Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна 0.

Физический смысл циркуляции вектора напряженности: это работа по перемещению единичного положительного заряда по замкнутому пути.

Вывод: линии напряженности электростатического поля не могут быть замкнутыми: они начинаются и заканчиваются на зарядах или уходят в бесконечность. Равенство циркуляции 0 означает, что электростатическое поле потенциально.

3.3. Потенциал электростатического поля

Работа электростатических сил совершается за счет убыли потенциальной энергии, которой обладал заряд q_0 в начальной и конечной точках поля заряда q:

$$A_{12} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = W_1 - W_2. \qquad (5)$$

Потенциальная энергия заряда q_0 в поле заряда q:

$$W = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + C. \qquad (6)$$

При $r \to \infty$, $W_\infty = 0$ и $C = 0$.

Итак: потенциальная энергия заряда q_0 в поле заряда q на расстоянии r от него:

$$W = \frac{qq_o}{4\pi\varepsilon_o r}. \qquad (7)$$

Отношение W/q_0 не зависит от заряда q_0 и является *энергетической характеристикой электростатического поля.*

$$\varphi = \frac{W}{q_0}. \qquad (8)$$

Потенциал электростатического поля – это скалярная физическая величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в данную точку поля.

Единица потенциала:

$$1\text{В} = 1\text{Дж}/\text{Кл}$$

1 вольт – потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж.

Потенциал поля точечного заряда:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{9}$$

r – расстояние от данной точки до заряда q, создающего поле, ε_0 – электрическая постоянная.

Принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей: если поле создается системой n точечных зарядов $q_1,\ q_2, \ldots q_n$, то потенциал поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей всех этих зарядов:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}. \tag{10}$$

Из формул (5), (8) и (9) следует, что работа совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2 может быть представлена в виде:

$$A_{12} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{11}$$

Работа по перемещению заряда q_0 равна произведению перемещаемого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках.

Таким образом, *разность потенциалов двух точек 1 и 2 в электростатическом поле определяется работой, совершаемой силами поля, при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2*

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0}. \tag{12}$$

Работа сил поля при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2 может быть записана в виде:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{l} = \int_1^2 q_0\vec{E}d\vec{l} = q_0\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}\ , \tag{13}$$

тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0} = \frac{q_0}{q_0}\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl\,. \tag{14}$$

Интегрирование можно проводить вдоль любой линии, соединяющей точки 1 и 2, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории.

Если перемещать заряд q_0 из произвольной точки за пределы поля , т.е. в бесконечность, где потенциал $\varphi_\infty = 0$, то работа сил электростатического поля, согласно (11): $A_\infty = q_0\varphi$, откуда:

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q_0}. \tag{15}$$

Таким образом, *потенциал* – физическая величина, определяемая работой сил поля по перемещению единичного положительного заряда при удалении его из данной точки в бесконечность.

Эта работа численно равна работе, совершаемой внешними силами (против сил электростатического поля) по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля. Работа внешних сил положительна, работа электростатических сил – отрицательна.

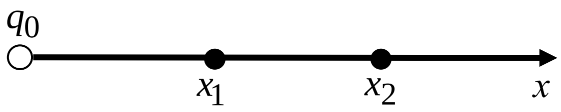
3.4. Напряженность как градиент потенциала (связь между E и φ)

Напряженность E – силовая характеристика электростатического поля.

Потенциал φ – энергетическая характеристика электростатического поля.

Работа по перемещению единичного точечного положительного заряда из одной точки в другую вдоль оси x, при условии, что точки расположены бесконечно близко друг к другу и

$$x_1 - x_2 = dx$$



равна:

$$dA_{12} = F_x dx = q_0 E_x dx = E_x dx\,. \qquad (16)$$

Та же работа может быть выражена:

$$dA_{12} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2) = -(\varphi_2 - \varphi_1) = -d\varphi\,. \qquad (17)$$

Приравняв оба выражения (16) и (17), получим:

$$E_x dx = -d\varphi,$$

где дифференцирование производится по *x*.

Аналогично:

$$E_y dy = -d\varphi;$$

$$E_z dz = -d\varphi\,.$$

Тогда:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx};$$

$$E_y = -\frac{d\varphi}{dy}; \qquad (18)$$

$$E_z = -\frac{d\varphi}{dz};$$

умножим на орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и сложим уравнения (18) между собой ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - единичные векторы координатных осей *x*, *y* и *z*.)

В результате сложения уравнений получим:

$$E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -(\frac{d\varphi}{dx}\vec{i} + \frac{d\varphi}{dy}\vec{j} + \frac{d\varphi}{dz}\vec{k}); \qquad \mathbf{(}19\mathbf{)}$$

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi\,. \qquad \mathbf{(}20\mathbf{)}$$

Градиент потенциала – это скорость изменения потенциала в пространстве. Знак «–» показывает, что вектор напряженности $\vec{E}$ направлен в сторону *убывания* потенциала!

Таким образом, напряженность E поля равна градиенту потенциала со знаком «–» (связь между напряженностью E и потенциалом φ).

Эквипотенциальные поверхности. Для графического изображения распределения потенциала электростатического поля пользуются эквипотенциальными поверхностями. Это поверхности, во всех точках которых потенциал φ электростатического поля имеет одно и тоже значение.

Например: Потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}.$$

Эквипотенциальные поверхности в данном случае представляют собой сферы. Линии напряженности – радиальные прямые, перпендикулярные эквипотенциальным поверхностям. На рис. 3.2 изображены линии напряженности (штриховые линии) и сечения эквипотенциальных поверхностей (сплошные линии) поля положительного точечного заряда.

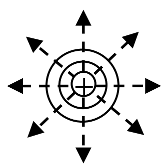


Рис. 3.2

Вектор E всегда нормален к эквипотенциальным поверхностям!

Эквипотенциальных поверхностей вокруг каждого заряда и каждой системы зарядов можно провести бесчисленное множество. Обычно их проводят так, чтобы разности потенциалов между любыми двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей характеризует напряженность поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряженность поля больше.

3.5. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля

Поле бесконечной заряженной плоскости. Разность потенциалов между точками, лежащими на расстоянии x_1 и x_2 от плоскости равна:

$$d\varphi = -Edx = \sigma/2\varepsilon\varepsilon_0\, dx\,.$$

Тогда:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} Edx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}(x_2 - x_1)\,. \qquad (21)$$

Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей. Разность потенциалов между плоскостями с расстоянием *d*:

$$d\varphi = -Edx = \sigma/\varepsilon\varepsilon_0\, dx\,;$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d Edx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} d\,. \qquad (22)$$

Поле равномерно заряженной сферической поверхности с зарядом q: разность потенциалов между точками, лежащими на расстоянии r_1 и r_2 от центра сферы:

$$d\varphi = -Edx\,;$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

при $r \geq R$,

$$E = 0$$

при $r < R$.

Тогда:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad (r_1 > R;\ r_2 > R;\ r_2 > r_1). \qquad (23)$$

Потенциал поля вне сферической поверхности

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad (24)$$

приняли $r_1 = r$; $r_2 = \infty$.

Потенциал поля внутри сферической поверхности

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}. \qquad (25)$$

Внутри сферической поверхности потенциал всюду одинаков и равен потенциалу поверхности.

Поле объемно заряженного шара радиуса R с зарядом q. Разность потенциалов между точками, лежащими на расстоянии r_1 и r_2 от центра шара

$$d\varphi = -Edx;$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

при $r \geq R$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (26)$$

Разность потенциалов между точками, лежащими внутри шара на расстоянии r_1 и r_2 от центра шара

$$d\varphi = -Edx;$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}r$$

при $r < R$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}rdr = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(r_2{}^2 - r_1{}^2). \qquad (27)$$

Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиуса R. Разность потенциалов между точками, лежащими на расстоянии r_1 и r_2 от оси заряженного цилиндра

$$d\varphi = -Edx;$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

τ – линейная плотность заряда.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad (28)$$

Контрольные вопросы

1. Как определяется работа по перемещению заряда в электрическом поле? Зависит ли она от формы траектории, по которой происходит перемещение заряда?
2. Что называется циркуляцией вектора напряженности, и каков ее физический смысл?
3. Каково условие потенциальности силового поля. Является ли электростатическое поле потенциальным?
4. Что называется потенциалом в данной точке электрического поля? Как вычисляется потенциал поля точечного заряда? Что называется разностью потенциалов?
5. Что такое эквипотенциальные поверхности и как они расположены относительно линий напряженности?
6. Какова связь между потенциалом и напряженностью? Что называется градиентом потенциала?
7. Какая из величин, характеризующих электрическое поле – напряженность, поток напряженности, потенциал – являются векторными, а какие скалярными? В каких единицах измеряются эти величины?
8. Потенциал электростатического поля возрастает в направлении снизу вверх. Куда направлен вектор напряженности электростатического поля?
9. Как определяется потенциал электростатического поля, создаваемого системой точечных зарядов?
10. Как определяется разность потенциалов между двумя точками электростатического поля, создаваемого равномерно заряженной плоскостью, двумя разноименно заряженными плоскостями, сферической и цилиндрической поверхностями?

ЛЕКЦИЯ 4

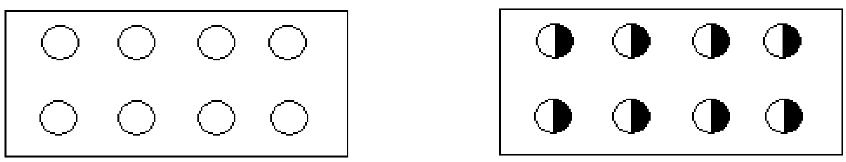
ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

4.1. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков

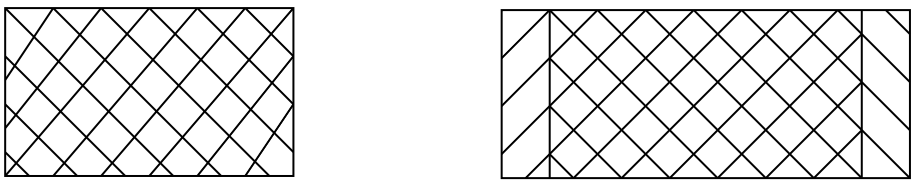
Диэлектриками называются вещества, не способные проводить электрический ток. Это связано с тем, что внутри диэлектрика все электроны сильно связаны с ядрами атомов и свободные электроны отсутствуют.

Если диэлектрик внести в электрическое поле, то это поле и сам диэлектрик претерпевают существенные изменения, зависящие от строения молекул диэлектрика.

На диэлектрике появляются электрические полюсы, отчего и само явление получило название поляризации диэлектриков. Заряды, возникающие на диэлектриках в электрическом поле, мы будем называть *поляризационными зарядами.* В диэлектриках заряды обоих знаков связаны друг с другом и могут только смещаться на малые расстояния в пределах одной молекулы. Неполяризованный диэлектрик (в отсутствии электрического поля) можно изобразить в виде собрания молекул, в каждой из которых равные положительные и отрицательные заряды распределены равномерно по всему объему молекулы (рис. 4.1). При поляризации диэлектрика заряды в каждой молекуле смещаются в противоположные стороны, и на одном конце молекулы появляется положительный заряд, а на другом – отрицательный. При этом каждая молекула превращается в электрический диполь.



Модель неполяризованного (а) и поляризованного (б) диэлектрика



Поляризация диэлектрика как смещение зарядов:
а) неполяризованный б)поляризованный

Рис. 4.1

Смещение зарядов внутри молекул будет проявляться как возникновение некоторых зарядов на диэлектрике. Действительно, неполяризованный диэлектрик можно представить как два тождественных объема, совпадающих друг с другом, каждый, из которых равномерно заполнен положительным или отрицательным зарядом. Поляризацию диэлектрика можно рассматривать как смещение этих объемов на малое расстояние в противоположные стороны. При этом внутри диэлектрика по-прежнему количество положительного заряда будет равно количеству отрицательного, но на одном из концов диэлектрика возникнет тонкий слой с некомпенсированным положительным зарядом, а на другом появится некомпенсированный отрицательный заряд, т.е. возникнут поляризационные заряды.

