ЛЕКЦИЯ 7

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

7.1. Магнитное поле и его характеристики

Известно, что в природе существуют вещества, называемые магнитными, – они способны притягивать предметы из железа. Силовое поле, создаваемое такими веществами (постоянными магнитами), называют магнитным полем.

Опыты показали, что вокруг проводников с током существует такое же поле, как и вокруг постоянных магнитов.

Магнитное поле – это силовое поле в пространстве, окружающем токи и постоянные магниты.

Наличие магнитного поля обнаруживается по силовому действию на внесенные в него проводники с током или постоянные магниты.

Опыт Эрстеда. Название «магнитное поле» связывают с ориентацией магнитной стрелки под действием поля, создаваемого током: датский физик Эрстед в 1820 году обнаружил, что магнитная стрелка, расположенная параллельно проводнику, стремится расположиться перпендикулярно проводнику с током. При изменении направления тока в проводнике стрелка повернется противоположным концом, но также расположится перпендикулярно проводнику с током.

Характерная особенность магнитного поля – магнитное поле создается только движущимися зарядами и действует только на движущиеся в этом поле заряды. В то время как электрическое поле создается и действует как на неподвижные, так и на движущиеся заряды.

От чего зависит характер воздействия магнитного поля на проводник с током, помещенный в это поле?

Характер воздействия магнитного поля на проводник с током зависит от:

1. Формы проводника
2. Расположения проводника
3. Направления тока.

Чтобы охарактеризовать магнитное поле, надо рассмотреть его действие на определенный ток. Подобно тому, как при изучении электростатического поля использовались точечные заряды, для исследования магнитного поля пользуются контуром (рамкой с током), размеры которого малы по сравнению с расстоянием до токов, образующих магнитное поле.

Ориентация контура в пространстве определяется направлением нормали к контуру. Направление нормали определяется *правилом правого винта: за положительное направление нормали принимается направление поступательного движения винта, головка которого вращается в направлении тока, текущего в рамке.*

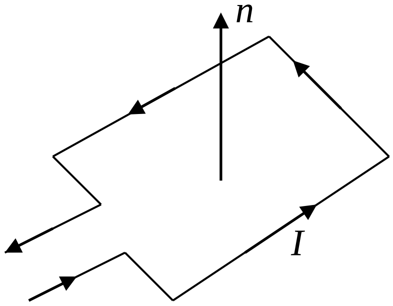


Рис. 7.1

Выбор направления магнитного поля. Опыт показывает, что *магнитное поле оказывает на рамку с током ориентирующее действие:* рамка поворачивается в магнитном поле определенным образом. *За направление магнитного поля в данной точке принимается направление, вдоль которого располагается положительная нормаль к свободно подвешенной рамке с током, или направление, совпадающее с направлением силы, действующей на северный полюс магнитной стрелки, помещенной в данную точку*. Так как оба полюса магнитной стрелки расположены близко, то силы, действующие на оба полюса, равны друг другу. Следовательно, на магнитную стрелку действует пара сил, поворачивающая ее так, чтобы ось стрелки, соединяющая южный полюс с северным, совпадала с направлением поля.

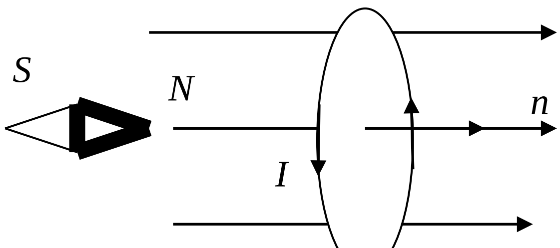


Рис. 7.2.

Основные характеристики магнитного поля. Рамкой с током можно воспользоваться для количественного описания магнитного поля. На рамку с током в магнитном поле действует пара сил, которые создают *вращающий момент* М, зависящий как от свойств поля, так и от свойств рамки:

$$\vec{M} = [\,\vec{p}_m \vec{B}\,]. \tag{1}$$

Здесь $\vec{p}_m$ – вектор магнитного момента рамки с током,
$\vec{B}$ – вектор магнитной индукции.

Модуль вектора вращающего момента определяется формулой:

$$M = p_m B \sin\alpha\,, \tag{2}$$

где α – угол между нормалью к плоскости рамки и вектором B.

При $\alpha = \pi/2$, $\sin\alpha = 1$ и

$$M = M_{\max} = p_m B. \tag{3}$$

Магнитный момент рамки с током.

p_m – зависит от силы тока в контуре и площади контура:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}\,. \tag{4}$$

Здесь S – площадь поверхности рамки с током; n – единичный вектор нормали к поверхности рамки.

Вектор $\vec{p}_m$ совпадает с направлением нормали.

Модуль вектора магнитного момента:

$$p_m = IS\,. \tag{5}$$

Тогда $M_{\max} = ISB$ - максимальный вращающий момент рамки с током.

Магнитная индукция. Если в данную точку магнитного поля помещать рамки с различными магнитными моментами, то на них действуют различные вращающие моменты, однако отношение

$$\frac{M_{\max}}{p_m} = B \tag{6}$$

для всех контуров одно и тоже и поэтому может служить характеристикой магнитного поля.

Магнитная индукция в данной точке однородного магнитного поля определяется максимальным вращающим моментом, действующим на рамку с магнитным моментом, равным единице, когда нормаль к рамке перпендикулярна направлению поля.

Магнитная индукция – силовая характеристика магнитного поля!

Графически магнитное поле изображают с помощью линий магнитной индукции.

Линии магнитной индукции – линии, касательные к которым в каждой точке, совпадают с направлением вектора *B*. Линии магнитной индукции всегда замкнуты и охватывают проводники с током. Поэтому магнитное поле - это вихревое поле, в отличие от электростатического поля, линии напряженности которого всегда разомкнуты (начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах).

Направление линий магнитной индукции определяется по правилу буравчика. *Если ввинчивать буравчик по направлению вектора плотности тока в проводнике, то направление движения рукоятки буравчика укажет направление магнитных силовых линий* (рис. 7.3).

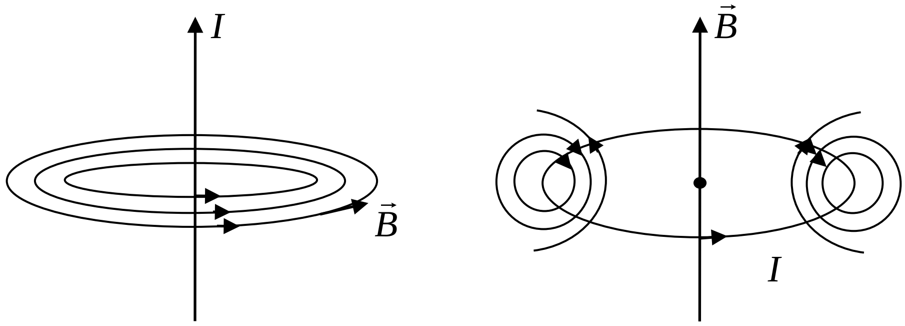


Рис. 7.3

Вблизи прямолинейного проводника с током магнитные стрелки устанавливаются по касательной к окружности, очерченной вокруг проводника. Направление линий магнитной индукции указывается северным полюсом магнитной стрелки.

Таким образом, вблизи проводника линии магнитной индукции лежат в плоскостях, перпендикулярных проводнику.

Магнитное поле соленоида, как видно из рис. 7.4, подобно полю полосового магнита.

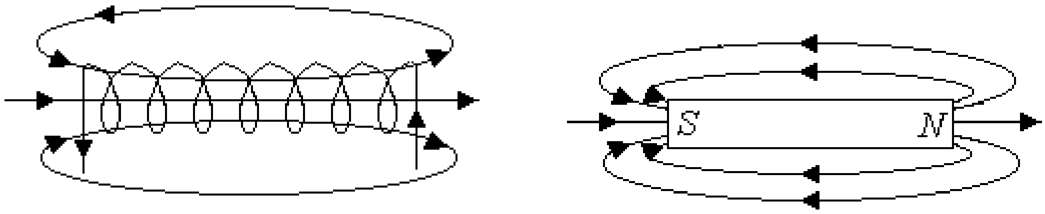


Рис. 7.4

Северный полюс магнита соответствует тому концу соленоида, из которого ток в витках виден идущим против часовой стрелки. Опыты показали, что, разрезав магнит, нельзя получить магнит только с одним полюсом. Каждая часть имеет и южный и северный полюсы. Одноименные полюсы отталкиваются, одноименные – притягиваются. В отличие от электрических зарядов, магнитных зарядов (монополей) не существует. Линии магнитной индукции не обрываются на полюсах, а продолжаются внутри магнита.

Маленький круговой ток (соленоид из одного витка) по своим свойствам аналогичен небольшой магнитной стрелке и также может быть использован для исследования магнитного поля. Заметим, что для него осью *N*-*S* является нормаль к плоскости контура (см. рис. 7.4). В магнитном поле он устанавливается перпендикулярно линиям магнитной индукции: нормаль поверхности контура совпадает с направлением вектора $\vec{B}$.

Поле макро- и микротоков. Гипотеза Ампера.

Ампер предположил, что помимо полей, создаваемых макротоками, в любом теле существуют магнитные поля, созданные микротоками, обусловленные движением электронов вокруг атомов. Эти микроскопические молекулярные токи могут ориентироваться в поле макротоков и создают добавочное магнитное поле, которое накладывается на магнитное поле, создаваемое макротоками.

Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ – характеризует результирующее магнитное поле, создаваемое всеми макро- и микротоками, т.е. при одном и том же токе и прочих равных условиях вектор $\vec{B}$ в различных средах будет иметь разные значения.

Магнитное поле макротоков описывается вектором напряженности $\vec{H}$. Для изотропной однородной среды вектор магнитной индукции $\vec{B}$ и вектор напряженности $\vec{H}$ связаны следующим соотношением:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}. \qquad (7)$$

Здесь $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля, созданного макротоками;

μ_0 – магнитная постоянная ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м);
μ – магнитная проницаемость среды, показывающая, во сколько раз магнитное поле, созданное макротоками (H) усиливается микротоками среды (в вакууме $\mu = 1$).

Если провести аналогию между электростатическим и магнитным полем, то можно сделать вывод:

Вектор $\vec{B}$ и вектор $\vec{E}$ – характеризуют силовое действие этих полей и зависят от среды. Аналогом вектора электрического смещения $\vec{D}$ является вектор напряженности $\vec{H}$, от свойств среды, не зависящий.

7.2. Принцип суперпозиции. Закон Био-Савара-Лапласа

Закон Био-Савара-Лапласа и его применение к расчету полей. В 1820г французские ученые Ж.Био и Ф.Савар установили зависимость силы, действующей на магнитную стрелку, от расстояния до провода, по которому протекал постоянный ток:

1. во всех случаях индукция магнитного поля пропорциональна силе тока в проводнике;
2. величина индукции магнитного поля зависит от формы и размеров проводника с током;
3. индукция магнитного поля в произвольной точке зависит от расположения этой точки по отношению к проводнику с током.

Био и Савар пытались получить общий закон, который позволял бы вычислить магнитную индукцию в любой точке поля, создаваемого током, текущим по проводнику любой формы. В этом им помог Лаплас, который предложил принцип суперпозиции, т.е. принцип независимого действия полей, создаваемых отдельными участками проводника с током. Лаплас обобщил результаты опытов Био-Савара, установив закон, позволяющий найти вектор индукции магнитного поля, создаваемого малым линейным проводником с постоянным током (элементом тока), который был назван законом Био-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = k\frac{I}{r^3}[d\vec{l} \cdot \vec{r}], \tag{8}$$

где $d\vec{l}$ – вектор, численно равный длине dl элемента проводника и совпадающий по направлению с током; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из элемента dl в рассматриваемую точку поля; $r = |\vec{r}|$ (рис. 5); k – коэффициент пропорциональности, который в системе СИ равен

$$k = \frac{\mu\mu_0}{4\pi},$$

где μ – безразмерная величина, характеризующая магнитные свойства среды и называемая относительной магнитной проницаемостью, $\mu = 1$ для вакуума.

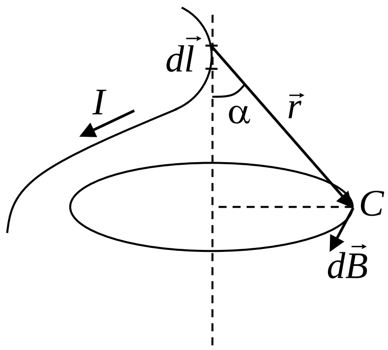


Рис. 7.5

У всех сред, кроме ферромагнитных, значения μ мало отличаются от 1;

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}}$$

магнитная постоянная.

Если учесть, что $|[d\vec{l} \cdot \vec{r}]| = rdl\sin(d\vec{l}, \vec{r})$, то численное значение dB равно

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl\sin(d\vec{l}, \vec{r})}{r^2}. \qquad (9)$$

В соответствии с принципом суперпозиции формула, позволяющая рассчитать результирующее магнитное поле всего проводника, имеет вид

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B}. \qquad (10)$$

Интегрирование производится по всей длине проводника *l*.

Принцип суперпозиции. Магнитная индукция результирующего поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме магнитных индукций полей, создаваемых каждым током или движущимся зарядом в отдельности.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \,. \tag{11}$$

Вывод: расчет магнитных полей очень сложен, однако, если поле имеет симметричную форму, то закон Био-Савара-Лапласа совместно с принципом суперпозиции позволяет рассчитать магнитное поле, например, прямого тока или кругового тока довольно просто.

7.3. Применение закона Био-Савара-Лапласа к расчету магнитных полей

Магнитное поле прямого тока. Запишем закон Био-Савара-Лапласа в скалярном виде:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin(d\vec{l}, \vec{r})}{r^2} \,. \tag{12}$$

Ток течет по тонкому прямому проводу бесконечной длины. В качестве постоянной интегрирования выберем угол $\alpha = \left(d\vec{l}, \vec{r}\right)$ (рис. 7.6).

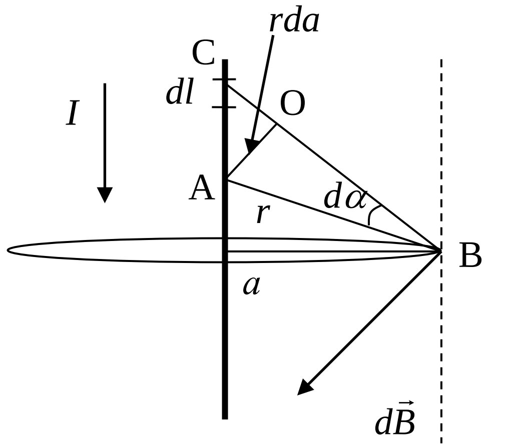


Рис. 7.6

Из треугольника АОВ видно, что

$$\text{AO} = r \sin\left(da\right) \cong r d\alpha \,.$$

Из треугольника АОС видно, что

$$\text{AO} = dl \sin\alpha \,;$$

отсюда

$$dl = \text{AO}/\sin\alpha\,;$$

$$r = \frac{a}{\sin\alpha};$$

$$dl = \frac{r d\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a d\alpha}{\sin^2\alpha}\,.$$

Подставим полученные выражения для r и dl в формулу (9) и запишем выражение для магнитной индукции поля прямого тока, текущего по проводу бесконечной длины.

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I\dfrac{a d\alpha}{\sin^2\alpha}\sin\alpha}{\dfrac{a^2}{\sin^2\alpha}} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\sin\alpha d\alpha\,.$$

Проинтегрируем это выражение. Учтем, что угол $0 \le \alpha \le \pi$ и получим следующую формулу для *магнитной индукции поля прямого тока, текущего по проводу бесконечной длины*:

$$B = \int dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\int_0^{\pi}\sin\alpha d\alpha = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{a}\,;$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{a}\,. \tag{13}$$

Магнитная индукция поля прямого тока, текущего по проводу конечной длины (рис. 7.7):

$$B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{R}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0\mu}{4\pi R}I\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

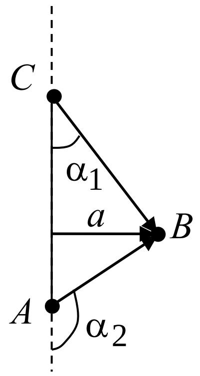


Рис. 7.7

Здесь a – кротчайшее расстояние от провода с током до точки, в которой определяется магнитная индукция поля.

Магнитное поле в центре кругового тока изображено на рис. 7.8.