Диэлектрики с неполярными молекулами. Первую группу диэлектриков (N_2, H_2, CO_2, CH_4 и т.д.) составляют вещества, молекулы которых имеют симметричное строение, т.е. центры тяжести положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего электрического поля совпадают и дипольный момент молекулы равен нулю. Молекулы таких диэлектриков называются *неполярными*. Под действием внешнего электрического поля заряды неполярных молекул смещаются в противоположные стороны (положительные – по полю, отрицательные – против поля), и молекула приобретает дипольный момент.

Диэлектрики с полярными молекулами. Вторую группу диэлектриков (H_2O, NH_3, SO_2, CO и т.д.) составляют вещества, молекулы которых имеют асимметричное строение, т.е. центры тяжести положительных и отрицательных зарядов не совпадают. Молекулы таких диэлектриков обладают дипольным моментом даже в отсутствие внешнего электрического поля и называются *полярными*. Дипольные моменты полярных молекул, если нет электрического поля, вследствие теплового движения ориентированы в пространстве хаотично, и их результирующий момент равен нулю. Если такой диэлектрик поместить во внешнее поле, то силы этого поля будут стремиться повернуть диполи вдоль поля и возникнет отличный от нуля результирующий дипольный момент.

Ионные диэлектрики. Третью группу диэлектриков ($NaCl, KCl, KBr$ и т.д.) составляют вещества, молекулы которых имеют ионное строение. Ионные кристаллы представляют собой пространственные решетки с правильным чередованием ионов разных знаков. В этих кристаллах нельзя выделить отдельные молекулы, а рассматривать их можно как систему двух вдвинутых одна в другую ионных подрешеток. При наложении на ионный кристалл электрического поля, происходит некоторая деформация кристаллической решетки или относительное смещение подрешеток, приводящие к появлению в образце дипольных моментов.

Таким образом, внесение всех диэлектриков во внешнее электрическое поле приводит к возникновению отличного от нуля результирующего электрического дипольного момента диэлектрика, т.е. к поляризации диэлектрика.

Поляризацией диэлектрика называется процесс ориентации диполей или появления под воздействием внешнего электрического поля ориентированных по полю диполей.

Виды поляризации. Соответственно трем группам диэлектриков различают три типа поляризации:

1. *электронная (деформационная)* поляризация диэлектрика с неполярными молекулами, заключающаяся в возникновении у атомов индуцированного дипольного момента за счет деформации электронных орбит;

2. *ориентационная (дипольная)* поляризация диэлектрика с полярными молекулами, заключающаяся в ориентации имеющихся дипольных моментов молекул по полю. Тепловое движение молекул препятствует полной ориентации молекул, но в результате совместного действия обоих факторов (электрическое поле и тепловое движение) возникает преимущественная ориентация дипольных моментов молекул по полю. Суммарный эффект тем сильнее, чем больше напряженность электрического поля и ниже температура;

3. *ионная* поляризация диэлектриков с ионными кристаллическими решетками, заключающаяся в смещении подрешетки положительных ионов вдоль поля, а отрицательных – против поля, которое приводит к возникновению дипольных моментов.

4.2. Поляризованность. Напряженность электростатического поля в диэлектрике

При поляризации диэлектрика каждая его молекула превращается в электрический диполь и, следовательно, приобретает определенный электрический момент, равный

$$P = ql\,.$$

При этом, как и прежде, вектор смещения l считается направленным от отрицательного заряда к положительному.

Для количественной характеристики поляризации служит специальная физическая величина, называемая *поляризованностью* (вектором поляризации).

Поляризованностью диэлектрика $\vec{P}$ называют электрический момент единицы объема диэлектрика. Он равен векторной сумме электрических моментов всех молекул, заключенных в единице объема:

$$\vec{P} = \frac{1}{V}\sum_{V}\vec{p}_i\,, \qquad (1)$$

где $\vec{p}_i$ – дипольный момент одной молекулы.

Итак, *поляризованность* (вектор поляризации) $\vec{P}$ - физическая величина, равная дипольному моменту единицы объема диэлектрика.

Опыт показывает, что у изотропных диэлектриков (свойства диэлектрика во всех направлениях одинаковы) поляризованность образца линейно зависит от напряженности электрического поля:

$$\vec{P} = æ\,\varepsilon_0\vec{E}\,. \qquad (2)$$

Коэффициент пропорциональности æ называется диэлектрической восприимчивостью вещества или поляризуемостью единицы объема диэлектрика**,** он является безразмерной положительной величиной и характеризует свойства диэлектрика.

П. Дебай показал, что в случае слабых электрических полей формула (2) справедлива и для диэлектриков с полярными молекулами. Диэлектрическая восприимчивость такого диэлектрика выражается формулой:

$$æ_e = \frac{n_0 P^2}{3\varepsilon_0 kT}\,,$$

где n_0 - число молекул в единице объема диэлектрика;

P – постоянный электрический дипольный момент молекулы;

k – постоянная Больцмана;

T – абсолютная температура.

Таким образом, у диэлектриков с парными молекулами наблюдается зависимость диэлектрической проницаемости от температуры: с ростом температуры диэлектрическая восприимчивость уменьшается вследствие дезориентации молекул-диполей.

Относительная диэлектрическая проницаемость среды связана с диэлектрической восприимчивостью æ соотношением:

$$\varepsilon = 1 + æ. \tag{3}$$

Величина ε показывает, во сколько раз поле внутри диэлектрика $\vec{E}$ уменьшается по отношению к внешнему полю $\vec{E}_0$

$$E = E_0 / \varepsilon, \tag{4}$$

характеризуя количественное свойство диэлектрика поляризоваться в электрическом поле. Покажем это.

Поляризация диэлектрика во внешнем электрическом поле. Рассмотрим плоский конденсатор (однородное поле), целиком заполненный однородным диэлектриком (рис. 4.1). Диэлектрик, помещенный во внешнее однородное электрическое поле E_0 (создается двумя разноименно заряженными плоскостями). поляризуется: происходит смещение зарядов – положительных – по полю, отрицательных против поля. На правой грани диэлектрика будет избыток положительного заряда с поверхностной плотностью $+\sigma'$, на левой – отрицательного заряда $-\sigma'$.

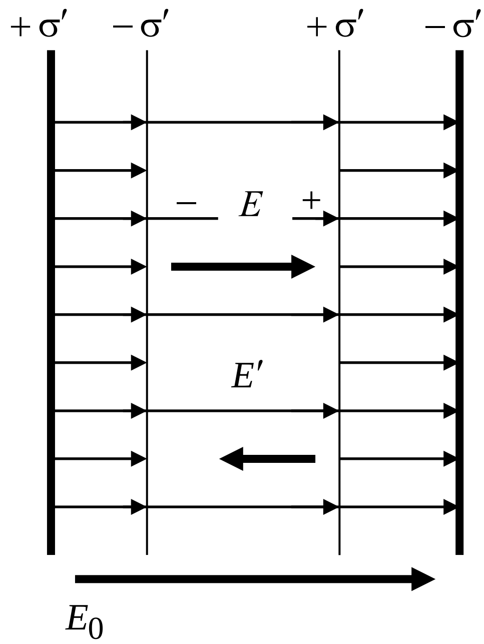


Рис. 4.2

Эти нескомпенсированные заряды, появляющиеся в результате поляризации диэлектрика, называются *связанными или поляризационными*; $\sigma' < \sigma$ – поле связанных зарядов компенсируют внешнее поле не полностью

– часть линий напряженности пройдет сквозь диэлектрик, часть – обрывается на связанных зарядах. Следовательно, поляризация диэлектрика вызывает уменьшение поля по сравнению с первоначальным внешним полем .

Напряженность поля E внутри диэлектрика есть сумма двух полей: поля E_0, созданного зарядами на металлических обкладках, и поля E', вызванного поляризованным диэлектриком.

Поле E' связанных зарядов направлено против внешнего поля E_0 (поля, создаваемого свободными зарядами) и ослабляет его.

$$E = E_0 - E', \tag{5}$$

где $E' = \sigma'/\varepsilon_0$ – поле, создаваемое двумя заряженными плоскостями диэлектрика. Определим поверхностную плотность связанных зарядов σ'. Полный дипольный момент диэлектрика

$$p_V = PV = PSd,$$

где S – площадь грани пластинки, d – ее толщина.

С другой стороны, полный дипольный момент равен произведению связанного заряда каждой грани $Q' = \sigma' S$ на расстояние d между ними, т.е.

$$p_V = Q'd = \sigma' Sd,$$

тогда

$$PSd = \sigma' Sd, \tag{6}$$

т.е. $P = \sigma'$ *– поляризованность всегда равна поверхностной плотности.*

Подставим

$$\vec{P} = æ\,\varepsilon_0 \vec{E}$$

и

$$\sigma' = P$$

в формулу (5)

$$E = E_0 - E',$$

получим

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{\chi\varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi E,$$

откуда

$$E(1+\chi) = E_0. \tag{7}$$

Из формулы (3) следует формула (4), выражающая *электростатическое поле в диэлектрике*

$$E = E_0 / \varepsilon.$$

Полученная формула – это закон Кулона для диэлектриков. Из этой формулы следует: поле в диэлектрике ослабляется во столько раз, во сколько раз увеличивается диэлектрическая проницаемость среды. Напряженность поля E зависит от *диэлектрической проницаемости среды* ε. Физическая причина этого заключается в появлении поляризационных зарядов в диэлектрике, уменьшающих электрическое поле.

4.3. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

Электрическое смещение. Для расчета электрических полей внутри диэлектрика, кроме напряженности поля $\vec{E}$, вводят вспомогательную величину,

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$$

$$\varepsilon = 1+\chi;$$

$$\vec{\mathrm{P}} = \chi\varepsilon_0\vec{E}; \tag{8}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \chi\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P},$$

называемую *вектором электрической индукции* (вектором электрического смещения).

Необходимость введения электрического смещения: Вектор *E*, переходя через границу диэлектрика, претерпевает скачкообразное изменение (см. рис. 4.2), создавая неудобства для расчета полей. Поэтому вводят вектор электрического смещения, который свободен от этих недостатков.

Единица электрического смещения 1 Кл/м^2.

Физический смысл вектора электрического смещения. Связанные заряды появляются в диэлектрике при наличии внешнего электростатического поля, создаваемого системой свободных электрических зарядов, т.е. в диэлектрике на электростатическое поле свободных зарядов накладывается дополнительное поле связанных зарядов. Результирующее поле в диэлектрике описывается вектором *E* (он зависит от свойств диэлектрика, т.е. от ε –диэлектрической проницаемости). Вектор *D* описывает электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами (т.е. имеющими возможность перемещаться), но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.

Линии электрического смещения – линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением *D*. Направление и густота линий электрического смещения определяются так же, как и для линий вектора *E*. Линии вектора *E* могут начинаться на любых зарядах – свободных и связанных, в то время как линии вектора *D* – только на свободных зарядах. Через области поля, где находятся связанные заряды, линии вектора *D* проходят не прерываясь.

Введем *поток вектора электрического смещения сквозь площадку dS* (рис. 4.3)

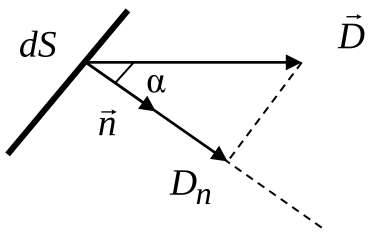


Рис. 4.3

$$d\Phi_D = \vec{D}d\vec{S} = D_n dS, \tag{9}$$

где $d\vec{S} = dS\vec{n}$ - вектор, модуль которого равен *dS*, а направление совпадает с направлением нормали n к площадке.