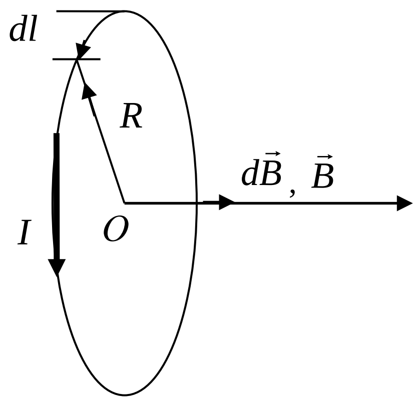


Рис. 7.8

Как следует из рис. 7.8, все элементы dl кругового проводника с током создают в центре магнитные поля dB одинакового направления – вдоль нормали от витка. Сложение векторов dB можно заменить сложением их модулей:

Учтем, что $dl \perp R$, $\sin\alpha = 1$, $r = R$ и получим выражение для магнитной индукции в центре кругового тока.

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{R^2} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}dl;$$

$$B = \int dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int\limits_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu\mu_0}{2}\frac{I}{R};$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2}\frac{I}{R}. \qquad (14)$$

Контрольные вопросы

1. Что понимают под магнитным полем?
2. В чем заключается опыт Эрстеда?
3. Назовите характерную особенность магнитного поля и его отличие от электрического поля.
4. От чего зависит характер взаимодействия магнитного поля на проводник с током?
5. Назовите основные характеристики магнитного поля.
6. Чему равен и как направлен магнитный момент рамки с током?
7. Что называется индукцией магнитного поля? Каково направление магнитного вектора B?
8. Связь индукции магнитного поля и напряженности магнитного поля?
9. Как графически изображается магнитное поле? Изобразите графически поля постоянного магнита, прямого и кругового тока. Сформулируйте правило буравчика.
10. Запишите закон Био-Савара-Лапласа, объясните его физический смысл, выполните соответствующий чертеж.
11. Найдите индукцию магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным проводником с током.
12. Найдите индукцию магнитного поля в центре кругового витка с током.

ЛЕКЦИЯ 8

ЗАКОН АМПЕРА

8.1. Закон Ампера. Взаимодействие параллельных токов

Итак, движущиеся заряды (токи) изменяют свойства окружающего их пространства – создают в нем магнитное поле. Это поле проявляется в том, что на движущиеся в нем заряды (токи) действуют силы. Электрические токи взаимодействуют между собой посредством магнитного поля.

Ампер установил, что сила dF, с которой магнитное поле действует на элемент проводника dl с током I, пропорциональна силе тока в проводнике, его длине, величине магнитной индукции и синусу угла между направлением тока и вектором $\vec{B}$. *Закон Ампера в дифференциальной форме:*

$$dF = kIBdl\sin(dl, B), \qquad (1)$$

где dF – сила, действующая на элемент проводника dl. Коэффициент k зависит от выбора системы единиц; в системе СИ k=1. Последнее соотношение может быть переписано в более общем виде. Это закон Ампера в векторной форме:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}]. \qquad (2)$$

Направление силы Ампера определяется по *правилу левой руки*: если расположить левую руку так, чтобы вектор $\vec{B}$ входил в ладонь, а четыре сложенных вместе пальца были направлены вдоль тока, то отставленный в сторону большой палец укажет направление силы (рис. 8.1).

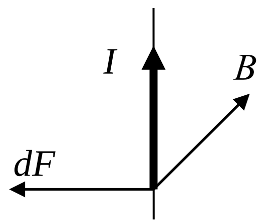


Рис. 8.1

В законе Ампера выражена существенная особенность сил электромагнитного взаимодействия. В электростатике мы имели дело с центральными силами, так как сила взаимодействия двух точечных зарядов направлена по линии, соединяющей эти заряды. *Силы же электромагнитного взаимодействия, как следует из закона Ампера, не являются центральными. Они всегда направлены перпендикулярно линиям магнитной индукции и проводникам с током.*

Рассмотрим взаимодействие параллельных токов (рис. 8.2)

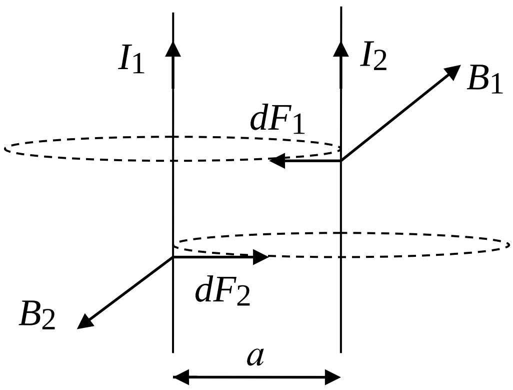


Рис. 8.2

Два параллельных проводника с токами I_1 и I_2 находятся на расстоянии R друг от друга. Каждый из проводников создает свое магнитное поле, которое действует по закону Ампера на другой проводник с током.

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1}{a}$$

и

$$B_2 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2I_2}{a}.$$

Направление силы, с которой магнитное поле действует на элемент тока, определим по правилу левой руки. Токи одинакового направления будут притягиваться друг к другу с силой:

$$dF_1 = I_2 B_1 dl = I_2 \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1}{a} dl = \frac{\mu\mu_0 2I_1 I_2}{4\pi a} dl; \qquad (3)$$

$$dF_2 = I_1 B_2 dl = I_1 \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2I_2}{a} dl = \frac{\mu\mu_0 2I_1 I_2}{4\pi a} dl. \qquad (4)$$

Сравнение выражений (3) и (4) показывает, что

$$\left|dF_1\right| = \left|dF_2\right|$$

и противоположно направлены.

Если токи имеют противоположные направления, то, используя правило левой руки можно показать, что токи отталкиваются.

Проводники с токами одинакового направления притягиваются, с токами разного направления – отталкиваются.

$$dF = \frac{\mu\mu_0 2I_1I_2}{4\pi a}dl \qquad (5)$$

сила взаимодействия двух параллельных токов.

8.2. Магнитная постоянная. Единицы магнитной индукции и напряженности магнитного поля

Если два параллельных проводника находятся в вакууме ($\mu = 1$), то сила взаимодействия на единицу длину равна:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{a}. \qquad (6)$$

1 А *(ампер)* – сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенным на расстоянии 1 м друг от другого, создает силу, равную $2 \cdot 10^7$ Н на каждый метр длины.

Согласно этому определению, при $I_1 = I_2 = 1$ А и $R = 1$ м

$$\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^7 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2 \cdot 1\text{А} \cdot 1\text{А}}{1\text{м}} = \text{Н/м}.$$

Подставив это выражение в формулу (6) получим:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Н}/\text{А}^2 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Гн/м}$$

Закон Ампера позволяет определить численное значение магнитной индукции $\vec{B}$. Пусть элемент проводника dl с током I перпендикулярен направлению магнитного поля, т.е. $\sin(dl, B) = 1$, тогда из закона Ампера следует:

$$dF = IBdl;$$

$$B = \frac{1}{I}\frac{dF}{dl}. \qquad (7)$$

Отсюда величина B численно равна силе, действующей со стороны поля на единицу длины проводника, по которому течет ток единичной силы.

Таким образом, $\vec{B}$ является силовой характеристикой магнитного поля подобно тому, как напряженность $\vec{E}$ является силовой характеристикой электростатического поля.

Единицей индукции магнитного поля $\vec{B}$ *в системе СИ является тесла (Тл).* Это магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой в 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника с током в 1 А, расположенного перпендикулярно направлению поля. *(*1 Тл – *есть индукция магнитного поля, которое на ток в* 1 А *действует с силой* 1 Н/м). Из формулы (7) следует:

$$1\,\text{Тл} = 1\frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = 1\frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = 1\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}.$$

Индукция магнитного поля связана с напряженностью H соотношением:

$$B = \mu\mu_0 H.$$

В случае вакуума $\mu = 1$, тогда:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}\ [\text{А/м}] \qquad \left[\frac{\frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}}{\frac{\text{Н}}{\text{А}^2}} = \frac{\text{А}}{\text{м}}\right].$$

1 А/м – есть напряженность магнитного поля, индукция которого в вакууме равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Тл.

8.3. Магнитное поле движущегося заряда

Магнитное поле создается током. Ток – это упорядоченное движение электрических зарядов, поэтому можно сказать, что любой движущийся в вакууме заряд создает вокруг себя магнитное поле.

Магнитное поле B точечного заряда Q, движущегося с нерелятивистской скоростью $\upsilon = \text{const}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Q[\vec{\upsilon} \cdot \vec{r}]}{r^3}, \tag{8}$$

где r – радиус вектор, проведенный от заряда Q к точке наблюдения М (рис. 8.3).

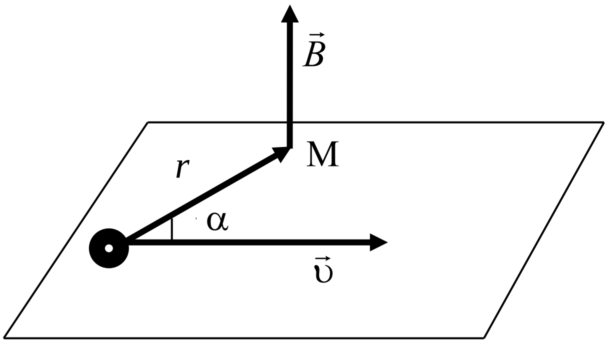


Рис. 8.3

Вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{r}$, а именно: его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{\upsilon}$ к $\vec{r}$. Вектор $\vec{B}$ представляет собой псевдовектор.

Модуль магнитной индукции:

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Q\upsilon\sin\alpha}{r^2}. \tag{9}$$

Сравнивая магнитное поле проводника с током и магнитное поле движущегося заряда, видим, что движущийся заряд по своим свойствам эквивалентен элементу с током:

$$Id\vec{l} = \frac{Q}{t}d\vec{l} = Q\vec{\upsilon}.$$

8.4. Действие магнитного поля на движущийся заряд

Опыт показывает, что магнитное поле действует не только на проводники с током, но и на отдельные заряды, движущиеся в магнитном поле.

Сила, с которой магнитное поле действует на движущийся со скоростью $\vec{\upsilon}$ заряд Q называется *силой Лоренца* и выражается формулой:

$$\vec{F} = Q\,[\vec{\upsilon} \cdot \vec{B}]. \quad (10)$$

Модуль силы Лоренца:

$$F = Q\upsilon B \sin\alpha\,, \quad (11)$$

где α – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$.

Направление силы Лоренца определяется *по правилу левой руки*: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор $\vec{B}$, а четыре вытянутых пальца направить вдоль вектора υ, то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на положительный заряд (рис. 8.4). На отрицательный заряд сила действует в противоположном направлении.

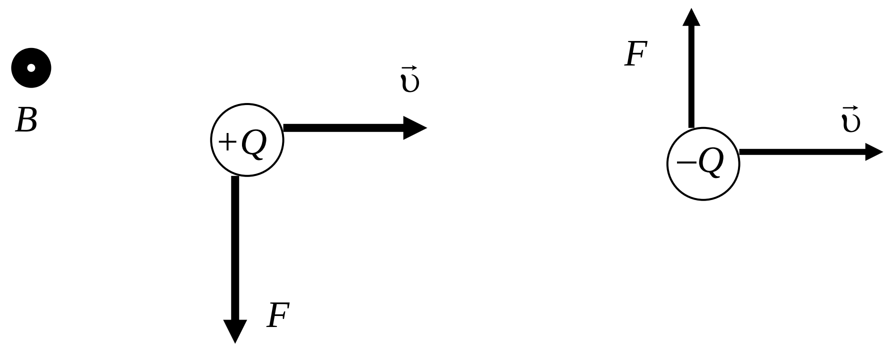


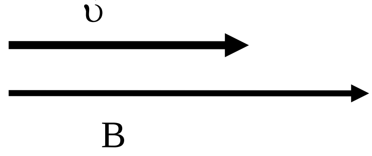
Рис. 8.4

Сила Лоренца перпендикулярна векторам $\vec{B}$ и $\vec{\upsilon}$. Проекция силы на направление вектора скорости равна 0. Сила Лоренца не совершает работы, она изменяет направление этой скорости, не меняя ее модуля.

Магнитное поле действует только на движущиеся в нем заряды!

Движение заряженных частиц в магнитном поле. Рассмотрим три случая:

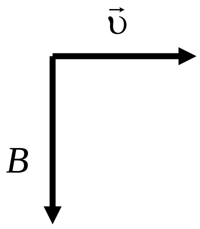
1. Частица движется в магнитном поле вдоль линий магнитной индукции.



Запишем выражение для силы Лоренца: $F = Q\upsilon B \sin\alpha$. При $\alpha = 0$ или π, $F = 0$.

Вывод: частица движется равномерно и прямолинейно.

2. Частица движется в магнитном поле перпендикулярно вектору магнитной индукции *B*.



Запишем выражение для силы Лоренца: $F = Q\upsilon B \sin\alpha$. При $\alpha = \pi/2$, $\sin\pi/2 = 1$, тогда сила $F = Q\upsilon B$ – постоянна по модулю и нормальна к траектории частицы.

Согласно 2 закону Ньютона, эта сила создает центростремительное ускорение. Частица будет двигаться по окружности, радиус которой определяется из условия:

$$Q\upsilon B = m\frac{\upsilon^2}{r},$$

откуда

$$r = \frac{m}{Q}\frac{\upsilon}{B}.$$

Период вращения частицы:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{2\pi\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\upsilon}\frac{m}{Q}\frac{\upsilon}{B} = \frac{2\pi m}{QB}. \qquad (12)$$

Период вращения частицы в однородном магнитном поле определяется только величиной, обратной удельному заряду $\frac{Q}{m}$ частицы, и магнитной индукции поля, но не зависит от ее скорости. На этом основано действие циклических ускорителей заряженных частиц.

3. Частица движется в магнитном поле под углом к вектору *B*.

Движение частицы можно представить в виде суперпозиции:

1. равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью

$$\upsilon_{\parallel} = \upsilon\cos\alpha.$$

2. равномерного движения со скоростью

$$\upsilon_{\perp} = \upsilon \sin\alpha$$

по окружности в плоскости, перпендикулярной полю.

В результате сложения обоих движений возникает движение по винтовой линии, ось которой параллельна магнитному полю (рис. 8.5).

Шаг винтовой линии:

$$h = \upsilon_{\parallel} T = \upsilon\cos\alpha \cdot T$$

С учетом формулы (12):

$$h = \upsilon_{\parallel}\mathrm{T} = \upsilon\cos\alpha \cdot T = \frac{2\pi m\upsilon\cos\alpha}{BQ}.$$

Направление, в котором закручивается спираль, зависит от знака заряда частицы.

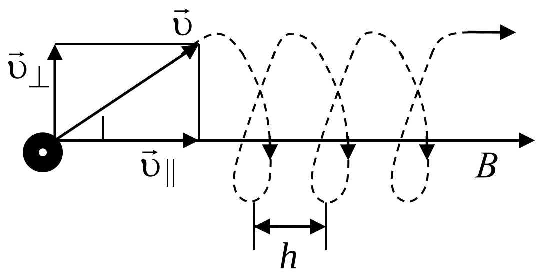


Рис. 8.5

Влияние Земного магнитного поля на движение космических заряженных частиц является защитной для биосферы и обуславливает северное сияние на высоких широтах. Заряженные частицы двигаясь по спирали вдоль силовых линий магнитного поля концентрируются у магнитных полюсов Земли и поглощаются молекулами воздуха в верхних слоях атмосферы вызывая их ионизацию и свечение.

Формула Лоренца: если на движущийся заряд одновременно действуют магнитное поле с индукцией B и электрическое поле напряженностью E, то результирующая сила F действующая на заряд определяется *формулой Лоренца:*

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q[\vec{\upsilon} \cdot \vec{B}], \tag{12}$$

где υ – скорость заряда относительно магнитного поля.

Таким образом, сила Лоренца является ярким подтверждением электромагнитных свойств движущегося заряда. Закономерности движения заряженных частиц в магнитном поле лежат в основе устройства электронного микроскопа, масс-спектрографа и ускорителей заряженных частиц. Отклонение пучка электронов магнитным полем используется в электронно-лучевой трубке.

Ускорители заряженных частиц. Сила со стороны электрического поля может изменить кинетическую энергию частицы, а сила Лоренца не может, оно только изменяет траекторию движения частицы. Свойства этих двух полей используются в ускорителях – устройствах, в которых под действием электрических и магнитных полей создаются и управляются пучки заряженных частиц.

Ускорители характеризуются типом ускоряемых частиц, энергией, сообщаемой частицам, интенсивностью пучка.

Ускорители делятся на непрерывные (из них выходит равномерный по времени пучок) и импульсные (из них частицы вылетают порциями).

По форме траектории и механизму ускорения частиц ускорители делятся на линейные и индукционные. В линейных ускорителях траектории движения частиц близки к прямым линиям, в циклических и индукционных – траекториями частиц являются окружности или спирали.