Поток вектора электрического смещения сквозь замкнутую поверхность *S* (интеграл берется по замкнутой поверхности *S*)

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS \,. \tag{10}$$

Единица потока вектора D **- [1 Кл].**

1 Кулон равен потоку электрического смещения, связанному с суммарным свободным зарядом.

Теорема Остроградского-Гаусса для электростатического поля в диэлектрике наиболее просто записывается именно для вектора электрического смещения $\vec{D}$

$$\Phi_D = \int_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \sum q_i \,. \tag{11}$$

Теорема Остроградского-Гаусса для электростатического поля в диэлектрике (в случае дискретного распределения зарядов). Поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных зарядов. В такой форме теорема Гаусса справедлива для электростатического поля как для однородной и изотропной, так и для неоднородной и анизотропной сред.

Поток Φ_D определяется только сторонними зарядами q_i (зарядами, находящимися вне диэлектрика). Заряды внутри диэлектрика здесь не учитываются.

Теорема Остроградского-Гаусса для электростатического поля в диэлектрике (в случае непрерывного распределения зарядов). Поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен свободному заряду, заключенному в объеме, ограниченном этой поверхностью.

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \int_V \rho dV \,. \tag{12}$$

Уравнение Гаусса в дифференциальной форме (уравнение Пуассона). Рассмотренная теорема Гаусса связывает заряд q, заключенный в объеме V и поток вектора $\vec{D}$ через замкнутую поверхность S, охватывающую этот объем: $\Phi_D = q$. Устремим объем V и поверхность S к нулю. При этом и заряд, заключенный в этом объеме, и поток, пронизывающий эту поверхность, будут стремиться к нулю.

Однако $\dfrac{dq}{dV}$ будет совершенно определенной величиной – это объемная плотность заряда ρ. Из теоремы Гаусса получим:

$$\frac{dq}{dV} = \frac{d\Phi_D}{dV} = \frac{d}{dV}\oint_S \vec{D}\,d\vec{S}\,.$$

Справа стоит плотность потока вектора $\vec{D}$. Эта величина носит название *дивергенции* (расходимости):

$$div\vec{D} = \rho\,.$$

Это соотношение и есть уравнение Пуассона или теорема Гаусса в дифференциальной форме. Существенно, что и $\vec{D}$, и ρ относятся к некоторой точке, а не к объему или к поверхности. Дивергенция отлична от нуля там, где есть объемный заряд.

Дивергенция – это оператор (перечень операций, которые надо проделать с вектором $\vec{D}$), причем это оператор, преобразующий вектор в скаляр. В данном случае – в плотность заряда ρ

$$div\vec{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{D} = \rho\,.$$

4.4. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред

Тангенциальные составляющие векторов E и D на границе раздела. Рассмотрим связь между векторами *E* и *D* на границе раздела двух однородных диэлектриков, диэлектрические проницаемости которых ε_1 и ε_2 при отсутствии на границе свободных зарядов. Построим вблизи границы раздела диэлектриков 1 и 2 небольшой замкнутый прямоугольный контур ABCDA длины *l*, ориентировав его вдоль границы (рис. 4.4).

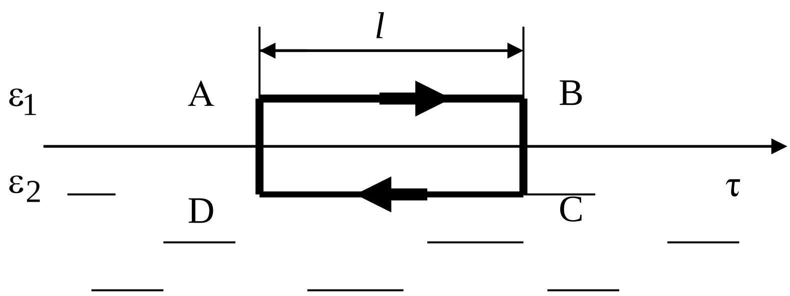


Рис. 4.4

Согласно теоремы о циркуляции вектора *E*,

$$\oint_{ABCDA} E dl = 0,$$

откуда

$$E_{\tau 2} l - E_{\tau 1} l = 0.$$

Знаки интегралов разные, т.к. пути интегрирования по AB и CD противоположны, а по участкам BC и DA ничтожно малы. Поэтому *тангенциальные составляющие векторов* E_1 *и* E_2

$$E_{\tau 2} = E_{\tau 1} \tag{13}$$

Заменим проекции вектора $\vec{E}$ проекциями вектора $\vec{D}$, деленными на $\varepsilon\varepsilon_0$, получим *тангенциальные составляющие векторов* D_1 *и* D_2

$$\frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{D_{\tau 1}}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} \Rightarrow \frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{14}$$

Нормальные составляющие векторов D_1 *и* D_2 *на границе раздела.* На границе раздела построим прямой цилиндр ничтожно малой высоты, одно основание которого находится в первом диэлектрике, а другое во втором. Основания ΔS настолько малы, что в пределах каждого из них вектор *D* одинаков. Согласно теоремы Гаусса,

$$D_{n2} \Delta S - D_{n1} \Delta S = 0,$$

поэтому

$$D_{n2} = D_{n1}. \tag{15}$$

Заменив проекции вектора $\vec{D}$ проекциями вектора $\vec{E}$, умноженными на $\varepsilon\varepsilon_0$, получим *нормальные составляющие векторов* E_1 *и* E_2

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \tag{16}$$

Вывод: при переходе через границу раздела двух диэлектрических сред тангенциальная составляющая вектора E и нормальная составляющая вектора D изменяются непрерывно (не претерпевают скачка), а нормальная составляющая вектора E и тангенциальная составляющая вектора D претерпевают скачок. Следовательно, вектора $\vec{E}$ и $\vec{D}$ испытывают излом (преломляются) (рис. 4.5).

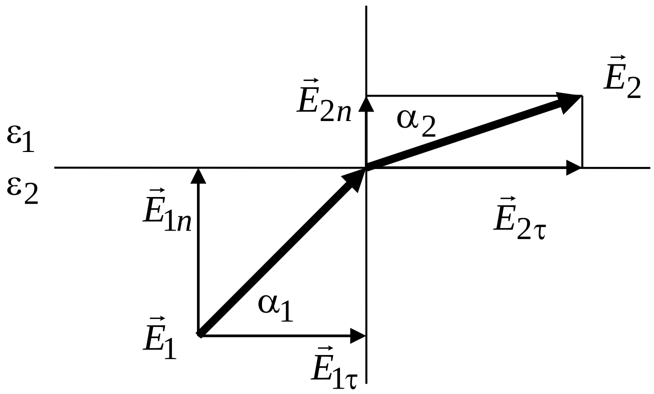


Рис. 4.5

Найдем связь между углами α_1 и α_2.

Пусть $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Разложим векторы E_1 и E_2 у границы раздела на тангенциальные и нормальные составляющие. Из рис. 4.5 следует, что

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{\dfrac{E_{\tau 2}}{E_{n2}}}{\dfrac{E_{\tau 1}}{E_{n1}}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Мы получили закон преломления линий напряженности E (а значит, и линий смещения D). Эта формула показывает, что, входя в диэлектрик с большой диэлектрической проницаемости, линии $\vec{E}$ и $\vec{D}$ удаляются от нормали. (В оптике наоборот).

Сегнетоэлектрики – это диэлектрики, обладающие в определенном интервале температур спонтанной (самопроизвольной) поляризованностью даже в отсутствие внешнего электрического поля. К сегнетоэлектрикам относятся сегнетова соль $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ и титанит бария $BaTiO_3$.

При отсутствии внешнего электрического поля сегнетоэлектрик представляет собой как бы мозаику из *доменов* – областей с различными направлениями поляризованности. Так как в смежных доменах эти направления различны, то в целом дипольный момент диэлектрика равен нулю. При внесении сегнетоэлектрика во внешнее поле происходит переориентация дипольных моментов доменов по полю, а возникшее при этом суммарное электрическое поле доменов будет поддерживать их некоторую ориентацию и после прекращения действия внешнего поля. Поэтому сегнетоэлектрики имеют аномально большие значения диэлектрической проницаемости (для сегнетовой соли $\varepsilon \approx 10^4$).

Для каждого сегнетоэлектрика имеется определенная температура, выше которой его свойства исчезают и он становится обычным диэлектриком. Эта температура называется *точкой Кюри*. В сегнетоэлектриках вблизи точки Кюри наблюдается также резкое возрастание теплоемкости вещества. Превращение сегнетоэлектриков в обычный диэлектрик, происходящее в точке Кюри, сопровождается фазовым переходом II рода.

Диэлектрическая проницаемость ε сегнетоэлектриков и диэлектрическая восприимчивость æ зависят от напряженности $\vec{E}$ поля в веществе, тогда как для других диэлектриков эти величины являются характеристиками вещества.

Для сегнетоэлектриков формула $\vec{P} = æ\varepsilon_0\vec{E}$ не соблюдается: связь между векторами поляризованности $\vec{P}$ и напряженности $\vec{E}$ нелинейная и зависит от значений $\vec{E}$ в предшествующие моменты времени. В сегнетоэлектриках наблюдается явление диэлектрического гистерезиса («запаздывания») (рис. 4.6)

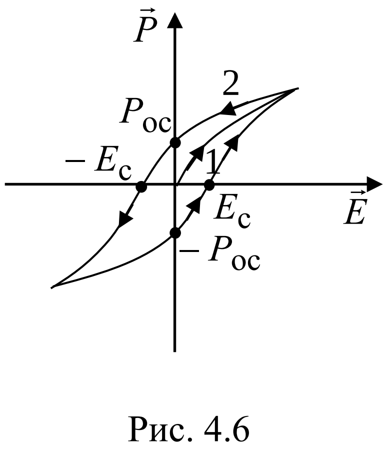


Рис. 4.6

Как видно из рис. 4.6 с увеличением напряженности $\vec{E}$ внешнего электрического поля поляризованность $\vec{P}$ растет, достигая насыщения (кривая 1). Уменьшение $\vec{P}$ с уменьшением $\vec{E}$ происходит по кривой 2, и при

$\vec{E}=0$ сегнетоэлектрик остается поляризованным в отсутствие внешнего электрического поля.

Чтобы уничтожить остаточную поляризованность, надо приложить электрическое поле обратного направления $(-\vec{E}_{\text{c}})$. Величина $-\vec{E}_{\text{c}}$ называется *коэрцитивной силой*. Если даже измерить $\vec{E}$, то $\vec{P}$ изменится по кривой 3 *петли гистерезиса*.

В настоящее время кроме титанита бария и сегнетовой соли известно более сотни сегнетоэлектриков. Они широко применяются в качестве материалов, обладающих большими значениями диэлектрической проницаемости ε (например в конденсаторах).

Пьезоэлектрики – это кристаллические вещества, в которых при сжатии или растяжении в определенных направлениях возникает поляризованность даже в отсутствие внешнего электрического поля (прямой пьезоэффект). Наблюдается и *обратный пьезоэффект* – появление механической деформации под действием электрического поля. У некоторых пьезоэлектриков решетка положительных ионов в состоянии термодинамического равновесия смещена относительно решетки отрицательных ионов, в результате чего они оказываются поляризованными даже без внешнего электрического поля. Такие кристаллы называются *пироэлектриками*.

Электреты – диэлектрики, длительно сохраняющие поляризованное состояние после снятия внешнего электрического поля (электрические аналоги постоянных магнитов). Эти группы веществ находят широкое применение в технике и бытовых устройствах.

Контрольные вопросы

1. Перечислите известные Вам типы диэлектриков. В чем состоят их особенности? В чем состоит явление поляризации диэлектрика?
2. Какая молекула называется полярной? В чем сущность ориентационной поляризации диэлектрика?
3. Какая молекула называется неполярной? В чем сущность деформационной поляризации диэлектрика?
4. В чем сущность ионной поляризации диэлектрика?
5. Каков физический смысл вектора поляризации? Как он связан с поверхностной плотностью связанных (поляризованных) зарядов?
6. Сформулируйте и запишите теорему Гаусса для поля в вакууме и для поля в веществе. Какие заряды называются свободными и связанными (поляризованными)?

7. Какова связь векторов электрического смещения, напряженности, поляризации?

8. Каков физический смысл диэлектрической проницаемости вещества и как она связана с диэлектрической восприимчивостью вещества?

9. Как определяется энергия поляризованного диэлектрика?

10. Сегнетоэлектрики. Точка Кюри. Прямой и обратный пьезоэлектрический эффект.

ЛЕКЦИЯ 5

ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

5.1. Типы проводников. Поле внутри проводника

Проводники – тела, в которых электрический заряд может перемещаться по всему объему.

Проводники первого рода – металлы. Перенос зарядов в них (свободных электронов) не сопровождается химическими превращениями.

Проводники второго рода – расплавленные соли, растворы кислот. Перенос в них зарядов (положительных и отрицательных ионов) ведет к химическим изменениям.

Напряженность поля внутри проводника. Если поместить проводник во внешнее электростатическое поле или его зарядить, то на заряды проводника будет действовать электростатическое поле, в результате чего они начнут перемещаться до тех пор, пока не установится равновесное распределение зарядов, при котором электростатическое поле внутри проводника превращается в нуль. Если бы это было не так, то заряды двигались бы без затрат энергии, что противоречит закону сохранения энергии.

Итак, напряженность поля во всех точках внутри проводника равна нулю.

$$E = 0\,.$$

Тогда, согласно

$$E = -\mathrm{grad}\varphi\,;$$

$$\varphi = \mathrm{const}\,.$$

Таким образом, отсутствие поля внутри проводника означает, что потенциал во всех точках внутри проводника постоянен, т.е поверхность проводника в электростатическом поле - эквипотенциальная поверхность.

Так как вектор E всегда нормален к эквипотенциальным поверхностям, то электростатическое поле (вектор E) на внешней поверхности проводника направлено нормально в каждой точке его поверхности.

Внутри проводника зарядов нет!

Действительно, если проводнику сообщить некоторый заряд q, то некомпенсированные заряды располагаются только на поверхности проводника. Из теоремы Гаусса следует, что

$$q = \Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = 0,$$

т.к. во всех точках внутри поверхности $D = \varepsilon\varepsilon_0 E = 0$.

Связь между напряженностью E поля вблизи поверхности заряженного проводника и поверхностной плотностью зарядов σ. Рассмотрим участок поверхности проводника (рис. 5.1).

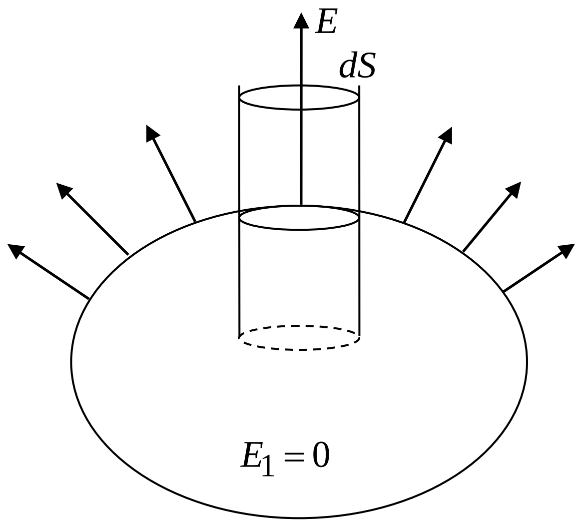


Рис. 5.1

Применим теорему Гаусса к бесконечно малому цилиндру с основанием dS, пересекающему границу проводник-диэлектрик. Определим поток вектора электрического смещения $\vec{D}$ сквозь замкнутую цилиндрическую поверхность. Т.к поле внутри проводника отсутствует, то поток вектора $\vec{D}$ определяется только потоком через наружное основание цилиндра. Поток $\vec{D}$ будет существовать только в верхней части, т.е. выходит наружу. Этот поток ($Dd\vec{S}$) равен сумме зарядов (Q = σdS), охватываемых поверхностью:

$$\vec{D} dS = \sigma d\vec{S},$$

т.е.

$$\vec{D} = \sigma,$$

откуда

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

и

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (1)$$

Эта формула определяет *напряженность электростатического поля* вблизи поверхности проводника любой формы. Здесь ε_0 – электрическая постоянная, ε – диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник.

Вывод: напряженность электростатического поля у поверхности проводника определяется поверхностной плотностью зарядов.

5.2. Электростатическая индукция

Электростатическая индукция **–** явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике во внешнем электростатическом поле.

Механизм электростатической индукции: если во внешнее электростатическое поле внести нейтральный проводник, то свободные заряды (электроны и ионы) перемещаются: положительные по полю, отрицательные – против поля. На одном конце проводника будет наблюдаться избыток положительного заряда, на другом – избыток отрицательного. Эти заряды называются *индуцированными.* Процесс будет продолжаться до тех пор, пока напряженность внутри поля не станет равной нулю, а линии напряженности вне проводника - перпендикулярными его поверхности. Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электростатическое поле, разрывает часть линий напряженности: они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и начинаются на положительных. Таким образом, индуцированные заряды располагаются на внешней поверхности проводника. На рис. 5.2 изображено поле индуцированных зарядов.

Электростатическая защита – экранирование тел (электроизмерительных приборов) от влияния внешних электростатических полей.

Объяснение электростатической защиты. В состоянии равновесия заряды внутри проводника отсутствуют, поэтому, если создать внутри проводника полость, то внутри этой полости поля тоже не будет. Если проводник с полостью заземлить, то потенциал внутри полости будет нулевой, т.е. полость будет полностью изолирована от внешних электростатических полей. На этом основана электростатическая защита. Вместо сплошного проводника для защиты может быть использована металлическая сетка.

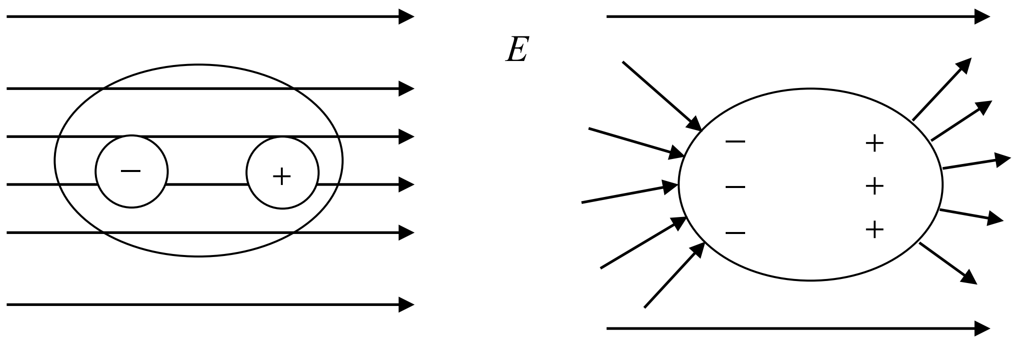


Рис. 5.2

5.3. Электроемкость уединенного проводника

Уединенный проводник – проводник, удаленный от других проводников, тел и зарядов.

Его потенциал прямо пропорционален заряду Q.

Разные проводники, будучи, одинаково заряженными, принимают различные потенциалы. Поэтому для уединенного проводника

$$Q = C\varphi . \qquad (2)$$

Величина

$$C = \frac{Q}{\varphi} \qquad (3)$$

называется *электроемкостью уединенного проводника.*

Емкость уединенного проводника определяется зарядом, сообщение которого проводнику изменяет его потенциал на единицу. Емкость зависит: от формы и размера проводника и не зависит от материала, агрегатного состояния, от формы и размеров полостей внутри проводника (т.к. избыточные заряды располагаются на поверхности проводника). Емкость также не зависит от заряда и потенциала. Здесь нет противоречия с формулой

(3). Она лишь показывает, что потенциал уединенного проводника прямо пропорционален заряду и обратно пропорционален емкости:

$$\varphi = \frac{Q}{C}. \tag{4}$$

Единица емкости 1 Фарад. 1Ф = 1 Кл/В.

1 Ф – емкость такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл.

Электроемкость уединенного шара. Потенциал уединенного шара:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q}{R}, \tag{5}$$

где ε_0 – электрическая постоянная, Q – заряд шара, ε – диэлектрическая проницаемость среды, R – радиус шара.

Согласно формулы (3)

$$C = \frac{Q}{\varphi},$$

тогда

$$C_{\text{шара}} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q}{R}} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R. \tag{6}$$

Определим емкость земного шара

$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R = 4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1\cdot 6400\cdot 10^3 = 711\,\text{мкФ} = 0{,}7\text{ мФ}$

Каков должен быть радиус шара, для которого C = 1 Ф?

Из формулы (6) следует, что

$$R = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0} \text{ (в вакууме);}$$

тогда

$$R_{\text{ш}} = 9\cdot 10^9 \text{ м}.$$

Если радиус Земли

$$R_з = 6400 \cdot 10^3 \text{ м},$$

то

$$R_ш / R_з = 1400 \text{ раз.}$$

Вывод: 1 Ф – очень большая величина. Поэтому на практике используют дольные единицы: 1 мФ = 10^{-3} Ф (милли); 1 мкФ = 10^{-6} Ф (микро); 1 нФ = 10^{-9} Ф (нано); 1 пФ = 10^{-12} Ф (пико).

5.4. Электроемкость различных типов конденсаторов

Конденсатор **–** это устройство, которое при малых размерах и небольших, относительно окружающих тел, потенциалах могут накапливать (конденсировать) на себе значительные по величине заряды, т.е. обладают большой емкостью.

Можно дать еще одно определение: *конденсатор* – система из двух проводников (обкладок) с одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами, форма и расположение которых таковы, что поле сосредоточено в узком зазоре между обкладками.

Устройство конденсатора основано на следующем явлении: если к заряженному проводнику приближать другие тела, то на них возникают индуцированные заряды противоположного знака. Эти заряды ослабляют поле, созданное зарядом проводника, т.е. понижают потенциал проводника, а это приводит к повышению его емкости:

$$C = \frac{Q}{\varphi}.$$

Такая электроемкость называется взаимной.

Электроемкость конденсатора – физическая величина, равная отношению заряда Q, накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов ($\varphi_1 - \varphi_2$) между его обкладками:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \qquad (7).$$

В зависимости от формы обкладок конденсаторы делятся на: *плоские, цилиндрические и сферические.*

Электроемкость плоского конденсатора

Плоский конденсатор состоит из двух параллельных металлических пластин, где S – площадь пластин, d – расстояние между обкладками, Q – заряды на пластинах, σ – поверхностная плотность заряда (рис. 5.3).