1. *Линейный ускоритель.* Ускорение частиц осуществляется электростатическим полем. Заряженная частица Q проходит разность потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$, приобретая энергию

$$W = Q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Таким образом частицы ускоряются до 10 МэВ.

2. *Линейный резонансный ускоритель*. Ускорение заряженных частиц осуществляется переменным электрическим полем сверхвысокой частоты, синхронно изменяющимся с движением частиц.

3. *Циклотрон* - циклический резонансный ускоритель тяжелых частиц (протонов, ионов). При выполнении условия синхронизма: периоды вращения частицы в магнитном поле и периоды колебаний электрического поля должны быть равны, частица будет двигаться по раскручивающейся спирали, получая при каждом витке дополнительную энергию (рис. 8.6). Циклотроны позволяют ускорять протоны до энергий примерно 25 МэВ.

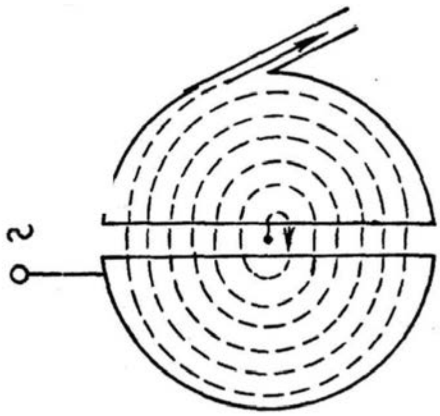


Рис. 8.6

4. *Фазотрон* (синхроциклотрон) – циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (протонов, ионов, α-чатиц), в котором управляющее магнитное поле постоянно, а частота ускоряющего электрического поля медленно изменяется с периодом. Движение частиц происходит по раскручивающейся спирали. Частицы ускоряются до энергий 1 ГэВ.

5. *Синхротрон* – циклический резонансный ускоритель ультрарелятивистских электронов, в котором управляющее магнитное поле изменяется во времени, а частота ускоряющего электрического поля постоянна. Электроны в синхротроне ускоряются до энергий 5-10 ГэВ.

6. *Синхрофазотрон* - циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (протонов, ионов, α-чатиц), в котором объединяются свойства фазотрона и синхротрона, т.е. управляющее магнитное поле и частота ускоряющего электрического поля одновременно изменяются во времени так, чтобы радиус равновесной орбиты частиц оставался постоянным. Протоны ускоряются в синхрофазотроне до энергий 500 ГэВ.

7. *Бетатрон* – циклический индукционный ускоритель электронов, в котором ускорение осуществляется вихревым электрическим полем, индуцируемым переменным магнитным полем, удерживающим электроны на круговой орбите. Не нуждается в синхронизации. Электроны ускоряются до энергий 100 МэВ.

8.5. Эффект Холла

Эффектом Холла называется возникновение поперечного электрического поля в проводнике или полупроводнике с током при помещении его в магнитное поле. Это явление обусловлено влиянием силы Лоренца на движение носителей тока.

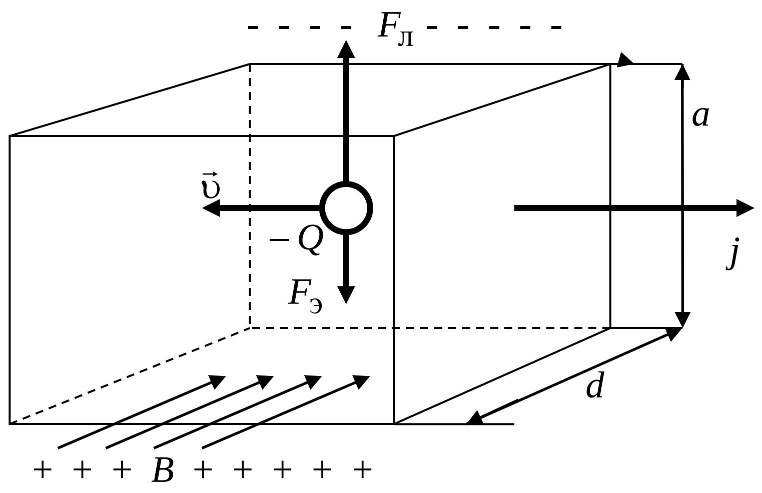


Рис. 8.7

Металлическая пластинка с током плотностью $\vec{j}$ помещается в магнитное поле $\vec{B}$, перпендикулярное $\vec{j}$. Электроны испытывают действие силы Лоренца $\vec{F}_л$, направление которой задается правилом левой руки. Таким образом, у верхнего края пластинки возникнет повышенная концентрация электронов (зарядится отрицательно), а у нижнего их недостаток (зарядится положительно). В результате этого между краями пластинки возникнет дополнительное поперечное электрическое поле $\vec{E}$, направленное снизу вверх (рис. 8.7). Отклонение носителей тока в поперечном направлении происходит до тех пор, пока действие поперечного электрического поля не уравновесит силу Лоренца. Тогда:

$$eE = \frac{e\Delta\varphi}{a} = e\upsilon B, \qquad \Delta\varphi = \upsilon Ba \tag{13}$$

где a – ширина пластинки, $\Delta\varphi$ – поперечная (холловская) разность потенциалов.

Учитывая, что сила тока

$$I = jS = ne\upsilon S = ne\upsilon ad.$$

($S = ad$ – площадь поперечного сечения пластинки толщиной d, n – концентрация электронов, υ – средняя скорость упорядоченного движения электронов, равная $\upsilon = \frac{I}{neS} = \frac{I}{nead}$) получим выражение для холловской разности потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{I}{nead}Ba = \frac{1}{en}\frac{IB}{d} = R\frac{IB}{d}. \tag{14}$$

Холловская разность потенциалов пропорциональна магнитной индукции B, силе тока I и обратно пропорциональна толщине пластинки d.

Постоянная Холла зависит от вещества

$$R = \frac{1}{en}$$

По измеренному значению постоянной Холла можно: определить концентрацию носителей тока в проводнике; судить о природе проводимости полупроводников, т.к. знак постоянной Холла совпадает со знаком заряда носителей тока: в случае электронной проводимости (n - типа) $q = -e$, $R < 0$, а в случае дырочной проводимости (p - типа) $q = e$, $R > 0$; использовать для измерения индукции магнитного поля B.

Таким образом, эффект Холла – метод изучения энергетического спектра носителей тока в металлах и полупроводниках.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и запишите закон Ампера. Сформулируйте правило левой руки.
2. В каких единицах измеряются индукция и напряженность магнитного поля?
3. Определите числовое значение магнитной постоянной.
4. Какую силу называют силой Лоренца? Как определить величину и направление этой силы?
5. Изменяется ли величина скорости заряженной частицы под действием силы Лоренца? Чему равна работа этой силы?
6. Какова траектория движения заряженной частицы в магнитном поле, если скорость частицы направлена: а) вдоль линий индукции $\vec{B}$; б) перпендикулярно линиям индукции $\vec{B}$; в) под острым углом к вектору индукции $\vec{B}$.
7. Когда заряженная частица движется в магнитном поле по спирали? От чего зависит шаг спирали? Ответ подтвердите выводами формул.
8. Заряженная частица движется в магнитном поле по окружности. Выведите формулу для радиуса окружности и периода обращения. Зависит ли период обращения частицы от ее скорости? Что называется удельным зарядом частицы?

9. Что такое ускорители заряженных частиц? Какие они бывают и чем характеризуются.

10. В чем заключается эффект Холла? Выведите формулу для холловской разности потенциалов. От чего зависит постоянная Холла?

11. Как на основе эффекта Холла определить а) концентрацию носителей заряда? б) тип проводимости данного материала?

ЛЕКЦИЯ 9

ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

9.1. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме

Циркуляция вектора $\vec{B}$ *магнитного поля в вакууме.* Циркуляцией магнитной индукции $\vec{B}$ вдоль замкнутого контура *L*, проведенного в магнитном поле, называется линейный интеграл

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \oint_L Bdl\cos(\alpha), \qquad (1)$$

где $d\vec{l}$ - вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; $B_1 = B\cos\alpha$ – составляющая вектора $\vec{B}$ в направлении касательной к контуру; α – угол между векторами $\vec{B}$ и $d\vec{l}$.

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$*):* циркуляция вектора $\vec{B}$ по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k . \qquad (2)$$

где *n* – число проводников с токами, пронизывающих произвольную поверхность *S*, натянутую на рассматриваемый контур *L*.

Каждый ток учитывается столько раз, сколько раз он охватывается контуром. Положительным считается ток, направление которого образует с направлением обхода по контуру правовинтовую систему (из конца вектора плотности этого тока обход контура *L* виден происходящим против часовой стрелки). В противном случае ток считается отрицательным (рис. 9.1).

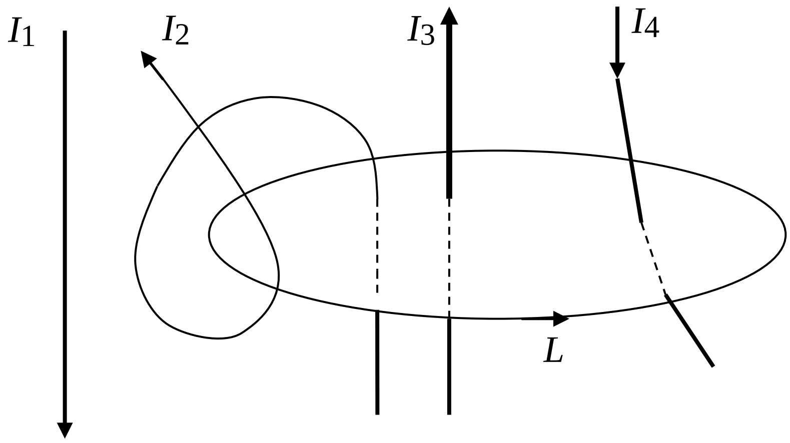


Рис. 9.1

Например, для системы токов, изображенных на рис. 9.1

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0 \cdot I_1 + 2I_2 + I_3 - I_4 .$$

Сравнение теорем о циркуляции векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L E_l \cdot dl = 0;$$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k .$$

Между ними существует принципиальное различие. Циркуляция вектора $\vec{E}$ равна нулю, т.е. *электростатическое поле* является *потенциальным.* Циркуляция вектора $\vec{B}$ магнитного поля не равна нулю. Такое поле называется *вихревым.*

Магнитное поле прямого тока. Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ для расчета магнитного поля прямого тока I**,** перпендикулярного плоскости чертежа и направленного к нам (рис. 9.2). Представим себе замкнутый контур L в виде окружности радиуса r. В каждой точке этого контура вектор $\vec{B}$ одинаков по модулю и направлен по касательной к окружности (линии магнитной индукции). Следовательно, циркуляция вектора $\vec{B}$ равна:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

и

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. \qquad (3)$$

Получили выражение для магнитной индукции прямого тока, выведенного ранее с помощью закона Био-Савара-Лапласа.

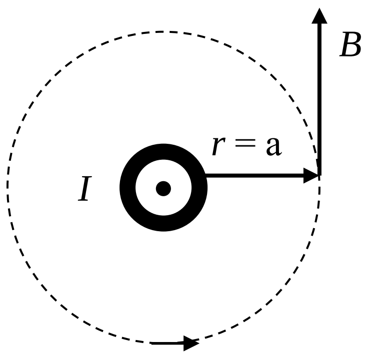


Рис. 9.2.

Магнитное поле соленоида. Соленоид – свернутый в спираль изолированный проводник, по которому течет электрический ток. Опыт показывает, что магнитное поле сосредоточенное внутри бесконечно длинного соленоида - однородно, а полем вне соленоида можно пренебречь.

Рассмотрим бесконечно длинный соленоид, имеющий на длине l N-витков. Длину соленоида считаем намного больше диаметра его витков: $l >> d$ (рис. 9.3).

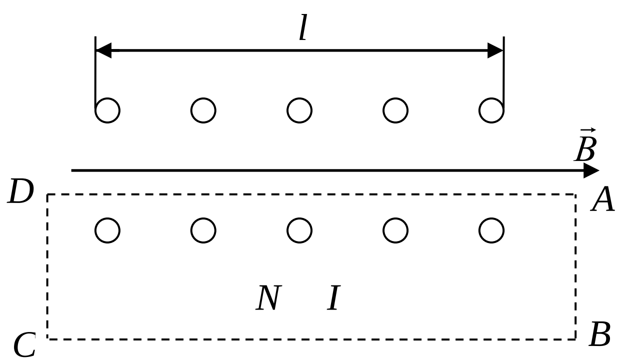


Рис. 9.3

Проведем замкнутый прямоугольный контур *ABCD*. Интеграл по контуру *ABCD* можно представить как сумму четырех интегралов по *AB*, *CD*, *BC* и *DA*. На участках *AB* и *CD* вектор $\vec{B}$ перпендикулярен контуру и его проекция $B_1 = B\cos 90^\circ = 0$. На участке вне соленоида (*CB*) индукция $B = 0$. На участке *DA* циркуляция вектора $\vec{B}$ равна *Bl* (контур совпадает с линией магнитной индукции), следовательно:

$$\oint\limits_{DA} \vec{B}d\vec{l} = \oint\limits_{DA} B_l dl = Bl = \mu_0 NI ,$$

магнитная индукция поля внутри соленоида (в вакууме):

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI . \qquad (4)$$

$n = N/1$ – число витков, приходящееся на единицу длины.

Магнитное поле тороида. Тороид – кольцевая катушка с витками, намотанными на сердечник, имеющий форму тора (бублика), по которой течет ток.

Магнитное поле, как показывает опыт, сосредоточено внутри тороида, вне его поле отсутствует. Линии магнитной индукции – есть окружности, центры которых расположены по оси тороида. В качестве контура выбирают одну такую окружность радиуса *r*. По теореме о циркуляции:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI ,$$

т.е. магнитная индукция внутри тороида (в вакууме):

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} . \qquad (5)$$

Если контур проходит вне тороида, то токов он не охватывает и $B \cdot 2\pi r = 0$. Это означает, что поле вне тороида отсутствует, что показывает и опыт.

9.2. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для поля $\vec{B}$

Элементарным потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) сквозь малую площадку *dS* называется скалярная физическая величина, равная

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_n dS = BdS_n, \qquad (6)$$

где $B_n = B\cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали $\vec{n}$ к площадке dS; $dS_n = dS\cos\alpha$ - площадь проекции поверхности dS на плоскость перпендикулярную к вектору $\vec{B}$; $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к площадке dS; α – угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{B}$; $d\vec{S} = dS\vec{n}$ - вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с направлением нормали $\vec{n}$ к площадке (рис. 9.4).

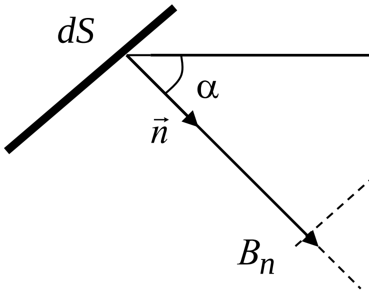


Рис. 9.4

Знак потока магнитной индукции. Поток вектора $\vec{B}$ может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака $\cos\alpha$. Знак определяется выбором положительного направления нормали $\vec{n}$, которое связано с током правилом правого винта.

Поток вектора $\vec{B}$ связывают с контуром, по которому течет ток. Таким образом, *магнитный поток, создаваемый контуром через поверхность, ограниченную им самим, всегда положителен*.

Магнитный поток сквозь произвольную поверхность S:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S B_n dS. \qquad (7)$$

Интеграл берется по произвольной поверхности S.

Для однородного поля и плоской поверхности, расположенной перпендикулярно вектору $\vec{B}$, $B_n = B\cos 90^\circ = B = \text{const}$ и

$$\Phi_B = BS. \qquad (8)$$

Из этой формулы определяется единица магнитного потока - *вебер* (Вб):

1 Вб – магнитный поток, проходящий через плоскую поверхность площадью 1 м^2, расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл, т.е. 1 Вб = 1 Тл · 1 м^2.

Наглядная интерпретация магнитного потока: магнитный поток характеризует магнитное поле, пронизывающее поверхность. Рассмотрим три случая (рис. 9.5).

а) Магнитный поток сквозь контур *ABCD* равен произведению магнитной индукции *B* на площадь контура *S*:

$$\Phi = BS\,.$$

б) Если контур *ABCD* наклонен к линиям магнитной индукции, то он охватывает меньший магнитный поток. Эффективная площадь S_n равна $S\cos\alpha$, а поток

$$\Phi = BS\cos\alpha = BS_n\,.$$

в) Если контур расположен параллельно линиям магнитной индукции, то поток сквозь этот контур равен нулю.