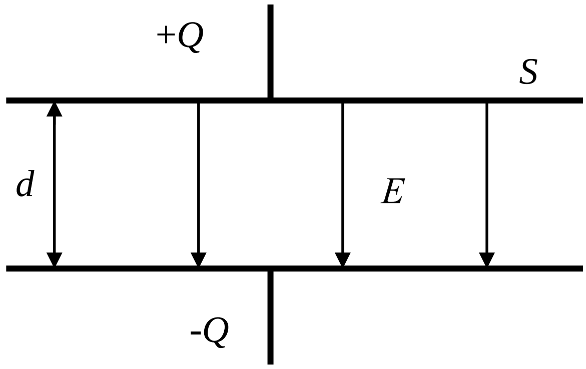


Рис. 5.3

Поле 2-х параллельных бесконечных разноименно заряженных пластин

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

тогда, согласно,

$$E = -grad\varphi:$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} d. \qquad (8)$$

Тогда из формул (7) и (8):

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\sigma S}{\varphi_1 - \varphi_2};$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} d,$$

следует выражение для *емкости плоского конденсатора*

$$C = \frac{\sigma S \varepsilon\varepsilon_0}{\sigma d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (9)$$

Емкость сферического конденсатора. Сферический конденсатор состоит из двух концентрических обкладок, разделенных сферическим слоем диэлектрика (рис. 5.4).

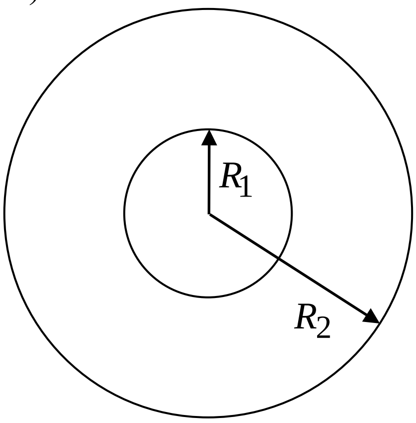


Рис. 5.4

Поле заряженной сферы:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2};$$

$$E = -grad\varphi,$$

тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (10)$$

С учетом формулы (7) и (10) получим: *емкость сферического конденсатора*

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \qquad (11)$$

Емкость цилиндрического конденсатора ($r_2 > r_1$). Цилиндрический конденсатор состоит из двух полых коаксиальных цилиндров, вставленных один в другой, между которыми находится слой диэлектрика. Поле радиально-симметричное и сосредоточено между обкладками.

Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра с линейной плотностью $\tau = Q/l$ (l – длина проводника). По теореме Гаусса поток вектора напряженности $\vec{E}$:

$$\Phi_E = \oint_S EdS = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0} = 2\pi rlE = \frac{\tau l}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

тогда

$$E = \frac{\tau l}{\varepsilon\varepsilon_0 2\pi rl} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Так как

$$E = -\mathrm{grad}\varphi,$$

то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_r^{r_2} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad (12)$$

С учетом формулы (7) и (12) получим формулу для *емкости цилиндрического конденсатора:*

$$C = \frac{\tau l 2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\tau \ln\frac{r_2}{r_2}} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}. \qquad (13)$$

Из формул (9), (11), (13) следует, что емкость конденсатора любой формы прямо пропорциональна диэлектрической проницаемости диэлектрика, заполняющего пространство между обкладками. Поэтому применение сегнетоэлектриков в качестве прослойки значительно увеличивает емкость конденсаторов.

Конденсаторы характеризуются *пробивным напряжением* – разностью потенциалов между обкладками конденсатора, при котором происходит пробой – электрический разряд через слой диэлектрика в конденсаторе. Пробивное напряжение зависит от формы обкладок, толщины диэлектрика и его свойств.

5.5. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов

Для увеличения емкости и варьирования ее возможных значений конденсаторы соединяют в батареи, при этом используются параллельное и последовательное соединения.

1. *Параллельное соединение конденсаторов* (применяется для увеличения емкости). У параллельно соединенных конденсаторов *разность потенциалов на обкладках одинакова* и равна $(\varphi_A - \varphi_B)$ (рис. 5.5).

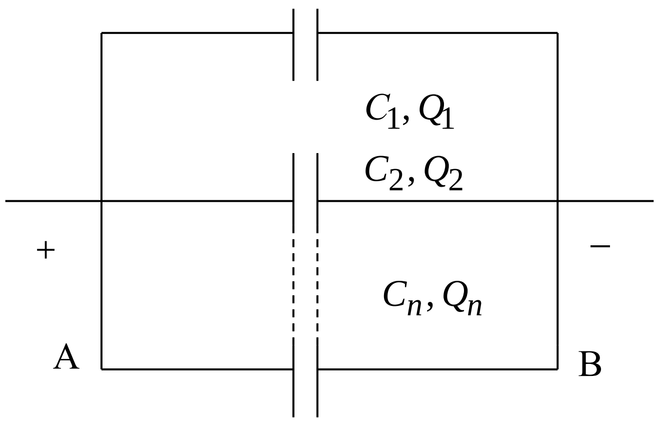


Рис. 5.5

Если емкости отдельных конденсаторов $C_1, C_2, \ldots C_n$, то их заряды:

$$Q_1 = C_1(\varphi_A - \varphi_B);$$

$$Q_2 = C_2(\varphi_A - \varphi_B);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q_n = C_n(\varphi_A - \varphi_B),$$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} Q_i = (C_1 + C_2 + \ldots + C_n)(\varphi_A - \varphi_B).$$

Полная емкость батареи:

$$C = \frac{Q}{\varphi_A - \varphi_B} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \sum_{i=1}^{N} C_i \qquad (14)$$

Вывод: при параллельном соединении конденсаторов полная емкость батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

2. *Последовательное соединение конденсаторов* (применяется для уменьшения емкости) (рис. 5.6)

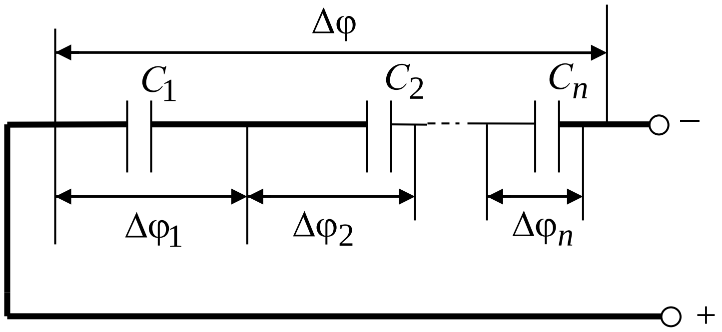


Рис. 5.6

У последовательно соединенных конденсаторов заряды всех обкладок равны по модулю, а разность потенциалов на зажимах батареи равна

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{N} \Delta\varphi_i ,$$

где для любого конденсатора:

$$\Delta\varphi_i = \frac{Q}{C_i} .$$

С другой стороны,

$$\Delta\varphi = \frac{Q}{C} = Q \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} ,$$

откуда

$$\frac{1}{C}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{C_i}. \tag{15}$$

Вывод: при последовательном соединении конденсаторов суммируются величины, обратные емкостям. Результирующая емкость всегда меньше наименьшей емкости, используемой в батарее.

5.6. Энергия заряженного проводника и заряженного конденсатора. Энергия электростатического поля

Энергия двух неподвижных точечных зарядов. Работа электростатических сил не зависит от траектории перемещения заряда. Следовательно – электростатические силы консервативны, а электростатическое поле – потенциально. Значит, система зарядов обладает потенциальной энергией. Рассмотрим два неподвижных точечных заряда Q_1 и Q_2, находящихся на расстоянии r друг от друга. Каждый заряд, в поле другого, обладает потенциальной энергией:

$$W_1=Q_1\varphi_{12};$$

$$W_2=Q_2\varphi_{21},$$

где

$$\varphi_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r}$$

и

$$\varphi_{21}=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r}$$

соответственно потенциалы, создаваемые зарядом Q_2 в точке нахождения заряда Q_1 и зарядом Q_1 в точке нахождения заряда Q_2.

То есть *энергия двух неподвижных точечных зарядов*

$$\varphi_{21}=W_1=W_2=W=Q_1\varphi_{12}=Q_2\varphi_{21}=\frac{1}{2}(Q_1\varphi_{12}+Q_2\varphi_{21}) \tag{16}$$

Энергия системы неподвижных точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \varphi_i , \qquad (17)$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд Q_i, всеми зарядами, кроме i-го.

Энергия заряженного уединенного проводника. Рассмотрим работу, совершаемую при увеличении потенциала проводника от 0 до φ. Для увеличения заряда уединенного проводника (заряд Q, емкость C, потенциал φ**)** на dQ необходимо совершить элементарную работу

$$dA = \varphi dQ = \varphi d(C\varphi) = C\varphi d\varphi;$$

$$A = \int_0^{\varphi} dA = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}, \qquad (18)$$

т.е. *энергия заряженного уединенного проводника* равна работе, которую необходимо совершить, чтобы зарядить этот проводник

$$W = A = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \qquad (19)$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W_k = A = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{Q\Delta\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}, \qquad (20)$$

где Q – заряд конденсатора, C – емкость конденсатора, Δφ – разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Энергия электростатического поля. В формулу (20) для энергии плоского конденсатора $W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2}$ подставим $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ и $\Delta\varphi = Ed$, тогда получаем выражение для *энергии электростатического поля*

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{2d} E^2 d^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V \qquad (21)$$

Объемная плотность энергии электростатического поля **–** это энергия единицы объема.

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} \qquad (22)$$

Эта формула справедлива только для изотропного диэлектрика (выполняется соотношение $P = \chi\varepsilon_0 E$).

Полученные формулы связывают энергию конденсатора с зарядом на его обкладках и с напряженностью поля. Возникает вопрос: где локализована энергия и что является ее носителем – заряды или поле? Электростатика изучает постоянные во времени поля неподвижных зарядов, т.е. в ней поля и обусловившие их заряды неотделимы друг от друга, поэтому электростатика ответить на поставленный вопрос не может. Переменные во времени электрические и магнитные поля могут существовать обособленно, независимо от возбудивших их зарядов, и распространяться в пространстве в виде электромагнитных волн, способных переносить энергию. Это подтверждает *основное положение теории близкодействия* о том, что *энергия локализована в поле и что носителем энергии является поле.*

Контрольные вопросы

1. Как распределяется электрический заряд на проводнике?
2. Каковы напряженность и потенциал поля внутри и на поверхности проводника?
3. Получите выражение для напряженности электрического поля вблизи поверхности заряженного проводника. Как направлен вектор напряженности на поверхности проводника?
4. В чем состоит явление электростатической индукции? В чем состоит электростатическая защита?
5. Что называется электроемкостью уединенного проводника и от чего она зависит? Единица измерения электроемкости.
6. Как определяется электроемкость сферического проводника?
7. Что называется взаимной электроемкостью двух проводников и от чего она зависит?
8. Что называется конденсатором? Как определяется электроемкость плоского конденсатора? Цилиндрического конденсатора?
9. Получите выражение для энергии электрического поля заряженного проводника и плоского конденсатора.
10. Получите выражение для объемной плотности энергии электрического поля.

11. Что называется пробивным напряжением конденсатора и от чего оно зависит?
12. Выведите формулу для расчета электроемкости батареи конденсаторов при последовательном и параллельном их соединении.
13. При каком соединении конденсаторов заряд батареи равен заряду каждого конденсатора в отдельности?
14. При каком соединении конденсаторов электроемкость батареи меньше минимальной электроемкости конденсатора, входящего в батарею?
15. В чем преимущество последовательного соединения конденсаторов?

ЛЕКЦИЯ 6

ПОСТОЯННЫЙ ТОК

6.1. Электрический ток. Сила и плотность тока

Электрическим током называется упорядоченное движение электрических зарядов.

В металлах могут свободно перемещаться только электроны. В проводящих растворах нет свободных электронов, а подвижными заряженными частицами являются ионы. В газах могут существовать в подвижном состоянии и ионы, и электроны.

Упорядоченное движение электрических зарядов, происходящее в проводнике или в вакууме, называется током проводимости (ток в металлах, электролитах, газах).

Упорядоченное движение электрических зарядов, происходящее при движении в пространстве заряженного макроскопического тела, называется конвекционным током.

За направление тока условно принимают направление движения положительных зарядов.