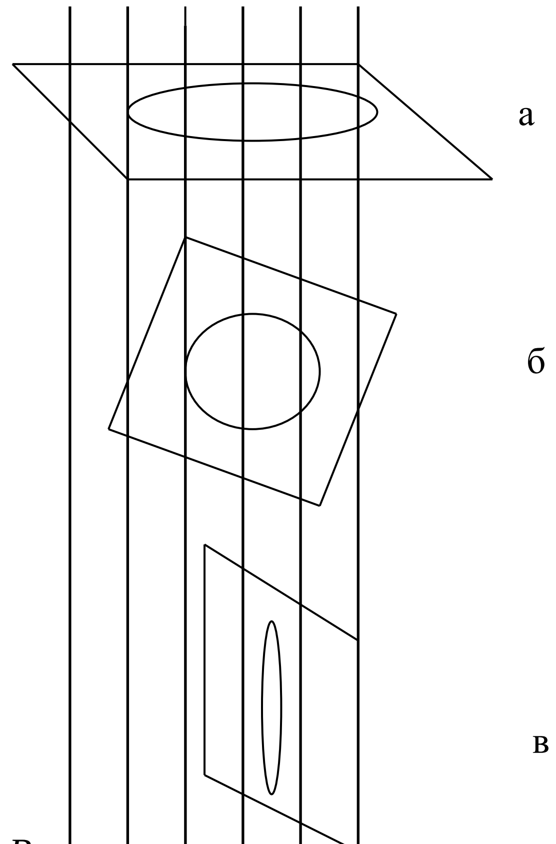


Рис. 9.5

Теорема Гаусса для поля $\vec{B}$: поток вектора магнитной индукции сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oint_S B_n dS = 0. \tag{9}$$

Этот результат является математическим выражением того, что в природе не существует магнитных зарядов – источников магнитного поля, на которых начинались бы или заканчивались бы линии магнитной индукции, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца и являются замкнутыми. Такое поле называют соленоидальным или вихревым.

Сравнение теорем Гаусса для полей $\vec{E}$ *и* $\vec{B}$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\sum_{i=1}^{N} Q_i\,;$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oint_S B_n dS = 0.$$

Между ними имеется принципиальное различие. Электростатическое поле создается зарядами, а магнитные заряды отсутствуют.

Полный магнитный поток через все витки катушки, рамки называется потокосцеплением Ψ. Если магнитные потоки через все N витков одинаковы и равны Φ_n, то потокосцепление

$$\Psi = N\Phi_n. \tag{12}$$

Поток вектора магнитной индукции сквозь соленоид. Магнитная индукция однородного поля внутри соленоида с сердечником:

$$B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI.$$

Магнитный поток сквозь один виток соленоида:

$$\Phi_1 = BS.$$

Полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида

$$\Psi = N\Phi_1 = NBS = \frac{\mu\mu_0 N^2 I}{l} S = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l^2} lSI = \mu\mu_0 n^2 VI = LI\ , \qquad (13)$$

где $\mu\mu_0 n^2 V = L$ - индуктивность соленоида; μ – магнитная проницаемость сердечника; μ_0 – магнитная постоянная; N – число витков соленоида; S – площадь витка соленоида; L – длина соленоида; I – сила тока.

9.3. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

На проводник с током в магнитном поле действуют силы, определяемые законом Ампера. Проводник длиной l может свободно перемещаться в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости контура рис. 9.6. Сила Ампера

$$F = IBl\ .$$

Под ее действием проводник переместится на dx из положения 1 в положение 2. Работа, совершаемая магнитным полем

$$dA = Fdx = IBldx = IBdS = Id\Phi\ ,$$

где $dS = ldx$ – площадь пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле; $d\Phi = BdS$ – поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь.

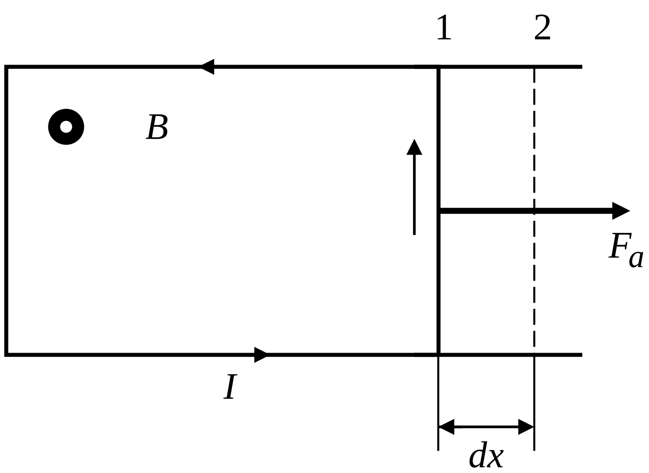


Рис. 9.6

Работа по перемещению проводника с током равна произведению силы тока на магнитный поток, пересеченный движущимся проводником

$$dA = Id\Phi\,. \tag{14}$$

Работа по перемещению контура с током

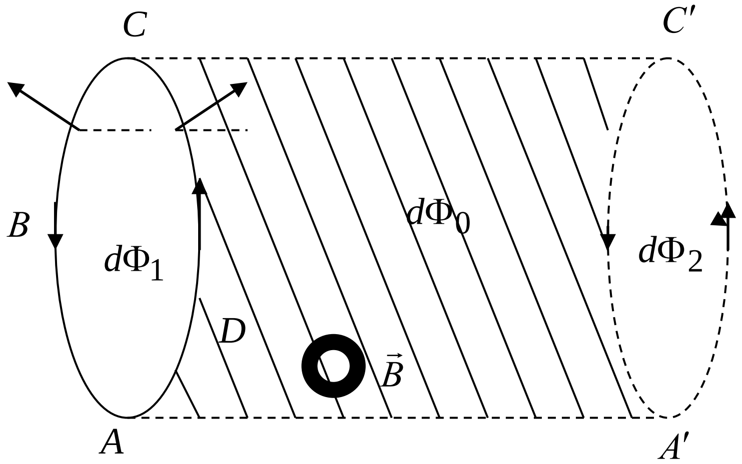


Рис. 9.7

Контур перемещается из положения 1 в положение 2 в результате бесконечно малого перемещения (рис. 9.7). Контур разобьем на два соединенных своими концами проводника: *ADC* и *CBA*. Работа dA сил Ампера по перемещению контура равна сумме работ по перемещению проводников *ADC* (dA_1) и *CBA* (dA_2), т.е.

$$dA = dA_1 + dA_2\,.$$

Так как

$$dA = Id\Phi\,, \tag{14}$$

то

$$dA_1 = I\left(d\Phi_0 + d\Phi_2\right);$$

$$dA_2 = -I\left(d\Phi_1 + d\Phi_0\right),$$

откуда

$$dA = dA_1 + dA_2 = I\left(d\Phi_2 + d\Phi_1\right),$$

($d\Phi_0$ – поток, пересекаемый проводником при движении сквозь заштрихованную поверхность; $d\Phi_1$ и $d\Phi_2$ – поток, пронизывающий контур в начальном и конечном положении; знак «-» – силы образуют с направлением перемещения тупые углы).

Элементарная работа по перемещению контура с током равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, сквозь площадь, ограниченную контуром с током:

$$dA = I\left(d\Phi_2 + d\Phi_1\right). \tag{15}$$

Проинтегрировав выражение (15), определим работу, совершаемую силами Ампера, при конечном произвольном перемещении контура в магнитном поле:

$$A = I\Delta\Phi\,. \tag{16}$$

Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, сцепленного с контуром. Эта формула справедлива для контура любой формы в произвольном магнитном поле.

Контрольные вопросы

1. Что называется циркуляцией вектора $\vec{B}$ в вакууме?
2. В чем заключается теорема о циркуляции вектора магнитной индукции $\vec{B}$? Применив ее, рассчитайте магнитное поле прямого тока, соленоида, тороида.
3. Сравните циркуляцию векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Сделайте вывод об их принципиальном различии. Почему магнитное поле является вихревым?
4. Что называется магнитным потоком? В каких единицах он измеряется?
5. Сформулируйте и напишите теорему Гаусса для магнитного поля. Каков ее физический смысл? Сравните теорему Гаусса для электростатического поля и для магнитного поля. Сделайте вывод об их принципиальном различии.
6. Что такое потокосцепление?
7. Как определяется работа по перемещению проводника с током в магнитном поле? Контура с током?
8. Требуется создать соленоид длиной l = 20 см и диаметром d = 5 см, создающий на своей оси магнитную индукцию $B = 12{,}6 \cdot 10^{-4}$ Тл.

Определить: 1) число ампер-витков IN, необходимое для этого соленоида; 2) разность потенциалов (напряжение U), которую надо создать на концах обмотки соленоида, если используется медная проволока диаметром d = 0,5 мм.

9. Плоский контур, площадью S = 25 см^2, находится в однородном магнитном поле с магнитной индукцией B = 0,04 Тл. Определить магнитный поток Ф, пронизывающий поверхность контура, если его плоскость составляет угол $\beta = 30^{o}$ с линиями магнитной индукции.

ЛЕКЦИЯ 10

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

10.1. Явление электромагнитной индукции. Опыты Фарадея

Электрический ток создает вокруг себя магнитное поле. После опытов Эрстеда предпринимались многочисленные попытки возбудить ток в контуре с помощью магнитного поля. Эта задача была решена в 1831 году английским физиком М. Фарадеем, открывшим *явление электромагнитной индукции.*

Электромагнитной индукцией называется возникновение электродвижущей силы в проводнике при его перемещении в магнитном поле либо в замкнутом проводящем контуре вследствие его движения в магнитном поле или изменения самого поля. Эта электродвижущая сила ε_i называется электродвижущей силой электромагнитной индукции. Под ее влиянием в замкнутом проводнике возникает индукционный электрический ток.

Опыты Фарадея

Опыт 1. Если в замкнутый на гальванометр соленоид вдвигать или выдвигать постоянный магнит, то в моменты его вдвигания или выдвигания наблюдается отклонение стрелки гальванометра (возникает индукционный ток). Направления отклонений стрелки при вдвигании и выдвигании магнита противоположны**.** Отклонение стрелки гальванометра тем больше, чем больше скорость движения магнита относительно катушки. При изменении полюсов магнита направление отклонения стрелки изменится. Для получения индукционного тока магнит можно оставлять неподвижным, а соленоид передвигать относительно магнита.

Опыт 2. Концы одной из катушек, вставленных одна в другую, присоединяются к амперметру, а через другую катушку пропускается ток. Отклонение стрелки амперметра наблюдается в моменты включения или выключения тока, в моменты его уменьшения или увеличения или при перемещении катушек друг относительно друга. Направление отклонений стрелки амперметра также противоположны при включении и отключении тока, его уменьшения и увеличения, сближения и удаления катушек.

Выводы из опытов Фарадея:

1. Удалось в контуре возбудить ток с помощью магнитного поля.

2. Индукционный ток возникает всегда при изменении сцепленного с контуром магнитного потока.

3. Величина индукционного тока не зависит от способа изменения магнитного потока, а определяется скоростью его изменения.

Значение опытов Фарадея:

1. Была доказана возможность получения электрического тока с помощью магнитного поля.

2. М.Фарадей получил количественную связь электрических и магнитных явлений: всякий раз, когда происходит изменение сцепленного с контуром магнитного потока, в контуре возникает индукционный ток: возникновение индукционного тока указывает на наличие в цепи электродвижущей силы, называемой электродвижущей силой электромагнитной индукции.

Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея-Максвелла): ЭДС ε_i электромагнитной индукции в контуре пропорциональна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

При этом несущественно, чем именно вызвано изменение магнитного потока – деформацией контура, его перемещением в магнитном поле или изменением самого поля с течением времени. Таким образом, универсальность закона состоит в том, что ЭДС ε_i не зависит от способа изменения магнитного потока.

Знак «–» показывает, что увеличение потока $(\frac{d\Phi}{dt} > 0)$ вызывает ЭДС $\varepsilon_i < 0$, т.е магнитное поле индукционного тока направлено навстречу магнитному потоку. Уменьшение потока $(\frac{d\Phi}{dt} < 0)$ вызывает $\varepsilon_i > 0$, т.е. направление магнитного потока и магнитного поля индукционного тока совпадает.

Знак «–» в законе Фарадея-Максвелла – математическое отражение *правила Ленца (правило для нахождения направления индукционного тока)*: при всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур, в контуре возникает индукционный ток такого направления, что его собственное магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, вызвавшему индукционный ток или возникающий в контуре индукционный ток имеет всегда такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток.

Направление магнитной индукции $\vec{B}_i$ поля индукционного тока и направление индукционного тока подчиняются правилу правого винта. (рис. 10.1)

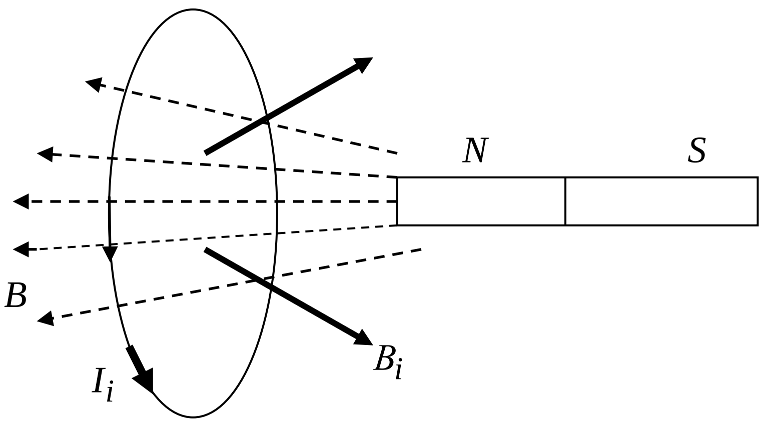


Рис. 10.1

10.2. Вывод закона Фарадея-Максвелла из закона сохранения энергии (вывод Гельмгольца)

Проводник с током I помещен в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости контура, и может свободно перемещаться (рис. 10.2).

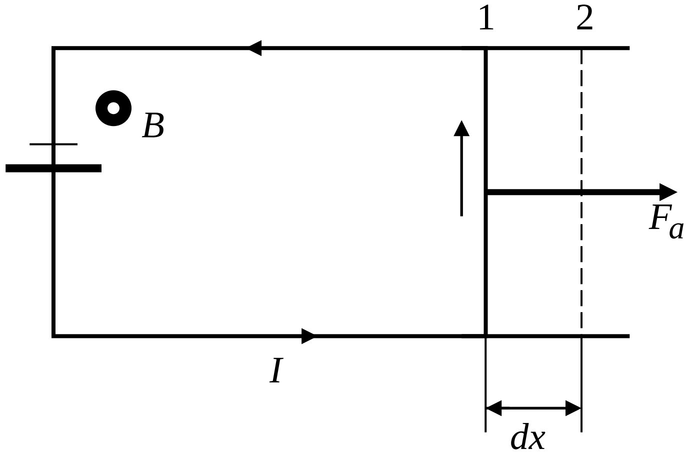


Рис. 10.2

На перемычку действует сила Ампера $F = IBl$. Под ее действием проводник переместится на dx из положения 1 в положение 2. Работа, совершаемая магнитным полем:

$$dA = Fdx = IBldx = IBdS = Id\Phi,$$

где $dS = ldx$ – площадь пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле;

$d\Phi = BdS$ – поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь.