Условия существования тока в проводнике:

1. Наличие в данной среде носителей заряда, которые могли бы перемещаться по проводнику. Обычно это электроны в металлах, электроны и дырки в полупроводниках, ионы в электролитах, ионы и электроны в газах.
2. Наличие внутри проводника электрического поля неэлектростатического происхождения, энергия которого, каким то образом восполняясь, расходовалась бы на перемещение зарядов. Чтобы ток не прекращался, нужен источник электрической энергии – устройство, в котором осуществляется преобразование какого-либо вида энергии в энергию электрического поля.

Основные характеристики электрического тока: для количественной характеристики электрического тока служат две основные величины: сила тока и плотность тока.

Силой тока I в каком либо проводнике называется скалярная физическая величина, определяемая электрическим зарядом dq, проходящим через поперечное сечение S проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \qquad (1)$$

Если сила тока и его направление не изменяются со временем, то такой ток называется постоянным или стационарным.

Для постоянного тока

$$I = \frac{q}{t}, \qquad (2)$$

где q – электрический заряд, проходящий за время t через поперечное сечение проводника.

Сила постоянного тока одинакова во всех сечениях проводника.

Единицей силы тока является ампер (А).

Распределение электрического тока по сечению характеризуется вектором плотности тока $\vec{j}$. *Плотность тока* **–** это векторная физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади проводника, перпендикулярного направлению тока.

$$j = \frac{dI}{dS}. \qquad (3)$$

Единицей плотности тока является 1 А/м^2 — плотность электрического тока, при которой сила тока, равномерно распределенного по поперечному сечению проводника площадью 1 м^2, равна 1 А.

Связь плотности тока со скоростью упорядоченного движения зарядов в проводнике. В классической теории электропроводности металлов показывается, что плотность тока в проводнике пропорциональна концентрации n свободных носителей, имеющих заряд $q = e$ и среднюю скорость направленного движения $\vec{\upsilon}_{\text{ср}}$, а именно

$$\vec{j} = ne\vec{\upsilon}_{\text{ср}}.$$

Выделим внутри проводника площадку $S = 1$, расположенную перпендикулярно линиям тока, а значит, и перпендикулярную к направлению скорости $\upsilon_{\text{ср}}$ заряженных частиц. Построим на этой площадке цилиндр, с длиной, равной произведению скорости движения частиц на время движения: ($\upsilon_{\text{ср}}dt$) (рис. 6.1). Тогда число частиц N, которые пройдут через площадку S за время dt**,** будет равно числу частиц, заключенных внутри объема $dV = \upsilon_{\text{ср}}Sdt$:

$$N = nV = n\langle\upsilon\rangle Sdt.$$

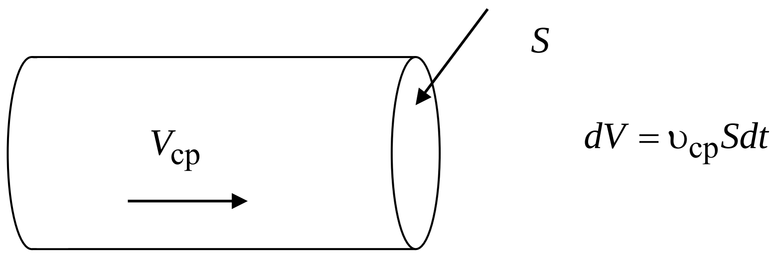


Рис. 6.1

Если n – концентрация носителей тока, e – элементарный заряд носителя тока, то за время dt через поперечное сечение S проводника переносится заряд:

$$dq = Ne = ne\upsilon_{ср}Sdt. \tag{4}$$

Сила тока:

$$I = \frac{dq}{dt} = ne\upsilon_{ср}S. \tag{5}$$

Плотность тока:

$$j = \frac{dI}{dS} = ne\upsilon_{ср}. \tag{6}$$

Плотность тока – это вектор, его направление совпадает с направлением скорости $\upsilon_{ср}$ упорядоченного движения носителей тока.

Сила тока I и плотность тока j связаны между собой соотношением: сила тока сквозь произвольную поверхность S определяется как поток вектора $\vec{j}$, т.е.

$$I = \int\limits_{S} \vec{j}d\vec{S}\,, \tag{7}$$

где $d\vec{S} = \vec{n}dS$ ($\vec{n}$ - единичный вектор нормали к площадке dS, составляющий с вектором j угол α).

Плотность постоянного тока одинакова по всему поперечному сечению S однородного проводника, и поэтому

$$I = jS.$$

Отметим, что время установления тока в цепи обратно пропорционально скорости света. Поэтому упорядоченное движение возникает на всем протяжении проводника практически мгновенно, т.е. одновременно с замыканием цепи.

Уравнение непрерывности. Рассмотрим внутри проводника с током какую-либо замкнутую поверхность S и будем понимать под j_n проекцию вектора плотности тока $\vec{j}$ на внешнюю нормаль к элементу поверхности dS. Тогда из определения плотности тока следует, что положительный заряд, уходящий в единицу времени через всю поверхность S наружу, есть

$$\oint_S j_n dS\,,$$

где интегрирование проводится по всей замкнутой поверхности. Вместе с тем, согласно одному из основных законов электричества, электрические заряды сохраняются: они только перераспределяются между телами (или различными частями тела), но полная сумма возникающих положительных и отрицательных зарядов равна нулю. Поэтому если $\frac{dq}{dt}$ есть изменение за единицу времени положительного заряда, заключенного внутри замкнутой поверхности S, то

$$-\frac{dq}{dt} = \oint_S j_n dS\,.$$

Это соотношение называется *уравнением непрерывности*.

Можно записать это уравнение в *дифференциальной форме*. Правая часть формулы равна

$$\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right) d\tau\,,$$

где $d\tau = dxdydz$ - объем бесконечно малого параллелепипеда с ребрами, параллельными координатным осям x, y и z.

С другой стороны, если ρ есть объемная плотность заряда, то $q = \rho d\tau$ и мы получаем уравнение непрерывности в дифференциальной форме

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}.$$

Отметим, что мы используем здесь частных производных, поскольку ρ и $\vec{j}$ могут зависеть как от координат, так и от времени.

Пользуясь понятием дивергенции вектора, уравнение непрерывности можно записать в более компактной форме

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}=div\vec{j}\ .$$

Если токи постоянны, то все физические величины не зависят от времени и в уравнение непрерывности нужно положить $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ равным нулю. Тогда получается, что поток вектора $\vec{j}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю, а, значит, *для постоянных токов линии тока непрерывны*.

6.2. Сторонние силы. Электродвижущая сила. Напряжение

Сторонние силы. Если в цепи на носители тока действуют только силы электростатического поля, то происходит перемещение носителей заряда (они предполагаются положительными) от точек с большим потенциалом к точкам с меньшим потенциалом. Это приводит к выравниванию потенциалов во всех точках цепи и к исчезновению электростатического поля. Поэтому для существования постоянного тока необходимо наличие в цепи источника электродвижущей силы (ЭДС).

Источник ЭДС (источник тока) – устройство, способное создавать и поддерживать в цепи разность потенциалов за счет работы сил неэлектростатического происхождения.

Силы неэлектростатического происхождения, действующие на заряды со стороны источников тока называются *сторонними силами.*

Чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, нужно с помощью устройства, называемого источником тока, от конца проводника с меньшим потенциалом непрерывно отводить приносимые сюда током заряды, а к концу с большим потенциалом непрерывно их подводить.

Физическая природа *сторонних сил* может быть различна. Они могут быть обусловлены химическими процессами, диффузией носителей в неоднородной среде или через разницу двух разнородных веществ, электрическими (но не электростатическими) полями, порождаемыми меняющимися во времени магнитными полями (гальванические элементы, аккумуляторы, термоэлементы, генераторы и т.д.).

Источник ЭДС в электрической цепи играет роль насоса, перекачивающего заряды. Под действием создаваемого поля сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника ЭДС против сил электростатического поля, благодаря чему на концах цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи течет постоянный электрический ток.

Электродвижущая сила. Для количественной характеристики сторонних сил введено понятие поля сторонних сил. Его характеризуют либо напряженностью поля сторонних сил $\vec{E}_{\text{ст}}$, либо работой $A_{\text{ст}}$, совершаемой сторонними силами при перемещении зарядов.

Скалярная физическая величина, определяемая работой, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется *электродвижущей силой* (ЭДС) ε, действующей в цепи или на ее участке:

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{ст}}}{Q_0}. \tag{8}$$

Размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала, измеряясь в вольтах.

Напряженность поля сторонних сил вводят как величину, равную сторонней силе, действующей на единичный положительный заряд:

$$\vec{E}_{\text{ст}} = \vec{F}_{\text{ст}} / Q_0. \tag{9}$$

Работа сторонних сил $\vec{F}_{\text{ст}}$ по перемещению заряда Q_0 на замкнутом участке цепи:

$$A_{cm} = \oint \vec{F}_{cm} d\vec{l} = \oint Q_0 \vec{E}_{cm} d\vec{l}\ . \tag{10}$$

Тогда ЭДС, действующая в замкнутой цепи,

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} \tag{11}$$

может быть определена, как *циркуляция вектора напряженности сторонних сил.*

ЭДС на участке 1-2 определяется как:

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} \,. \qquad (12)$$

ЭДС ε_{12} является алгебраической величиной. Если она способствует движению носителей тока в данном направлении, то $\varepsilon_{12} > 0$, если препятствует, $\varepsilon_{12} < 0$.

Напряжение. Кроме сторонних сил, на заряд действуют силы электростатического поля $\vec{E}$, поэтому результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд Q_0, равна

$$F = F_{\text{е}} + F_{\text{ст}} = Q_0\left(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}\right). \qquad (13)$$

Работа, совершаемая этой суммарной силой над единичным положительным зарядом на участке цепи 1-2:

$$A_{12} = Q_0 \int_1^2 \overline{E}_{\text{е}} d\vec{l} + Q_0 \int_1^2 \overline{E}_{\text{ст}} d\vec{l} \,. \qquad (14)$$

Используя выражения для ЭДС на участке цепи $\varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}$ и разности потенциалов на концах участка цепи $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$ можно записать:

$$A_{12} = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2) + Q_0\varepsilon \,. \qquad (15)$$

Работа, совершаемая этой суммарной силой над единичным положительным зарядом на участке цепи 1-2, называется падением напряжения или просто напряжением U_{12} на данном участке цепи.

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{Q_0} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} \,. \qquad (16)$$

Напряжение – это физическая величина, определяемая работой, совершаемой суммарным полем электростатических (кулоновских) и сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда на данном участке цепи.

Итак, *напряжение на неоднородном участке цепи* (где есть сторонние силы)

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$$

равно сумме ЭДС источника и разности потенциалов на этом участке.

Для *однородного участка цепи*, где сторонние силы не действуют,

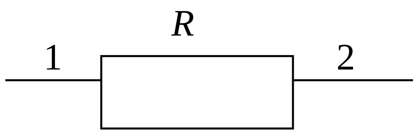
$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \qquad (17)$$

т.е. *напряжение совпадает с разностью потенциалов на концах участка цепи*.

Итак, понятие напряжения является обобщением понятия разности потенциалов.

6.3. Закон Ома для однородного участка цепи. Сопротивление проводников

Однородным называется участок цепи, не содержащий источника ЭДС.



*Закон Ома для однородного участка цепи: н*емецкий физик Георг Ом экспериментально установил, что сила тока в цепи прямо пропорциональна приложенному напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению проводника:

$$I = \frac{U}{R}. \qquad (18)$$

Сопротивление проводника R **–** величина, характеризующая сопротивление проводника электрическому току.

Единица сопротивления 1 Ом **–** сопротивление такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет постоянный ток 1 А.

Величина $G = 1/R$ – называется *электрической проводимостью*. Проводимость - физическая величина, характеризующая способность участка электрической цепи проводить ток.

Единица проводимости – 1 См (Сименс) **–** проводимость участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом.

Сопротивление проводника зависит от его размеров, формы и материала проводника и от температуры.

Сопротивление однородного линейного проводника цилиндрической формы:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{19}$$

где ρ – *удельное электрическое сопротивление,* l – длина проводника, S – площадь поперечного сечения.

Удельное электрическое сопротивление ρ служит характеристикой вещества, из которого изготовлен проводник.

Единица измерения удельного сопротивления: 1 $\text{Ом} \cdot \text{м}$ – удельное сопротивление проводника площадью поперечного сечения 1 м^2 и длиной $1\,\text{м}$, имеющего сопротивление 1 Ом.

Наименьшим удельным сопротивлением обладает серебро ($1{,}6 \cdot 10^{-8}$ $\text{Ом} \cdot \text{м}$) и медь ($1{,}7 \cdot 10^{-8}$ $\text{Ом} \cdot \text{м}$). На практике наряду с медными, применяются алюминиевые провода. Несмотря на то, что удельное сопротивление алюминия больше, чем у меди, он обладает меньшей плотностью, а значит, весит меньше.

Закон Ома в дифференциальной форме (закон Ома для плотности тока). Закон Ома в форме $I = U/R$ относится ко всему проводнику. Представим закон Ома в дифференциальной (т.е. относящейся к элементу тока длины dl) форме. Некоторая точка внутри проводника характеризуется вектором плотности тока $\vec{j}$, напряженностью электрического поля $\vec{E}$ и свойствами материала проводника, т.е. удельным сопротивлением ρ. Выделим мысленно малый объем вблизи рассматриваемой точки и подставим $R = \rho \frac{dl}{dS}$ в закон Ома $dI = -\frac{dU}{R}$, получим:

$$dI = -\frac{dUdS}{\rho dl},$$

здесь $U_1 - U_2 = -dU$ - разность потенциалов между сечениями dS отстоящими на расстоянии dl.

Следовательно,

$$\frac{dI}{dS} = -\frac{1}{\rho}\frac{dU}{dl}. \tag{20}$$

Учтем, что $-\frac{dU}{dl}=E$ - напряженность электростатического поля; $\frac{dI}{Sd}=j$ - плотность электрического поля; $\frac{1}{\rho}=\gamma$ - удельная электрическая проводимость.

Тогда из формулы (20) следует закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j}=\gamma\vec{E}. \quad (21)$$

Он связывает плотность тока и напряженность поля в какой-либо точке проводника. Закон Ома в дифференциальной форме справедлив и для переменных электрических полей.

Зависимость сопротивления от температуры. Сверхпроводимость. Опыт показывает, что изменение удельного сопротивления и сопротивления с температурой описывается линейным законом:

$$\rho=\rho_0(1+\alpha t);$$

$$R=R_0(1+\alpha t),$$

где ρ и ρ_0 R и R_0 – соответственно удельные сопротивления и сопротивления проводника при данной температуре и $0^\circ\mathrm{C}$; α – температурный коэффициент сопротивления: для чистых металлов при не очень низких температурах:

$$\alpha=\frac{1}{273}\mathrm{K}^{-1}.$$

Следовательно, температурная зависимость сопротивления может быть представлена в виде:

$$R=R_0\alpha T,$$

T – термодинамическая температура.

В большинстве случаев зависимость удельного сопротивления от температуры следует кривой 1, изображенной на рис. 6.2.

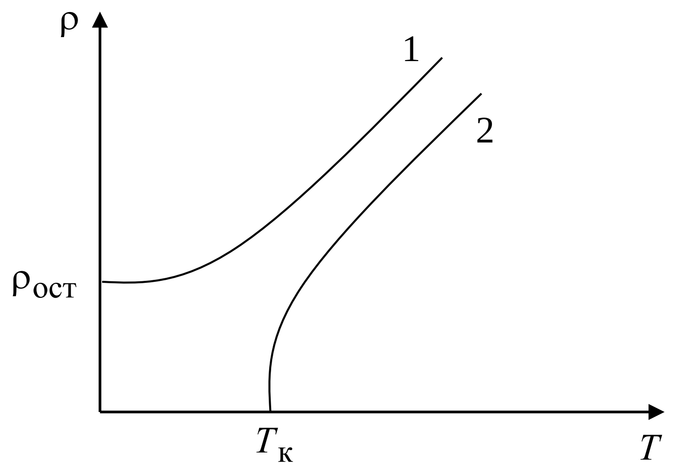


Рис. 6.2

Величина остаточного сопротивления $\rho_{ост}$ в значительной степени зависит от чистоты материала и наличия остаточных механических напряжений в образце, поэтому после обжига она заметно уменьшается. У абсолютно чистого металла с идеально правильной кристаллической решеткой при абсолютном нуле $\rho = 0$. В металлах сопротивление току определяется лишь подвижностью свободных электронов. А она с увеличением температуры уменьшается из-за возрастания амплитуды колебания атомов кристаллической решетки.

Сверхпроводимость. У большой группы металлов и сплавов при температурах $T_к$ порядка нескольких кельвин, называемых критическими, сопротивление скачком обращается в нуль (кривая 2 на рис. 6.2), т.е. металл становится абсолютным проводником. Это явление, названное *сверхпроводимостью*, было обнаружено в 1911 г. Камерлинг-Оннесом у ртути. В дальнейшем сверхпроводимость была обнаружена у свинца, олова, цинка, алюминия и других металлов, а также у ряда сплавов. Для каждого сверхпроводника имеется своя критическая температура $T_к$, при которой он переходит в сверхпроводящее состояние. При воздействии на сверхпроводник магнитного поля сверхпроводящее состояние нарушается. В настоящее время ведется интенсивный поиск высокотемпературных сверхпроводников, поскольку практическое использование сверхпроводящих материалов затруднено из-за низких критических температур. В частности, обнаружены и активно используются керамические материалы, обладающие сверхпроводимостью при температуре выше 100 К, однако их стоимость пока чрезвычайно высока.

Сверхпроводимость – свойство некоторых проводников, заключающееся в том, что их электрическое сопротивление скачком падает до 0 (кривая 2 на рис. 6.1) при охлаждении ниже определенной критической температуры $T_к$, характерной для данного проводника. Материал становится абсолютным проводником. Сверхпроводимость наблюдается при очень низких температурах. Например, для Al $T_к = 1{,}19$ К; Hg – 4,15 К; Nb – 9,2 К и т.д. В последнее время синтезированы материалы, в которых сверхпроводимость наблюдается при более высоких температурах $110 - 125$ К.

Эффект Мейсснера. При охлаждении сверхпроводника, находящемся во внешнем постоянном магнитном поле, в момент перехода в сверхпроводящее состояние магнитное поле полностью вытесняется из его объема. Этим сверхпроводник отличается от идеального проводника, у которого при падении удельного сопротивления до нуля индукция магнитного поля в объеме должна сохраняться без изменения. Явление вытеснения магнитного поля из объема проводника называется эффектом Мейсснера. Он обнаружен в 1933 г. Мейсснером и Оксенфельдом.

Объяснение сверхпроводимости. По своей физической природе сверхпроводимость является сверхтекучей жидкостью, состоящей из электронов. Электроны подчиняются статистике Ферми-Дирака и поэтому не могут «конденсироваться» на низшем энергетическом уровне (принцип Паули) и образовывать сверхтекучую электронную жидкость. Благодаря тепловым колебаниям атомов в узлах кристаллической решетки между электронами может возникнуть сила притяжения и они тогда объединяются в пары (в Кулеровские пары). Пары электронов ведут себя как частицы с целочисленным спином, т.е. они подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна. Они могут конденсироваться и образовывать ток сверхтекучей жидкости – электронных пар, который и образует сверхпроводящий ток.

Возможность образования электронных пар и их сверхтекучести объясняется квантовой теорией.

Полное теоретическое объяснение сверхпроводимости было дано в 1957 г. Дж. Бардиным, Л. Купером и Дж. Шиффером (теория БКШ).

6.4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца

Работа тока. Пусть к участку цепи приложено напряжение U. За время dt через сечение проводника переносится заряд

$$dQ = Idt.$$

Силы электростатического поля и сторонние силы совершат работу

$$dA = UdQ = UIdt.$$

Используем закон Ома $I = \dfrac{U}{R}$.

Работа тока:

$$dA = UdQ = UIdt = \frac{U^2}{R}dt = I^2 Rdt. \qquad (22)$$

Мощность тока:

$$P = dA/dt = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R. \qquad (23)$$

В СИ: единица работы – 1 Джоуль; единица мощности – 1 Ватт.

На практике применяют внесистемные единицы работы тока:

1 Вт·ч = 3600 Вт·с = $3{,}6 \cdot 10^3$ Дж

1 кВт·ч = 10^3 Вт·ч = $3{,}6 \cdot 10^6$ Дж

Закон Джоуля-Ленца в интегральной форм. В случае, когда проводник неподвижен и химических превращений в нем не происходит, работа, совершаемая током, затрачивается на увеличение внутренней энергии проводника, в результате чего он нагревается. Количество теплоты Q**,** выделяемое в проводнике в соответствии с законом сохранения и превращения энергии, равно работе, совершаемой током:

$$dQ = dA = UIdt = \frac{U^2}{R}dt = I^2 Rdt. \qquad (24)$$

Выделим в проводнике элементарный цилиндрический объем $dV = dS \cdot dl$, сопротивление которого $R = \rho \dfrac{dl}{dS}$ (рис. 6.3).

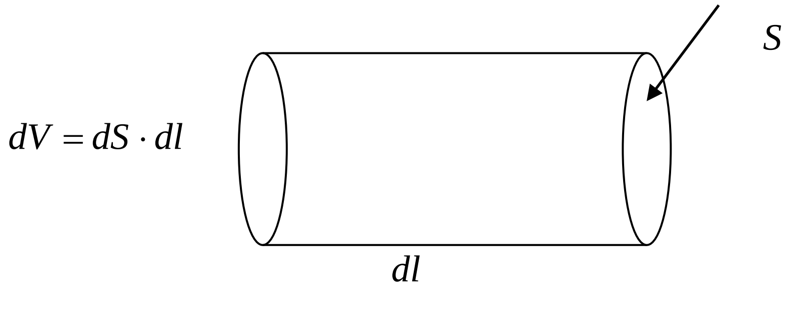


Рис. 6.3

По закону Джоуля-Ленца за время dt в этом объеме выделится теплота

$$dQ = I^2 Rdt = \frac{\rho dl}{dS}(j^2 dS^2)dt = \rho j^2 dVdt .$$

Поделим на объем dV и время dt и получим, что *удельная тепловая мощность тока* равна количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема:

$$P_{\text{уд}} = \frac{dQ}{dVdt} = \rho j^2 . \qquad (25)$$

Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме. Используем закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

и выражение для удельной электрической проводимости

$$\frac{1}{\rho} = \gamma .$$

В результате получим выражение:

$$P_{\text{уд}} = \frac{dQ}{dVdt} = \rho j^2 = \frac{1}{\gamma}\gamma^2 E^2 = \gamma E^2 = jE . \qquad (26)$$

Формулы (25) и (26) таким образом – это обобщенное выражение закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме, пригодное для любого проводника.

6.5. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Напомним, что *неоднородным* называется участок цепи, на котором действуют сторонние силы, т.е. имеется источник ЭДС (рис. 6.4).