Согласно закону сохранения энергии, работа источника тока за время будет складываться из работы на Джоулеву теплоту и работы по перемещению проводника в магнитном поле:

$$\varepsilon Idt = I^2Rdt + Id\Phi, \tag{2}$$

разделим на Idt и получим закон Ома для замкнутой цепи:

$$\varepsilon = IR + \frac{d\Phi}{dt}$$

или

$$I = \frac{\varepsilon - \dfrac{d\Phi}{dt}}{R} = \frac{\varepsilon + \varepsilon_i}{R},$$

где $-\dfrac{d\Phi}{dt} = \varepsilon_i$ и есть закон Фарадея. ЭДС электромагнитной индукции выражается в вольтах. Действительно, учитывая, что единицей магнитного потока является вебер (Вб), получим:

$$[\frac{d\Phi}{dt}] = \frac{\text{Вб}}{\text{с}} = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \text{В}.$$

10.3. Природа электромагнитной индукции

ЭДС индукции в подвижных проводниках. Пусть проводник движется в постоянном магнитном поле. Вместе с ним движутся и носители тока. На них будет действовать сила Лоренца, которая будет направлена противоположно току, т.е. она будет создавать в проводнике индукционный ток противоположного направления (рис. 10.3). Таким образом, возбуждение ЭДС индукции при движении проводника в постоянном магнитном поле объясняется действием силы Лоренца, возникающей при движении проводника:

$$\vec{F} = Q[\vec{\upsilon}\vec{B}].$$

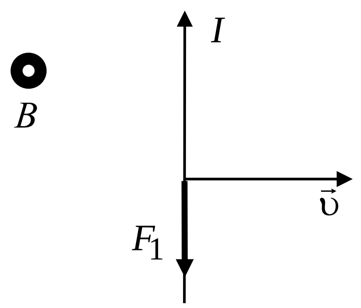


Рис. 10.3

ЭДС индукции в неподвижных проводниках. Согласно закону Фарадея, возникновение ЭДС электромагнитной индукции возможно и в случае неподвижного контура, находящегося в переменном магнитном поле. Явление электромагнитной индукции в неподвижном замкнутом проводнике, находящемся в переменном магнитном поле, нельзя объяснить с помощью силы Лоренца, т.к. она на неподвижные заряды не действует. Максвелл предположил, что переменное магнитное поле вызывает появление вихревого индуцированного электрического поля, которое и является причиной возникновения индукционного тока в проводнике. Циркуляция вектора напряженности $\vec{E}_B$ этого поля вдоль замкнутого контура L равна ЭДС электромагнитной индукции:

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \qquad (3)$$

Частная производная $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ учитывает зависимость потока магнитной индукции сквозь поверхность, натянутую на контур L, от времени t только вследствие переменности магнитного поля. *Т.о. магнитный поток изменяется со временем за счет изменения самого магнитного поля.*

Вывод: причиной возникновения ЭДС является переменное электрическое вихревое поле. В отличие от электростатического поля вихревое электрическое поле имеет замкнутые силовые линии.

10.4. Принцип действия генератора переменного тока. Вращение рамки в магнитном поле

Явление электромагнитной индукции применяется для преобразования механической энергии в энергию электрического тока. Для этого используют генераторы. Принцип действия генераторов основан на вращении плоской рамки в однородном магнитном поле.

Пусть в однородном магнитном поле ($B = \text{const}$) рамка вращается с угловой скоростью $\omega = \text{const}$. *Магнитный поток,* сцепленный с рамкой площадью S в любой момент времени t:

$$\Phi = B_n S = BS\cos\alpha = BS\cos\omega t, \qquad (4)$$

где $\alpha = \omega t$ - угол поворота рамки в момент времени t.

При вращении рамки в ней будет возникать переменная ЭДС индукции, изменяющаяся со временем по гармоническому закону:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dBS\cos\omega t}{dt} = -BS\omega(-\sin\omega t) = BS\omega\sin\omega t. \qquad (5)$$

При $\sin\omega t = 1$, $\varepsilon_{\max} = BS\omega$. Таким образом получаем выражение для *переменной ЭДС индукции*:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega\sin\omega t = \varepsilon_{\max}\sin\omega t. \qquad (6)$$

Она зависит от частоты ν, индукции магнитного поля B и площади витка S. Частота тока в России $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$ = 50 Гц.

Для увеличения индукции магнитного поля применяют мощные постоянные магниты или в электромагнитах пропускают значительный ток и используют ферромагнитные сердечники. Если вращать ряд витков, соединенных последовательно, то тем самым увеличивается S. Переменное напряжение снимается с помощью щеток.

Обратимость процесса превращения механической энергии в электрическую. Если по рамке, помещенной в магнитное поле, пропускать электрический ток, то на нее будет действовать вращающий момент

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]$$

и рамка начнет вращаться. На этом принципе основана работа электродвигателей, предназначенных для превращения электрической энергии в механическую.

10.5. Индуктивность контура. Самоиндукция

Электрический ток, текущий в замкнутом контуре, создает вокруг себя магнитное поле, индукция которого по закону Био-Савара-Лапласа пропорциональна силе тока. Следовательно, сцепленный с контуром магнитный поток Φ пропорционален току I в контуре:

$$\Phi = LI .$$

где L –коэффициент пропорциональности – индуктивность контура.

Индуктивность – физическая величина, характеризующая магнитные свойства электрической цепи.

Индуктивность контура определяется магнитным потоком, сцепленным с контуром, когда ток, создающий этот поток равен единице:

$$L = \frac{\Phi}{I} . \qquad (7)$$

Единица индуктивности: 1 Гн = 1 Вб/А.

1 Гн – индуктивность такого контура, магнитный поток самоиндукции которого при токе 1 А равен 1 Вб.

Индуктивность контура зависит от геометрической формы контура, его размеров и магнитной проницаемости среды, в которой он находится. Рассмотрим это на примере соленоида.

Индуктивность соленоида. Полный магнитный поток сквозь соленоид (потокосцепление):

$$\Phi = NBS = \frac{\mu\mu_0 N^2 I}{l} S \qquad (8)$$

Из формулы (7) следует, что индуктивность соленоида

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu\mu_0 N^2 I}{l}\frac{S}{I} = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}\frac{l}{l} = \mu_0\mu n^2 V\,, \tag{9}$$

где n – число витков на единицу длины соленоида; V - объем соленоида.

Индуктивность соленоида зависит от: числа витков N, длины L, площади S, магнитной проницаемости сердечника μ, магнитной постоянной μ_0. Индуктивность контура – аналог электрической емкости уединенного проводника.

При изменении тока в контуре изменится и сцепленный с ним магнитный поток. Следовательно, в контуре возникнет ЭДС самоиндукции ε_S. Таким образом, *самоиндукция* – возникновение ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока.

Закон Фарадея применительно к самоиндукции:

$$\varepsilon_S = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}). \tag{10}$$

Если контур не деформируется и магнитная проницаемость среды не изменяется, то L = const, $\frac{dL}{dt} = 0$ и , следовательно ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}. \tag{11}$$

Знак «–» обусловлен правилом Ленца и показывает, что наличие индуктивности в контуре приводит к замедлению изменения тока в нем.

Электрическая инертность контура. Из закона Фарадея для самоиндукции следует, что если ток со временем возрастает $\frac{dI}{dt} > 0$, то $\varepsilon_s < 0$, т.е. ток самоиндукции направлен навстречу току, обусловленному внешним источником, и замедляет его возрастание. Если ток со временем убывает $\frac{dI}{dt} < 0$, то $\varepsilon_s > 0$, т.е. индукционный ток имеет такое же направление, как и убывающий ток в контуре и замедляет его убывание.

Вывод: Контур, обладая индуктивностью, приобретает электрическую инертность, которая проявляется в том, что любое изменение тока тормозится тем сильнее, чем больше индуктивность контура.

10.6. Энергия системы проводников с током

Взаимная индукция – явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом.

Рассмотрим взаимную индуктивность контуров 1 и 2 (рис. 10.6).

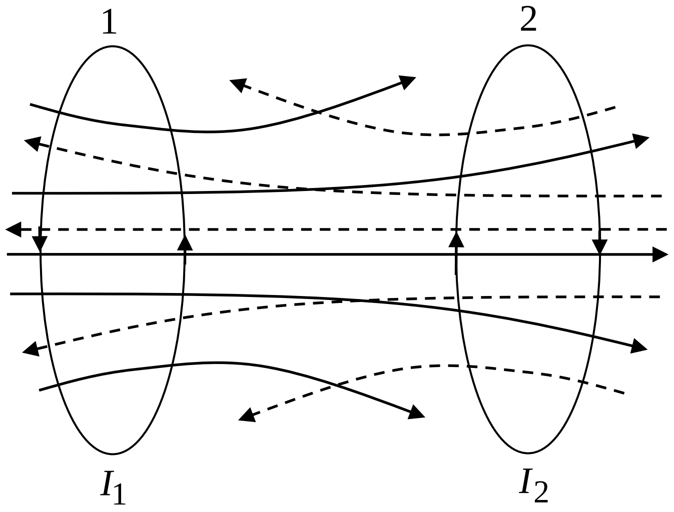


Рис. 10.6

Два контура 1 и 2 с токами I_1 и I_2 расположены близко друг к другу. При протекании в контуре 1 тока I_1 его магнитный поток пронизывает контур 2:

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1,$$

L_{21} – коэффициент пропорциональности.

Аналогично при протекании в контуре 2 тока I_2 его магнитный поток пронизывает контур 1:

$$\Phi_{12} = L_{12} I_2.$$

Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называются *взаимной индуктивностью контура*. Они зависят от геометрической формы, размеров, взаимного расположения контуров и от магнитной проницаемости среды. Расчеты, подтверждаемые опытом показывают, что $L_{12} = L_{21}$.

Если ток I_1 изменяется, то в контуре 2 индуцируется ЭДС ε_{i2}:

$$\varepsilon_{i2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}. \qquad (13)$$

Аналогично, при изменении в контуре 2 тока I_2 в контуре 1 индуцируется ЭДС ε_{i1}:

$$\varepsilon_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}. \tag{14}$$

Единица измерения взаимной индуктивности – *генри.*

Взаимная индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник. Рассчитаем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник. Этот случай имеет большое практическое значение (рис. 10.7)

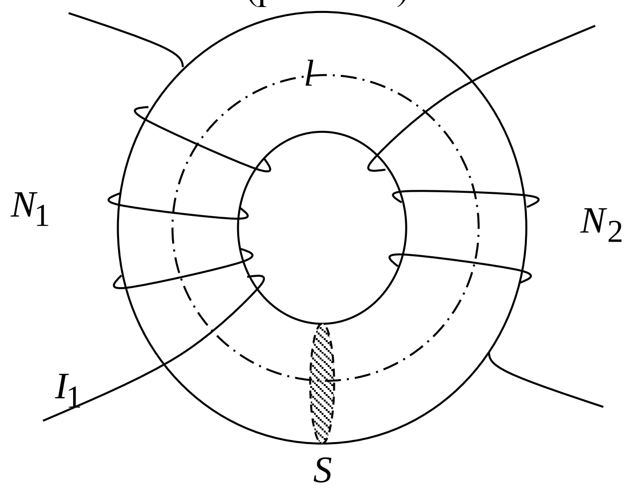


Рис. 10.7

Магнитная индукция поля, создаваемого первой катушкой с числом витков N_1, током I_1 и магнитной проницаемостью μ сердечника

$$B = \mu\mu_0\frac{N_1 I_1}{l},$$

где l – длина сердечника по средней линии.

Магнитный поток сквозь один виток второй катушки:

$$\Phi_2 = BS = \mu\mu_0\frac{N_1 I_1}{l}S.$$

Тогда полный магнитный поток сквозь N_2 витков вторичной обмотки:

$$\psi = \Phi_2 N_2 = \mu\mu_0\frac{N_1 N_2}{l}I_1 S.$$

Поток ψ создается током I_1, поэтому

$$L_{21} = \frac{\psi}{I_1} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S .$$

Вычислим магнитный поток, создаваемый катушкой 2 сквозь катушку 1. Магнитный поток сквозь один виток первой катушки:

$$\Phi_1 = BS = \mu\mu_0 \frac{N_2 I_2}{l} S .$$

Полный магнитный поток сквозь N_1 витков первичной обмотки:

$$\psi = \Phi_1 N_1 = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} I_2 S .$$

Поток ψ создается током I_2, поэтому

$$L_{12} = \frac{\psi}{I_2} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S .$$

Таким образом, взаимная индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник

$$L_{12} = L_{21} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S . \qquad (15)$$

Явление взаимной индукции лежит в основе работы трансформаторов.

Трансформатор - это устройство, применяемое для повышения или понижения напряжения переменного тока.

Трансформатор состоит из двух обмоток, одна из которых называется первичной (число витков N_1), вторая – вторичной (число витков N_2). Обе обмотки укреплены на общем замкнутом железном сердечнике (рис. 10.8).

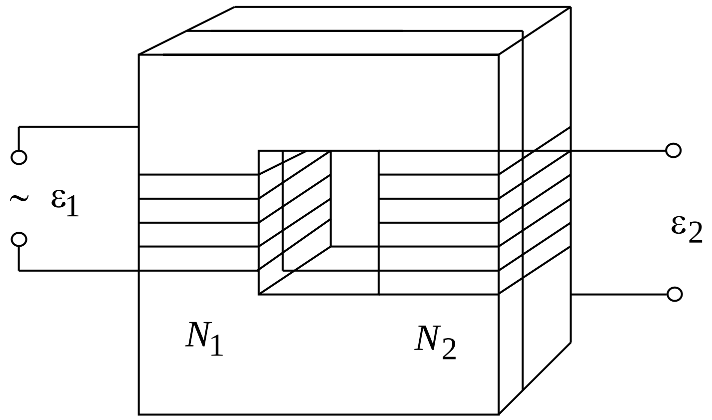


Рис. 10.8

Принцип работы трансформатора. Работа трансформатора, как уже упоминалось, основана на явлении взаимной индукции. Переменный ток I_1 первичной катушки создает в сердечнике трансформатора переменный магнитный поток Ф. Изменение этого потока вызывает во вторичной обмотке появление ЭДС взаимной индукции, а в первичной – ЭДС самоиндукции.

Ток I_1 первичной обмотки определяется, согласно закону Ома:

$$\varepsilon_1 - \frac{d}{dt}(N_1\Phi) = I_1 R_1.$$

Падение напряжения $I_1 R_1$ на сопротивлении R_1 первичной обмотки мало по сравнению с каждой из двух ЭДС, поэтому

$$\varepsilon_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}.$$

ЭДС взаимной индукции во вторичной обмотке

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}.$$

Сравнение обеих ЭДС показывает, что

$$\varepsilon_2 = -\frac{N_2}{N1}\varepsilon_1 \tag{16}$$

(знак минус указывает на то, что ЭДС в обеих обмотках противоположны по фазе).

Коэффициент трансформации. Отношение числа витков показывающее во сколько раз ЭДС во вторичной обмотке трансформатора больше (или меньше), чем в первичной, называется *коэффициентом трансформации*

$$k = \frac{N_2}{N_1}.$$

Это соотношение записывается на основе закона сохранения энергии (потерями ($\approx 2\,\%$), связанными с выделением джоулевой теплоты и появлением вихревых токов пренебрегли).

Типы трансформаторов. Пренебрегая потерями энергии, которые в современных трансформаторах не превышают $2\,\%$ и связаны в основном с выделением в обмотках джоулевой теплоты и появлением вихревых токов, и применяя закон сохранения энергии, можно записать, что мощности тока в обеих обмотках трансформатора практически одинаковы:

$$\varepsilon_2 I_2 \approx \varepsilon_1 I_1,$$

откуда учитывая соотношение (16) найдем

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1},$$

т.е. токи в обмотках обратно пропорциональны числу витков в этих обмотках.

Если $N_2 > N_1$, то трансформатор повышающий (увеличивает переменную ЭДС и понижает ток);

Если $N_2 < N_1$, то трансформатор понижающий (уменьшает ЭДС и повышает ток).

10.9. Энергия магнитного поля, объемная плотность энергии

Всякий электрический ток всегда окружен магнитным полем. Поэтому возникает вопрос: где именно сосредоточена энергия магнитного поля: внутри проводов, где движутся электрические заряды или в магнитном поле, т.е. в среде, окружающей токи?

Рассмотрим контур индуктивностью L, по которому течет ток I. С этим контуром связан магнитный поток

$$\Phi = LI\,. \tag{17}$$

При изменении тока на dI магнитный поток меняется на

$$d\Phi = LdI .$$

Для изменения магнитного потока надо совершить работу

$$dA = Id\Phi = LIdI . \qquad (18)$$

Тогда работа по созданию магнитного потока Φ равна:

$$A = \int_0^I LIdI = \frac{LI^2}{2} . \qquad (19)$$

Магнитное поле появляется и исчезает вместе с появлением и исчезновением тока в проводнике. Следовательно, *энергия магнитного поля, связанного с контуром равна работе, которая затрачивается током на создание этого поля*.

$$W = \frac{LI_2}{2} . \qquad (20)$$

Исследование свойств переменных магнитных полей, в частности распространения электромагнитных волн, явилось доказательством того, что *энергия магнитного поля локализована в пространстве*.

Магнитное поле соленоида. Объемная плотность энергии. Энергию магнитного поля можно представить как функцию характеризующих его величин. Рассмотрим однородное поле длинного соленоида. В формулу (20) подставим выражение для индуктивности соленоида

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} ,$$

и получим выражение для энергии магнитного поля соленоида:

$$W = \frac{1}{2}\mu\mu_0 \frac{N^2 I^2}{l} S . \qquad (21)$$

Магнитное поле внутри соленоида

$$B = \mu\mu_0 \frac{NI}{l} .$$

Учтем, что $B = \mu\mu_0 H$, тогда энергия магнитного поля

$$W = \frac{1}{2}\mu\mu_0 \frac{N^2 B^2 l^2}{(\mu\mu_0)^2 N^2 l} S = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} lS = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V = \frac{BH}{2} V, \qquad (22)$$

где $V = lS$ - объем соленоида.