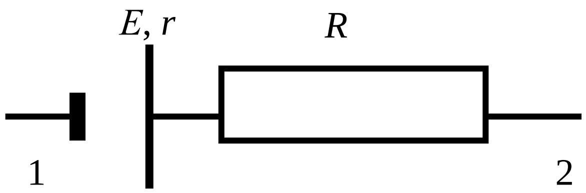


Рис. 6.4

Если ток проходит по неподвижным проводникам, образующим участок 1 – 2, то работа A_{12} всех сил (сторонних и электростатических), совершенных над носителями тока, по закону сохранения и превращения энергии равна теплоте, выделяющейся на участке:

$$A_{12} = Q;$$

$$A_{12} = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2) + Q_0\varepsilon_{12} = Q_0((\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12})$$

$$Q = I^2 R_{12} t = IR_{12}(It) = IR_{12} Q_0,$$

где Q – теплота, выделяемая в проводнике сопротивлением R за время t.

Тогда получаем выражение

$$IR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12},$$

из которого следует *обобщенный закон Ома для неоднородного участка цепи*, где $R_{12} = (r + R)$ - сопротивление всей цепи, а r – внутреннее сопротивление источника тока

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}}{R_{12}} \tag{27}$$

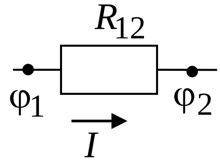
Обобщенный закон Ома в дифференциальной форме: на неоднородном участке цепи под действием электростатического поля E и поля сторонних сил $E_{ст}$ возникает плотность тока

$$\vec{j} = \gamma\left(\vec{E} + \vec{E}_{ст}\right). \tag{28}$$

Эта формула – обобщение формулы $j = \gamma E$ для неоднородного участка цепи.

Анализ обобщенного закона Ома.

1. Источник ЭДС в цепи отсутствует: $\varepsilon_{12} = 0$.
2.

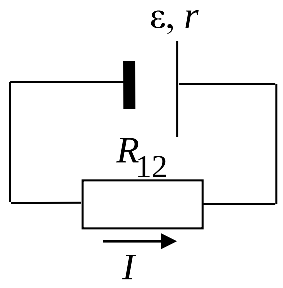


Закон Ома для однородного участка цепи:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{R_{12}} = \frac{U}{R_{12}},$$

где R_{12} – сопротивление всей цепи

2. Цепь замкнута*:* $\varphi_1 = \varphi_2$

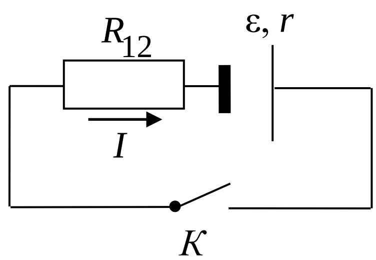


Закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{12}},$$

где R_{12} – сопротивление всей цепи.

3. Цепь разомкнута: I = 0



$$\varepsilon = \varphi_1 - \varphi_2.$$

ЭДС разомкнутой цепи равна разности потенциалов на ее концах.

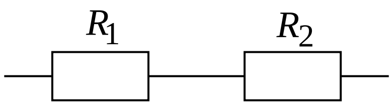
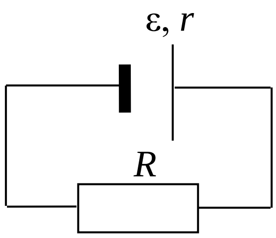
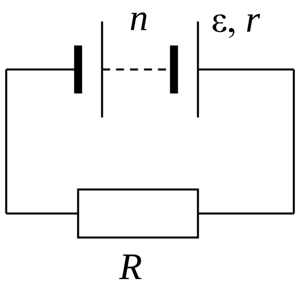
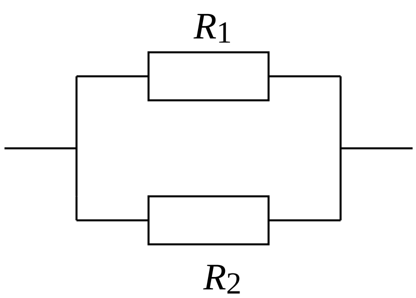
В таблице 1 приведены формулы для напряжения, силы тока и результирующего сопротивления при последовательном и параллельном соединении проводников

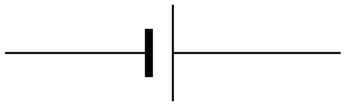
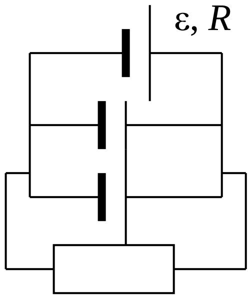
Таблица 1

Соединение	**последовательное**	**параллельное**
Сохраняемая величина	$I_1 = I_2 = ... = I_n = I$ $I = const$	$U_1 = U_2 = ... = U_n = U$ $U = const$
Суммируемая величина	**Напряжение** $U = \sum_{i=1}^{n} U_i$	**Сила тока** $I = \sum_{i=i}^{n} I_i$
Результирующее сопротивление	$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$	$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$

В таблице 2 приведен закон Ома для некоторых соединений элементов электрической цепи

Таблица 2

Схема	**Закон Ома**
	$I = \frac{U_{12}}{R_1 + R_2}$
	$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$
	$I = \frac{n\varepsilon}{R + nr}$
	$I = \frac{U_{12}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$

	$I = \dfrac{\varepsilon + U_{12}}{r}$
	$I = \dfrac{\varepsilon}{R + \dfrac{r}{n}}$

6.6. Мощность цепи постоянного тока

Если участок обладает обычным сопротивлением и от прохождения тока нагревается, то, используя закон Ома для участка цепи можно получить для выделяющейся тепловой мощности следующие выражения

$$P = I^2 R; \tag{29}$$

$$P = \frac{U^2}{R}. \tag{30}$$

Какую именно формулу лучше использовать зависит от условия задачи. Если, например, задано напряжение и надо выяснить, как зависит мощность потребителя от его сопротивления, то удобнее использовать формулу (30), из которой сразу ясно, что мощная лампа накаливания – это лампа с малым *R*, с толстым и коротким волоском. Чтобы увеличить мощность электроплитки, надо укоротить спираль и т.д.

Если же в цепь соединено несколько участков последовательно, задан общий ток и надо выяснить, на каком участке больше выделится тепла, то удобнее использовать формулу (29). Так, больше всего тепла выделиться на участке плохого контакта, то есть там, где больше *R*.

Мощность для всей цепи дается выражением

$$P = \frac{d(q\varepsilon)}{dt} = I\varepsilon. \tag{31}$$

6.7. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

Расчет разветвленных цепей значительно упрощается, если пользоваться не непосредственно обобщенным законом Ома для различных участков цепи, а выведенными на его основе правилами, сформулированными Кирхгофом. Этих правил два. Первое из них относится к узлам цепи.

Узлом называется точка, в которой сходится не менее трех проводников с током. При этом ток, входящий в узел, считается положительным, а выходящий из узла – отрицательным.

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_k I_{\text{к}} = 0\,. \tag{32}$$

Это правило вытекает из закона сохранения электрического заряда. В случае установившегося постоянного тока, ни на каком участке проводника не должны накапливаться электрические заряды. В противном случае токи не могли бы оставаться постоянными.

Это уравнение может быть записано для каждого из N узлов цепи. Однако независимыми из них будут только N-1 уравнение.

Второе правило Кирхгофа: в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов I_i на сопротивления R_i соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС $\varepsilon_{\text{к}}$, встречающихся в этом контуре:

$$\sum I_i R_i = \sum_k \varepsilon_{\text{к}}\,. \tag{33}$$

Такое уравнение может быть составлено для любого замкнутого контура, который может быть мысленно выделен в данной разветвленной цепи. Однако независимыми будут только уравнения для тех контуров, которые нельзя получить наложением других контуров друг на друга.

Число независимых уравнений, составленных в соответствии с первым и вторым правилами Кирхгофа, оказывается равным числу различных токов, текущих в разветвленной цепи. Поэтому, если заданы ЭДС и сопротивления для всех неразветвленных участков, то могут быть вычислены все токи.

При расчете токов удобно пользоваться следующим алгоритмом:

1. выбрать произвольное направление токов на всех участках цепи; действительное направление токов определяется при решении задачи: если искомый ток получился положительным, то направление тока выбрано правильно, если же ток получился отрицательным – его истинное направление противоположно выбранному направлению тока;
2. записать первое правило Кирхгофа для N-1 узла из всех N узлов цепи;
3. выделить замкнутые контуры так, чтобы каждый новый контур содержал хотя бы один участок цепи, не входящий в ранее рассмотренные контуры, и выбрать для каждого контура направление обхода;
4. составить уравнение для каждого контура, учитывая, что произведение IR положительно, если ток на данном участке совпадает с направлением обхода, и наоборот, ЭДС, действующие по выбранному направлению обхода, считаются положительными, против – отрицательными. Общее число уравнений должно быть равно числу искомых величин. В разветвленной цепи, состоящей из P ветвей (участников цепи между соседними узлами) и N узлов число независимых уравнений (30) равно $P - N + 1$;
5. решить полученную систему уравнений.

6.8. Элементарная классическая теория электропроводности металлов

Носителями тока в металлах являются свободные электроны, т.е. электроны слабо связанные с ионами кристаллической решетки металла. Это представление о носителях тока в металлах основывается на электронной теории проводимости металлов, созданной немецким физиком П. Друде и разработанной нидерландским физиком Х. Лоренцем.

Существование свободных электронов в металлах можно объяснить следующим образом: при образовании кристаллической решетки металлов валентные электроны, сравнительно слабо связанные с атомными ядрами отрываются от атомов металла, становятся «свободными» и могут перемещаться по всему объему, образуя своеобразный электронный газ, обладающий, согласно электронной теории металлов, свойствами идеального газа.

Электроны проводимости при своем движении сталкиваются с ионами решетки, в результате чего устанавливается термодинамическое равновесие между электронным газом и решеткой. По теории Друде-Лоренца, электроны обладают такой же энергией теплового движения, как и молекулы одноатомного газа. Тепловое движение электронов, являясь хаотическим, не может привести к возникновению тока. При наложении внешнего электрического поля на металлический проводник, кроме теплового движения электронов, происходит их упорядоченное движение – возникает электрический ток. Электрический ток возникает в цепи практически одновременно с ее замыканием, поскольку замыкание электрической цепи влечет за собой распространение электрического поля со скоростью света. ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

Классической теории электропроводности при малой концентрации электронов проводимости и высокой температуре дает правильные качественные результаты и является простой и наглядной. Однако, имеются расхождения теории с опытом, которые объясняются тем, что движение электронов в металлах подчиняются не законам классической механики, а законам квантовой механики и, следовательно, поведение электронов проводимости надо описывать не статистикой Максвелла-Больцмана, а квантовой статистикой. Поэтому объяснить затруднения элементарной классической теории электропроводности металлов можно лишь квантовой теорией, которая будет рассмотрена в дальнейшем.

Контрольные вопросы

1. Что называется электрическим током и каковы условия возникновения тока проводимости? Что принимают за направление тока?
2. Что называется силой и плотностью тока? В каких единицах они измеряются?
3. Какие силы называются электростатическими (кулоновскими)? Сторонними?
4. Каков физический смысл разности потенциалов, электродвижущей силы и напряжения на участке цепи? Что такое электродвижущая сила (ЭДС) источника тока?
5. Запишите и сформулируйте закон Ома для участка цепи и для замкнутой цепи.
6. Запишите и сформулируйте правила Кирхгофа. Сформулируйте правила для токов и ЭДС при применении правил Кирхгофа.
7. Запишите и сформулируйте закон Ома и закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.
8. Как сопротивление зависит от линейных размеров проводника? Что такое удельное сопротивление и удельная проводимость проводника? В каких единицах они измеряются?

9. Как зависит сопротивление металлов от температуры? В чем состоит явление сверхпроводимости?

10. Как элементарная классическая теория объясняет электропроводность металлов?