Введем *объемную плотность энергии* – энергию единицы объема. Магнитное поле соленоида однородно и сосредоточено внутри соленоида, поэтому энергия распределена в нем с постоянной объемной плотностью ω:

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{BH}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \qquad (23)$$

Эта формула справедлива и для неоднородных магнитных полей.

Сравнение объемных плотностей энергий электростатического и магнитного полей:

$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}$ - объемная плотность энергии электростатического поля, $\omega = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{BH}{2}$ - объемная плотность энергии магнитного поля.

Эти формулы аналогичны, если электрические величины заменить магнитными.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит явление электромагнитной индукции. Опишите опыты Фарадея.
2. Напишите и сформулируйте основной закон явления электромагнитной индукции.
3. Сформулируйте правило Ленца. Проиллюстрируйте его примерами. Как направлен индукционный ток?
4. Объясните возникновение ЭДС индукции в проводнике, движущемся в магнитном поле.
5. Объясните возникновение ЭДС индукции в неподвижном проводнике, находящемся в переменном магнитном поле.
6. Почему электрическое поле, возбуждаемое переменным магнитным полем, является вихревым?
7. Что такое токи Фуко? Каково их полезное и вредное действие?
8. Каков принцип действия генератора переменного тока, электрического двигателя? Выведите выражение для ЭДС индукции в плоской рамке, равномерно вращающейся в однородном магнитном поле. От чего она зависит и как ее можно увеличить?

9. В чем состоят явления самоиндукции и взаимной индукции? Напишите выражение для ЭДС в обоих случаях.

10. Что такое экстратоки самоиндукции? Как они направлены? Получите выражение для тока при размыкании цепи, при замыкании цепи. Что такое время релаксации?

11. Что называется индуктивностью проводящего контура и взаимной индуктивностью двух контуров. Каков их физический смысл? От чего они зависят и в каких единицах измеряются?

12. Каков принцип действия трансформатора и для чего он применяется? Что такое коэффициент трансформации? Какие типы трансформаторов Вы знаете?

13. В однородном магнитном поле (B = 0,1 Тл) равномерно с частотой $n = 10$ вращается рамка, содержащая 1000 витков. Площадь рамки $S = 300\,\text{см}^2$. Определите мгновенное значение ЭДС индукции, соответствующее углу поворота рамки в 30°.

14. Чему равна энергия магнитного поля и где она локализована?

15. Запишите и проанализируйте выражения для объемной плотности энергии электростатического и магнитного полей. Чему равна объемная плотность энергии магнитного поля?

16. Напряженность магнитного поля возросла в два раза. Как изменилась объемная плотность энергии магнитного поля?

ЛЕКЦИЯ 11

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

11.1. Магнитные моменты электронов и атомов

Все тела при внесении их во внешнее магнитное поле намагничиваются в той или иной степени, т.е. создают собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее поле. Магнитные свойства вещества определяются магнитными свойствами электронов и атомов.

Согласно гипотезе Ампера, в любом теле существуют микроскопические токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах. Принимается, что электрон в атоме, движется по круговым орбитам.

Орбитальный магнитный момент электрона $\vec{p}_m$. Наличие $\vec{p}_m$ обусловлено тем, что электрон, движущийся по круговым орбитам эквивалентен круговому току:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}\,. \tag{1}$$

Модуль магнитного момента:

$$p_m = IS = e\nu S\,, \tag{2}$$

где $I = e\nu$ – сила тока; ν – частота вращения электрона по орбите; S – площадь орбиты.

Если электрон движется по часовой стрелке, то ток направлен против часовой стрелки и вектор $\vec{p}_m$ в соответствии с правилом правого винта направлен перпендикулярно плоскости орбиты электрона вверх вдоль оси вращения.

Орбитальный механический момент электрона $\vec{L}_l$. Электрон движется по круговой орбите и обладает механическим моментом импульса $\vec{L}_l$. Модуль момента импульса:

$$L_i = m\upsilon r = m\omega r^2 = m2\pi\nu r^2 = 2m\nu S\,, \tag{3}$$

где $\upsilon = \omega R = 2\pi\nu r$; $S = \pi r^2$.

Направление $\vec{L}_l$ определяется по правилу правого винта (поворот от $\vec{r}$ к $\vec{\upsilon}$).

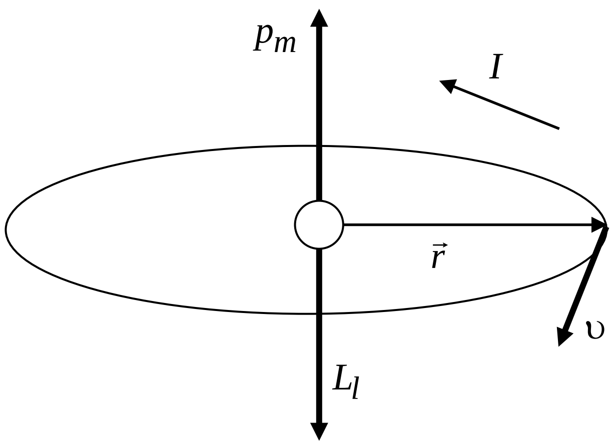


Рис. 11.1

$$L = m\text{v}r\,;$$

$$\vec{L} = m[\vec{r}\vec{\text{v}}].$$

Связь между векторами $\vec{p}_m$ *и* $\vec{L}_l$. Из рис. 11.1. видно, что направления $\vec{p}_m$ и $\vec{L}_l$ противоположны и связаны соотношением:

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m}\vec{L}_l = g\vec{L}_l\,. \tag{4}$$

Величина $g = -\frac{e}{2m}$ - это *гиромагнитное отношение* орбитальных моментов (справедливо для любой орбиты). Знак «–» обусловлен противоположным направлением векторов $\vec{p}_m$ и $\vec{L}_l$.

Экспериментальное определение гиромагнитного отношения проведено в опытах Эйнштейна и де Гааза. Они наблюдали поворот свободно подвешенного на тонкой кварцевой нити железного стержня при его намагничивании во внешнем магнитном поле (по обмотке соленоида пропускали переменный ток с частотой, равной частоте крутильных колебаний стержня). При исследовании вынужденных крутильных колебаний стержня определялось гиромагнитное отношение, которое оказалось равным $-\frac{e}{m}$. Таким образом, знак носителей, обусловливающих молекулярные токи, совпадал с зарядом электрона, а гиромагнитное отношение оказалось в два раза большим, чем введенная нами величина: т.е., $g = -\frac{e}{2m}$.

Согласно этому результату было предположено, что электрон наряду с орбитальным моментом обладает еще *собственным механическим моментом импульса – спином* $\vec{L}_{ls}$.

Считалось, что спин обусловлен вращением электрона вокруг своей оси, что привело к целому ряду противоречий. В настоящее время установлено, что *Спин* – неотъемлемое свойство электрона, подобно его массе и заряду. Спину электрона соответствует собственный (спиновый) магнитный момент $\vec{p}_{ms}$.

Собственный (спиновый) магнитный момент электрона $\vec{p}_{ms}$. $\vec{p}_{ms}$ - пропорционален $\vec{L}_{ls}$ и направлен в противоположную сторону:

$$\vec{p}_{ms} = -g_s \vec{L}_{ls}. \tag{5}$$

Величина g_s – гиромагнитное отношение спиновых моментов.

Проекция собственного магнитного момента на направление вектора B может принимать только одно из следующих двух значений:

$$p_{msB} = \pm\frac{e\hbar}{2m} = \mu_B = \frac{eh}{4\pi m}, \tag{6}$$

где $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ (h – постоянная Планка).

Магнетон Бора

$$\frac{e\hbar}{2m} = \mu_B$$

единица магнитного момента электрона.

В общем случае магнитный момент электрона складывается из орбитального и спинового моментов. Магнитный момент атомов складывается из магнитных моментов электронов и магнитного момента ядра. Магнитные моменты ядер в тысячи раз меньше магнитных моментов электронов, поэтому ими пренебрегают.

Таким образом, *общий магнитный момент атома* (молекулы) равен векторной сумме магнитных моментов (орбитальных и спиновых), входящих в атом (молекулу) электронов:

$$\vec{p}_a = \sum \vec{p}_m + \sum p_{mS}. \tag{7}$$

Вывод: магнитные свойства вещества определяются магнитными свойствами электронов и атомов.

11.2. Пара- и диа- магнетики

Магнетик – всякое вещество, способное под действием магнитного поля приобретать магнитный момент – намагничиваться.

По своим магнитным свойствам магнетики подразделяются на три основные группы: *диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.*

Парамагнетики - вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле по направлению поля. Молекулы парамагнетиков обладают магнитным моментом в отсутствии внешнего магнитного поля $\vec{P}_a \neq 0$.

Однако, вследствие теплового движения молекул их магнитные моменты ориентированы беспорядочно. При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле устанавливается *преимущественная* ориентация магнитных моментов по полю (полной ориентации «мешает» тепловое движение атомов). Таким образом, парамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, совпадающее по направлению с внешним полем и усиливающее его. Этот эффект называется парамагнитным. При ослаблении внешнего магнитного поля до нуля ориентация магнитных моментов вследствие теплового движения нарушается и парамагнетик размагничивается.

Примеры: редкоземельные элементы, Pt, Al, O_2…

Диамагнетики – вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле против направления поля. Молекулы диамагнетиков не обладают магнитным моментом $\vec{P}_a \neq 0$. Во внешнем магнитном поле индуцируются элементарные круговые токи (электронные орбиты атомов совершают прецессионные движения: вектор магнитного момента p_m вращается вокруг вектора B с некоторой угловой скоростью). Так как этот микроток индуцирован внешним магнитным полем, то согласно правилу Ленца, у атома появляется составляющая магнитного поля, направленная противоположно внешнему полю. Наведенные составляющие магнитных полей атомов (молекул) складываются и образуют собственное магнитное поле, ослабляющее внешнее магнитное поле. Таким образом, диамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, направленное против внешнего поля и ослабляющее его. Этот эффект называется диамагнитным.

Примеры: большинство органических соединений, смолы, углерод, Bi, Ag, Au, Cu…

Вывод: диамагнетизм свойственен всем веществам: атомы всех веществ являются носителями диамагнитных свойств. Если магнитный момент атомов – велик, то парамагнитные свойства преобладают над диамагнитными и вещество является парамагнетиком. Если магнитный момент атомов мал, то преобладают диамагнитные свойства и вещество является диамагнетиком.

11.3. Намагниченность. Магнитное поле в веществе

Для количественного описания намагниченности магнетиков вводят векторную величину – *намагниченность* – магнитный момент единицы объема магнетика:

$$\vec{J} = \frac{\vec{p}_m}{V} = \frac{\sum \vec{p}_a}{V}. \tag{8}$$

Магнитный момент магнетика – сумма магнитных моментов отдельных молекул:

$$\vec{p}_m = \sum \vec{p}_a .$$

Связь между векторами $\vec{J}$ *и* $\vec{H}$. Существует линейная зависимость между намагниченностью и напряженностью поля, вызывающего намагничевание (соблюдается в случае несильных полей)

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \tag{9}$$

где χ - *магнитная восприимчивость вещества*. χ - безразмерная величина. Для диамагнетиков $\chi < 0$ (поле молекулярных токов противоположно внешнему), для пармагнетиков $\chi > 0$ (поле молекулярных токов совпадает с внешним).

Для парамагнетиков: $10^{-6} < \chi < 10^{-2}$ (O_2 (жидкий) $3{,}6 \cdot 10^{-3}$)

Для диамагнетиков: $10^{-9} < \chi < 10^{-4}$ (N_2 (газ) $-6{,}75 \cdot 10^{-9}$)

Магнитное поле в веществе складывается из двух полей: внешнего поля, создаваемого током и поля, создаваемого намагниченным веществом. *Вектор магнитной индукции результирующего поля* в магнетике равен векторной сумме магнитных индукций внешнего поля B_0 и поля микротоков B':

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}', \tag{10}$$

где $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$ - вектор магнитной индукции, характеризующий магнитное поле макротоков; $\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}$ - вектор магнитной индукции, характеризующий магнитное поле микротоков.

Для описания поля микротоков рассмотрим магнетик в виде кругового цилиндра сечения S и длины l, внесенного в однородное внешнее магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$. Возникающее в магнетике магнитное поле микротоков будет направлено противоположно внешнему полю для диамагнетиков и совпадать с ним для парамагнетиков. Плоскости всех микротоков расположатся перпендикулярно вектору $\vec{B}_0$, т.к. векторы их магнитных моментов $\vec{p}_m$ параллельны $\vec{B}_0$ (для парамагнетиков) и антипараллельны $\vec{B}_0$ (для диамагнетиков).

Если рассмотреть любое сечение цилиндра, перпендикулярное его оси, то во внутренних участках сечения магнетика молекулярные токи соседних атомов направлены навстречу друг другу и взаимно компенсируются (рис. 11.2). Нескомпенсированными будут молекулярные токи, выходящие на боковую поверхность цилиндра.

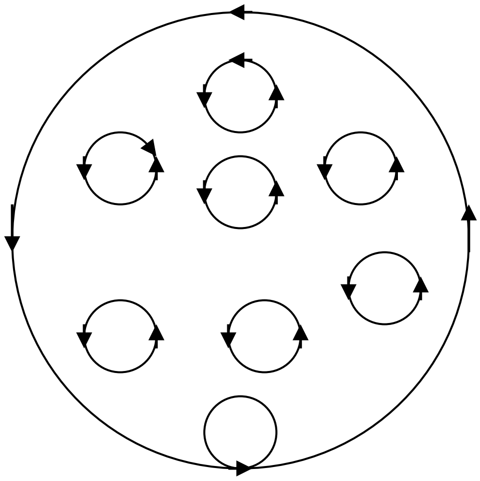


Рис. 11.2

Ток, текущий по боковой поверхности цилиндра, подобен току соленоида и создает внутри него магнитное поле, магнитную индукцию $\vec{B}'$ которого можно вычислить по формуле для магнитной индукции поля внутри соленоида (в вакууме)

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l} = \mu_0 n I\,.$$

Для $N = 1$ (соленоид из одного витка):

$$B' = \frac{\mu_0 I'}{l}, \tag{11}$$

I' - сила молекулярного тока, l – длина рассматриваемого цилиндра, $\mu_0 = 1$ – магнитная постоянная.

С другой стороны, $\dfrac{I'}{l}$ - это линейная плотность тока (ток, приходящийся на единицу длины цилиндра). Магнитный момент такого тока

$$p_m = I'S = \frac{I'lS}{l} = \frac{I'V}{l}, \qquad (12)$$

где V – объем магнетика.

Тогда, согласно формуле (8) намагниченность $\vec{J}$ равна:

$$\vec{J} = \frac{\vec{p}_m}{V} = \frac{I'}{l}. \qquad (13)$$

Сопоставляя формулы (11) и (13), получим выражение для магнитного поле микротоков:

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}. \qquad (14)$$

Таким образом, *магнитное поле в веществе:*

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H} = \mu_0 (1+\chi) \vec{H} \qquad (15)$$

откуда видно, что

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 (1+\chi)}. \qquad (16)$$

Безразмерная величина $\mu = 1+\chi$ называется *магнитной проницаемостью вещества.*

Для парамагнетиков $\mu > 1$, для диамагнетиков $\mu < 1$.

С учетом этого, магнитное поле макро и микротоков:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \qquad (17)$$

Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$). Циркуляция вектора магнитной индукции B по произвольному замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов проводимости и молекулярных токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную.

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B_l\,dl = \mu_0(I + I'), \tag{18}$$

где I и I' - алгебраические суммы макротоков (токов проводимости) и микротоков (молекулярных токов), охватываемых произвольным замкнутым контуром L.

Таким образом, вектор $\vec{B}$ характеризует результирующее поле, созданное как макроскопическими токами в проводниках (токами проводимости), так и микроскопическими токами в магнетиках, поэтому линии вектора магнитной индукции не имеют источников и являются замкнутыми.

Теорема о циркуляции вектора намагниченности $\vec{J}$. Циркуляция вектора намагниченности по произвольному замкнутому контуру L равна алгебраической сумме молекулярных токов, охватываемых этим контуром.

$$\oint_L \vec{J}d\vec{l} = I'. \tag{19}$$

Подставим (2) в (1) и получим:

$$\oint_L \vec{B}dl = \mu_0 I + \mu_0 I' = \mu_0 I + \mu_0 \oint_L \vec{J}d\vec{l} = \oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}\right)d\vec{l} = I. \tag{20}$$

Тогда напряженность магнитного поля:

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \vec{H}. \tag{21}$$

Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$. Циркуляция вектора $\vec{H}$ по произвольному замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = I. \tag{22}$$

Контрольные вопросы

1. Чем определяются магнитные свойства вещества? Что такое орбитальный магнитный момент, орбитальный механический момент и собственный механический момент импульса электрона? Как они связаны между собой?

2. Что называется гиромагнитным отношением? Опишите опыт Эйнштейна и Газа по экспериментальному определению гиромагнитного отношения.

3. Что такое магнетон Бора?

4. Из каких магнитных моментов складывается магнитный момент атома?

5. Какие вещества называются диамагнетиками? Что происходит с диамагнетиком при его внесении в магнитное поле?

6. Какие вещества называются парамагнетиками? Что происходит с парамагнетиком при его внесении в магнитное поле?

7. Что называется вектором намагниченности и как он связан с индукцией магнитного поля.

8. Какова связь между магнитной проницаемостью и магнитной восприимчивостью вещества?

9. Объясните физический смысл циркуляции по произвольно замкнутому контуру векторов $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{J}$.

ЛЕКЦИЯ 12

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА (продолжение)

12.1. Условия на границе раздела двух магнетиков

Установим связь для векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ на границе раздела двух однородных магнетиков (магнитные проницаемости μ_1 и μ_2, соответственно) при отсутствии на границе тока проводимости. (Рис. 12.1).

Нормальные составляющие векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ на границе раздела.

Нормальные составляющие векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$.

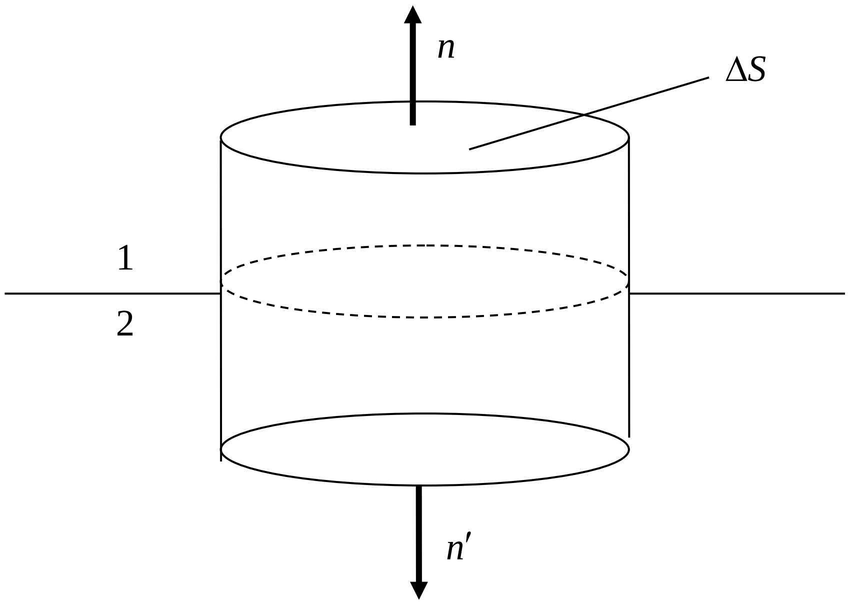


Рис. 12.1

Построим на границе раздела магнетиков 1 и 2 прямой цилиндр ничтожно малой высоты, одно основание которого находится в первом магнетике, а другое – во втором. Основания ΔS настолько малы, что в пределах каждого из них вектор B одинаков. Согласно теореме Гаусса

$$B_{n1}\Delta S = B_{n2}\Delta S = 0.$$

Нормали $\vec{n}$ и $\vec{n}'$ направлены к основаниям цилиндра противоположно.

Поэтому

$$B_{n1} = B_{n2}. \qquad (1)$$

Нормальные составляющие векторов H_1 *и* H_2.

Заменив, согласно $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$, проекции вектора $\vec{B}$ проекциями вектора $\vec{H}$, умноженными на $\mu_0 \mu$, получим:

$$\mu_0 \mu_1 H_{n1} = \mu_0 \mu_2 H_{n2};$$

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{2}$$

Тангенциальные составляющие векторов $\vec{B}$ *и* $\vec{H}$ *на границе раздела.*

Тангенциальные составляющие векторов $\vec{H}_1$ *и* $\vec{H}_2$.

Вблизи границы раздела построим небольшой замкнутый контур ABCDA длиной *l* (рис. 12.2).

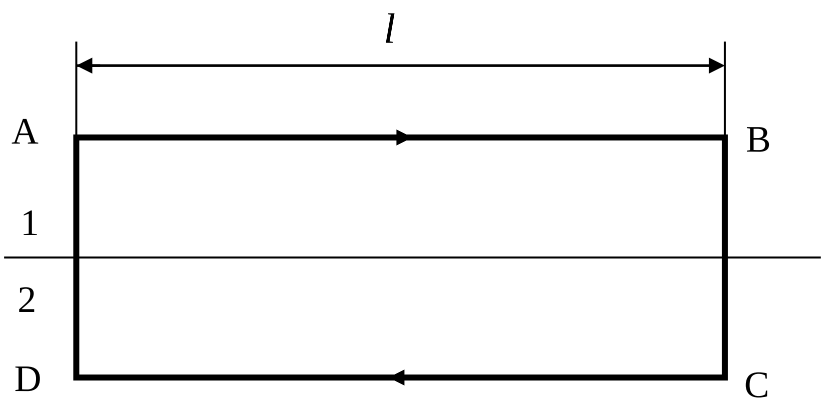


Рис. 12.2

Согласно теореме о циркуляции вектора $\vec{H}$

$$\oint_{ABCDA} \vec{H} d\vec{l} = 0$$

(токов проводимости на границе раздела нет), откуда

$$H_{\tau 1} l - H_{\tau 2} l = 0$$

(знаки интегралов по *AB* и *CD* разные, так как пути интегрирования противоположные, а интегралы по участкам *BC* и *DA* ничтожно малы). Поэтому:

$$H_{\tau 1} l = H_{\tau 2} l\,. \tag{3}$$

Тангенциальные составляющие векторов $\vec{B}_1$ *и* $\vec{B}_2$.

Заменив, согласно $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$, проекции вектора $\vec{H}$ проекциями вектора $\vec{B}$, деленными на $\mu_0 \mu$, получим следующие выражения:

$$H_{\tau 1} = \frac{B_{\tau 1}}{\mu_0 \mu_1};$$
$$H_{\tau 2} = \frac{B_{\tau 2}}{\mu_0 \mu_2}; \tag{4}$$
$$\frac{B_{n1}}{B_{n2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора $\vec{B}$ (B_n) и тангенциальная составляющая вектора $\vec{H}$ (H_τ) изменяется непрерывно (не претерпевают скачка), а тангенциальная составляющая вектора $\vec{B}$ (B_τ) и нормальная составляющая вектора $\vec{H}$ (H_n) претерпевают скачок.

Из полученных условий (6)-(9) для составляющих векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ следует, что линии этих векторов преломляются (рис. 12.3).

Закон преломления линий $\vec{H}$ *(а значит, и линий* $\vec{B}$*):*

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_2}{\mathrm{tg}\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{5}$$

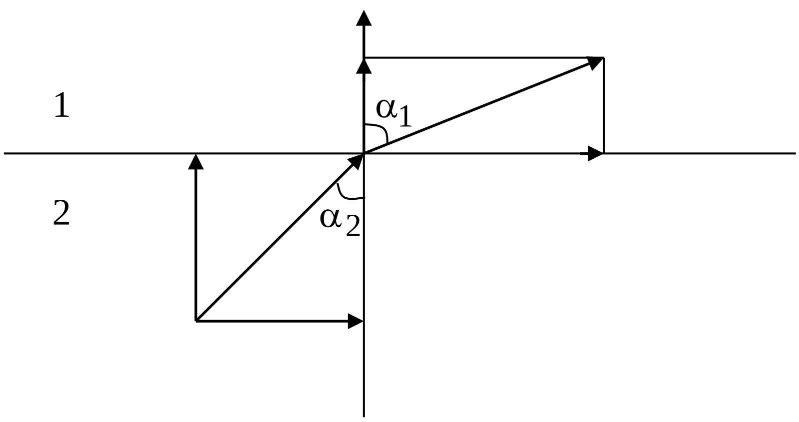


Рис. 12.3

12.2. Ферромагнетики и их свойства

Ферромагнетики – сильномагнитные вещества, обладающие спонтанной намагниченностью (даже в отсутствие внешнего поля), которая подвержена сильному влиянию внешних факторов – изменению температуры, магнитного поля, деформации.

Внутреннее магнитное поле в ферромагнетиках может в сотни и тысячи раз превышать вызвавшее его внешнее магнитное поле. Магнитная восприимчивость ферромагнетиков положительна и весьма велика. К числу ферромагнетиков относятся железо, никель, кобальт и ряд сплавов, причем ферромагнетизм присущ этим веществам, находящимся только в кристаллическом состоянии.

Ферромагнетики помимо способности сильно намагничиваться, обладают еще и другими свойствами, существенно отличающими их от диа- и парамагнетиков.

Зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля. В отличие от диа- и парамагнетиков (слабомагнитных веществ), для которых J и H линейна, для ферромагнетиков (сильномагнитных веществ) эта зависимость сложная: по мере возрастания H намагниченность J сначала растет быстро, затем медленнее, достигая магнитного насыщения $J_{\text{нас}}$. (рис. 12.4). Эта зависимость была впервые изучена в 1878 г. методом баллистического гальванометра для железа русским физиком Столетовым А.Г.

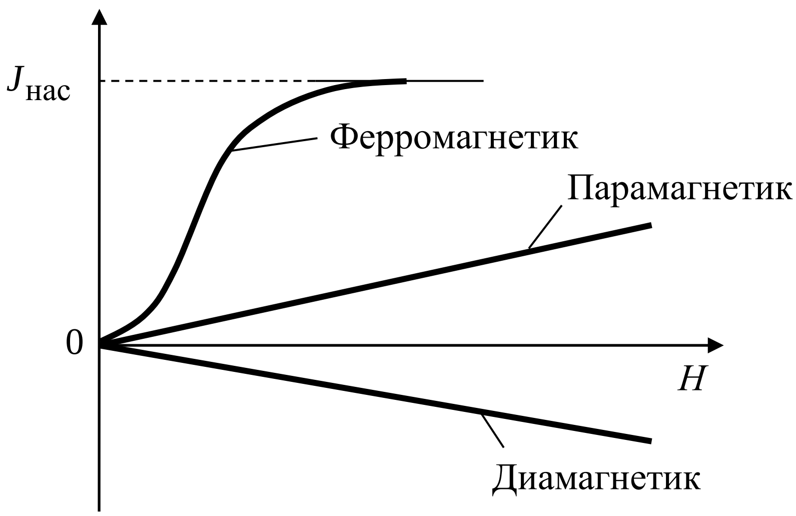


Рис. 12.4

Зависимость магнитной проницаемости ферромагнетика от напряженности магнитного поля. Существенной особенностью ферромагнетиков является наличие зависимости относительной магнитной проницаемости μ от величины напряженности *H* приложенного магнитного поля. Вначале μ быстро растет, достигает максимального значения, а затем убывает, стремясь в случае сильных полей к 1 (рис. 12.5). Максимальные значения μ для ферромагнетиков очень велики: Fe – 5000; кремнистое железо (3 % Si) – 10000; сплав супермаллоя (78 % Ni + 22 % Fe) – 800000.

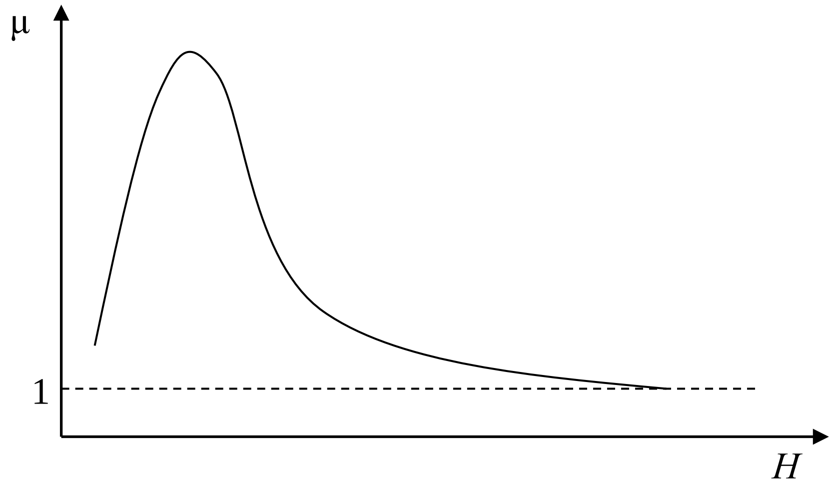


Рис. 12.5

Точка Кюри. Для каждого ферромагнетика существует определенная температура (точка Кюри), при которой он теряет свои магнитные свойства. При нагревании образца выше точки Кюри ферромагнетик превращается в обычный парамагнетик. Переход вещества из ферромагнитного состояния в парамагнитное, происходящий в точке Кюри, не сопровождается поглощением или выделением теплоты, т.е. в точке Кюри происходит фазовый переход второго рода.

Некоторые значения точек Кюри: для никеля – 631 К; железа – 1042 К; кобальта – 1400 К.

Роль доменов в механизме ферромагнетизма. Согласно теории П. Вейсса ферромагнетики при температурах ниже точки Кюри обладают спонтанной намагниченностью независимо от наличия внешнего намагничивающего поля. Однако, многие ферромагнитные материалы даже при температуре ниже точки Кюри не намагничены. По современным представлениям, ферромагнетик ниже точки Кюри разбивается на большое число малых микроскопических областей – доменов, самопроизвольно намагниченных до насыщения. Линейные размеры доменов составляют 10^{-2} - 10^{-3} см. При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты отдельных доменов ориентированы хаотично и компенсируют друг друга, поэтому результирующий магнитный момент ферромагнетика равен 0 и ферромагнетик не намагничен.

Внешнее магнитное поле в ферромагнетике ориентирует моменты не отдельных частиц, а целых областей – доменов, причем домены поворачиваются по полю скачком.

Природа элементарных носителей ферромагнетизма. Установлено, что магнитные свойства ферромагнетиков определяются спиновыми магнитными моментами электронов (прямым экспериментальным указанием этого служит опыт Эйнштейна и де Гааза). Установлено также, что ферромагнитными свойствами могут обладать только кристаллические вещества, в атомах которых имеются недостроенные электронные оболочки с некомпенсированными спинами. В подобных кристаллах могут возникать силы, не магнитной, а электрической природы, которые вынуждают спиновые магнитные моменты электронов ориентироваться параллельно друг другу, что и приводит к возникновению спонтанного намагничивания. Эти силы, называемые обменными силами, имеют квантовую природу – они обусловлены волновыми свойствами электронов.

Существуют вещества, в которых обменные силы вызывают антипараллельную ориентацию спиновых магнитных моментов электронов. Такие вещества называются *антиферромагнетиками*, например, соединения марганца (MnO, MnF_2), железа (FeO, $FeCl_2$) и др. Для них также существует антиферромагнитная точка Кюри (точка Нееля), при которой магнитное упорядочение спиновых моментов нарушается и антиферромагнетик превращается в парамагнетик.

Ферриты – полупроводниковые ферромагнетики: $Me{\cdot}Fe_2O_3$, где Me – ион двухвалентного металла (Mn, Co, Cu, Mg, Zn, Cd, Fe). Они отличаются заметными антиферромагнитными свойствами и большим электрическим сопротивлением. Ферриты применяются для изготовления постоянных магнитов, ферритовых антенн, сердечников радиочастотных контуров, для покрытия пленок в магнитофонах и видеомагнитофонов.

Магнитный гестерезис (греч. запаздывание). Рассмотрим намагничивание ферромагнетика (рис 12.6).

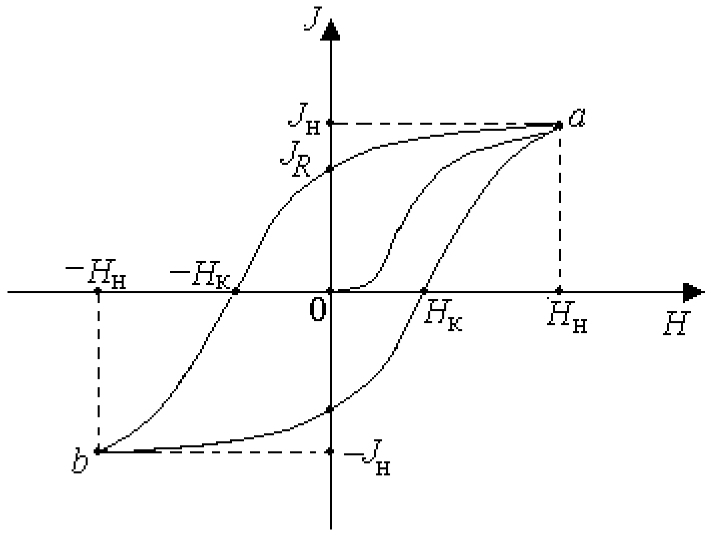


Рис. 12.6

Характерная особенность ферромагнетиков состоит в том, что для них зависимость J от H нелинейная и определяется предысторией намагничивания ферромагнетика. Это явление получило название магнитного гистерезиса.

С увеличением напряженности H магнитного поля от нуля намагниченность J увеличивается по кривой $0a$ (основная кривая намагничивания) до некоторого значения насыщения $J_{н}$. Если затем уменьшить H, то J изменится по кривой, лежащей выше основной кривой. При $H = 0$ намагниченность не равна нулю, т.е. у образца имеется *остаточная намагниченность* J_R. Это объясняется тем, что у части доменов сохраняется преимущественная ориентация их магнитных моментов. Чтобы полностью размагнитить образец, нужно создать вокруг него магнитное поле с напряженностью $H_{к}$, направленное в противоположную сторону. Величина $H_{к}$ называется *коэрцитивной силой*. При дальнейшем увеличении магнитного поля, противоположного первоначальному полю, намагниченность снова достигает насыщения (точка b). Возвращаясь постепенно к напряженности $H_{н}$, получим замкнутую кривую, которая называется *петлей гистерезиса*.

Различают *мягкие и жесткие ферромагнетики. Мягкие ферромагнетики* характеризуются малой коэрцитивной силой (узкой петлей гистерезиса), *жесткие* – большой коэрцитивной силой (широкой петлей гистерезиса)

Жесткие ферромагнетики (углеродистые и вольфрамовые стали) применяются для изготовления постоянных магнитов, а мягкие (мягкое железо, сплав железа с никелем) – для изготовления сердечников трансформаторов.

Гистерезис приводит к тому, что намагничивание ферромагнетика не является однозначной функцией H, т.е. одному и тому же значению H соответствует несколько значений J.

Существование остаточной намагниченности делает возможным изготовление *постоянных магнитов*, т.е. тел, которые без затрат энергии на поддержание макроскопических токов обладают магнитным моментом и создают в окружающем их пространстве магнитное поле. Постоянный магнит тем лучше сохраняет свои свойства, чем больше коэрцитивная сила материала, из которого он изготовлен. Поэтому постоянные магниты изготавливают из жестких ферромагнетиков с большой коэрцитивной силой и широкой петлей гистерезиса (например, углеродистые и вольфрамовые стали).

Мягкие ферромагнетики с малой коэрцитивной силой и узкой петлей гистерезиса применяют для изготовления сердечников трансформаторов (например, мягкое железо, сплав железа с никелем). Это связано с тем, что работа, совершаемая при перемагничивании, пропорциональна площади петли гистерезиса, а значит, такие сердечники подвержены меньшему нагреву.

Магнитострикция (явление открыто Д. Джоулем в 1842 г) - изменение линейных размеров и объема вещества в процессе намагничивания ферромагнетика. Величина и знак эффекта зависят от напряженности $\vec{H}$ намагничивающего поля, от природы ферромагнетика и ориентации кристаллографических осей по отношению к полю.

Контрольные вопросы

1. Выведите условие для векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ на границе раздела двух магнетиков.

2. Объясните петлю гистерезиса ферромагнетика.

3. Что такое коэрцитивная сила?

4. Какие ферромагнетики являются «мягкими»? «жесткими»? Где их применяют?

5. Какую температуру для ферромагнетиков называют точкой Кюри?

6. Чем определяются магнитные свойства ферромагнетиков согласно теории ферромагнетизма?

7. Каков механизм намагничивания ферромагнетиков?

8. Что такое антиферромагнетики? Что такое точка Нееля?

ЛЕКЦИЯ 13

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

13.1. Вихревое электрическое поле

Идея Максвелла о возбуждении электрического поля переменным магнитным полем. Из закона Фарадея $\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ следует, что любое изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции приводит к возникновению электродвижущей силы индукции и вследствие этого появляется индукционный ток. Следовательно, возникновение ЭДС электромагнитной индукции возможно и в неподвижном контуре, находящемся в переменном магнитном поле. Однако ЭДС в любой цепи возникает только тогда, когда в ней на носители тока действуют сторонние силы – силы неэлектростатического происхождения. Эти сторонние силы не связаны ни с тепловыми, ни с химическими процессами в контуре; их возникновение нельзя объяснить и силами Лоренца, т.к. они не действуют на неподвижные заряды.

По гипотезе Максвелла: всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле E_B, которое и является причиной возникновения индукционного тока в контуре. Контур является лишь прибором, обнаруживающим это электрическое поле.

Циркуляция вектора напряженности вихревого электрического поля. Циркуляция вектора напряженности $\vec{E}_B$ вихревого электрического поля вдоль замкнутого контура *L* равна ЭДС электромагнитной индукции:

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \qquad (1)$$

Подставим в формулу (1) выражение

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

и получим *циркуляцию по данному контуру по произвольной поверхности, опирающейся на контур*:

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Если контур и поверхность неподвижны, то операцию дифференцирования и интегрирования можно поменять местами:

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \qquad (2)$$

Это выражение - *первое уравнение Максвелла*, где знак частной производной подчеркивает тот факт, что интеграл $\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$ является функцией только времени.

Итак, изменяющееся со временем магнитное поле, порождает электрическое поле. Электрическое поле $\vec{E}_B$ существенно отличается от электростатического поля $\vec{E}_Q$.

Сравнение циркуляции векторов $\vec{E}_Q$ *и* $\vec{E}_B$. Электростатическое поле потенциально, его линии напряженности заканчиваются и начинаются на зарядах. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля $\vec{E}_Q$ по любому контуру равна:

$$\oint_L \vec{E}_Q d\vec{l} = 0. \qquad (3)$$

Циркуляция вектора $\vec{E}_B$ наоборот отлична от нуля (см. формулу 1). *Вывод*: электрическое поле $\vec{E}_B$, возбуждаемое магнитным полем, как и само магнитное поле – *вихревое.* Линии напряженности $\vec{E}_B$ *замкнуты*.

13.2. Ток смещения

Идея о симметрии во взаимозависимости электрического и магнитного полей. Основная идея Максвелла заключается в том, что между электрическим и магнитными полями имеется и обратное соотношение: изменяющееся со временем электрическое поле, должно приводить к появлению магнитного поля.

Для установления количественных соотношений между изменяющимся электрическим полем и появляющимся магнитным полем Максвелл ввел в рассмотрение *ток смещения.* Изменяющееся электрическое поле создает ток смещения, которое порождает магнитное поле.

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую конденсатор (рис. 13.1):

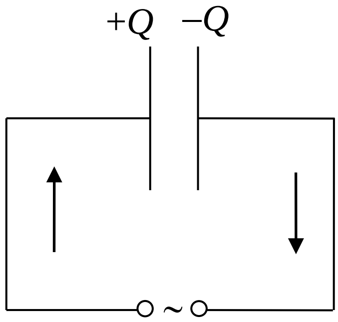


Рис. 13.1

Движение зарядов, т.е. *ток проводимости* I имеет место во всей цепи кроме зазора между обкладками конденсатора. По Максвеллу, переменное электрическое поле в конденсаторе в каждый момент времени создает такое магнитное поле, как если бы между обкладками конденсатора существовал ток смещения, равный току в подводящих проводах. Т.о. токи проводимости I и токи смещения $I_{\text{см}}$ равны:

$$I = I_{\text{см}}.$$

Ток проводимости вблизи обкладок конденсатора (мгновенное значение силы тока)

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S \sigma dS = \int_S \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS. \qquad (4)$$

Учли, что поверхностная плотность заряда σ на обкладках конденсатора равна электрическому смещению D в конденсаторе.

Для общего случая ток проводиости:

$$I = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$$

С другой стороны сила тока сквозь произвольную поверхность определяется как поток вектора $\vec{j}_{\text{см}}$:

$$I = I_{\text{см}} \int_S \vec{j}_{\text{см}} d\vec{S}. \qquad (5)$$

Сравнивая эти два выражения, получаем, что:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{6}$$

Это выражение и было названо Максвеллом *плотностью тока смещения*. Направление вектора $\vec{j}_{\text{см}}$ совпадает с направлением вектора $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

Максвелл распространил выражение (6) на электрическое поле любого вида, в том числе и на вихревое поле. Из всех физических свойств, присущих току проводимости Максвелл приписал току смещения лишь одно свойство: способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле.

Плотность тока смещения в диэлектрике. Электрическое смещение в диэлектрике

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \tag{7}$$

Продифференцируем выражение (7) и получим плотность тока смещения в диэлектрике

$$\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \tag{8}$$

Введем *плотность тока поляризации* $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. Плотность тока поляризации обусловлена упорядоченным движением электрических зарядов в диэлектрике (смещением зарядов в неполярных молекулах или поворотом диполей в полярных молекулах). Возбуждение магнитного поля токами поляризации правомерно, т.к. токи поляризации по своей природе не отличаются от токов проводимости.

Плотность тока смещения в вакууме $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Она обусловлена только изменением электрического поля во времени, но также возбуждает магнитное поле. Это принципиально новое утверждение Максвелла. Даже в вакууме всякое изменение во времени электрического поля приводит к возникновению в окружающем пространстве магнитного поля.

Замкнутость цепей переменного тока. Максвелл ввел понятие *полного тока,* равного сумме токов проводимости и токов смещения. *Плотность полного тока*

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{см}} = \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{9}$$

Полный ток определяется как поток вектора плотности полного тока:

$$I_{\text{полн}} = \int\limits_S \vec{j}_{\text{полн}} d\vec{S} = \int\limits_S (\vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S}\,. \tag{10}$$

При расчетах электрических полей в формулах нужно подставлять полную плотность тока.

Выводы, сделанные Максвеллом. Введя понятие тока смещения и полного тока, Максвелл по-новому подошел к рассмотрению замкнутости цепей переменного тока. Полный ток в цепях переменного тока всегда замкнут, т.е. на концах проводника обрывается лишь ток проводимости, а в диэлектрике (вакууме) между концами проводника имеется ток смещения, который замыкает ток проводимости. Ток смещения по своей сути – это изменяющееся со временем электрическое поле.

Обобщенная теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$ (закон полного тока). Максвелл обобщил теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$, введя в правую часть полный ток сквозь поверхность *S*, натянутую на замкнутый контур *L* (см. формулу 10), получив следующее выражение:

$$\oint\limits_L \vec{H} d\vec{l} = \int\limits_S \left(\vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{dt} \right) d\vec{S}\,. \tag{11}$$

Это выражение - *второе уравнение Максвелла*.

13.3. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

Уравнения Максвелла в интегральной форме. Введение Максвеллом понятия полного тока смещения привело его к завершению созданной им макроскопической теории электромагнитного поля, позволившей с единой точки зрения объяснить электрические и магнитный явления и предсказать новые.

В основе теории Максвелла лежат четыре уравнения, полученные нами ранее:

1. Циркуляция вектора напряженности суммарного поля $\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_B$ (циркуляция вектора $\vec{E}_Q$ равна 0):

$$\oint\limits_L \vec{E} d\vec{l} = -\int\limits_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \tag{12}$$

Это уравнение показывает, что источниками электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющиеся во времени магнитные поля.

2. Обобщенная теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$:

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}_{\text{пр}} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{S} . \tag{13}$$

Это уравнение показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.

3. Теорема Гаусса для поля $\vec{D}$:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = Q \tag{14}$$

или, если заряд распределен внутри замкнутой поверхности непрерывно с объемной плотностью ρ:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \oint_V \rho dV . \tag{15}$$

Это уравнение показывает, что в природе существуют электрические заряды.

4. Теорема Гаусса для поля $\vec{B}$:

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0 . \tag{16}$$

Это уравнение показывает, что в природе не существуют магнитные заряды.

Дополнительные уравнения, используемые с уравнениями Максвелла. Величины, входящие в уравнения Максвелла, не являются независимыми и между ними существует связь:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E};$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H};$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

где $\vec{E}$ - напряженность электрического поля; $\vec{B}$ - магнитная индукция; $\vec{D}$ - электрическое смещение; $\vec{H}$ - напряженность магнитного поля; $\vec{j}$ - плотность тока проводимости; γ – удельная проводимость вещества; ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянная; ε и μ – электрическая и магнитная проницаемости.

Совокупность этих 7 уравнений составляют основу *электродинамики покоящихся сред*.

Уравнения Максвелла для стационарных полей ($\vec{E} = \text{const}$; $\vec{B} = \text{const}$*).*

$$1.\ \oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0;$$

$$2.\ \oint_L \vec{H}d\vec{l} = I;$$

$$3.\ \oint_S \vec{D}d\vec{S} = Q;$$

$$4.\ \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0.$$

Источниками электрического поля являются только электрические заряды, источниками магнитного поля – только токи проводимости. В этом случае электрические и магнитные поля независимы друг от друга, что позволяет изучать отдельно постоянные электрическое и магнитное поля.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$1.\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$2.\ \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

$$3.\ \mathrm{div}\vec{D} = \rho;$$

$$4.\ \mathrm{div}\vec{B} = 0.$$

Теоремы векторного анализа, используемые при переходе от интегральной формы уравнения к дифференциальной

1. Теорема Стокса: зная ротор вектора $\vec{A}$ в каждой точке некоторой поверхности S можно вычислить циркуляцию этого вектора по контуру L, ограничивающему S:

$$\oint_L \vec{A}d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\vec{A}d\vec{S}.$$

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \left[\nabla \cdot \vec{A}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

2. Теорема Гаусса: зная дивергенцию вектора $\vec{A}$ в каждой точке пространства, можно вычислить поток этого вектора через произвольную замкнутую поверхность S конечных размеров.

$$\oint_S \vec{A}d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\vec{A}dV.$$

$$\mathrm{div}\vec{A} = \nabla\vec{A} = \vec{i}\,\frac{\partial A_x}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial A_y}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме характеризуют поле в каждой точке пространства. Физический смысл уравнений Максвелла в дифференциальной форме тот же, что и уравнения Максвелла в интегральной.

Если заряды и токи распределены в пространстве непрерывно, то обе формы уравнений Максвелла эквивалентны. Однако, если имеются поверхности разрыва (поверхности, на которых свойства среды меняются скачкообразно), то интегральная форма уравнений является более общей.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме предполагают, что все величины в пространстве и времени изменяются непрерывно. Чтобы достичь математической эквивалентности обеих форм уравнений Максвелла, дифференциальную форму дополняют граничными условиями, которым должно удовлетворять электромагнитное поле на границе раздела двух сред:

1. $D_{n1} = D_{n2}$; (на границе раздела нет свободных зарядов)

$$2.\ E_{\tau 1} = E_{\tau 2};$$

$$3.\ B_{n1} = B_{n2};$$

4. $H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$ (на границе раздела нет токов проводимости).

Некоторые следствия из уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла – наиболее общие уравнения для электрических и магнитных полей в покоящихся средах. Они играют в электродинамике такую же роль, как законы Ньютона в механике.

1. Согласно идеям Максвелла, переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным полем, т.е. электрические и магнитные поля неразрывно связаны друг с другом – они образуют единое электромагнитное поле.

2. Теория Максвелла не только смогла объяснить уже известные экспериментальные факты, но и предсказала новые явления: существование магнитного поля токов смещения позволило предсказать существование электромагнитных волн – переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью (скоростью света). Этот вывод и теоретическое исследование свойств электромагнитных волн привели Максвелла к созданию электромагнитной теории света, согласно которой свет представляет собой также электромагнитные волны.

Теория Максвелла была экспериментально подтверждена: электромагнитные волны были получены на практике немецким физиком Герцем, который доказал, что законы их возбуждения и распространения полностью подчиняются уравнениям Максвелла.

3. К электромагнитному полю применим только принцип относительности Эйнштейна, согласно которому, механические, оптические и электромагнитные явления во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково, т.е. описываются одинаковыми уравнениями. Из принципа относительности следует, что раздельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет лишь относительный смысл. Так если электрическое поле создается системой неподвижных зарядов, то эти заряды, являясь неподвижными относительно одной системы отсчета, движутся относительно другой и, следовательно, будут порождать не только электрическое, но и магнитное поле. Аналогично, неподвижный проводник с постоянным током, возбуждая в каждой точке пространства постоянное магнитное поле, движется относительно других инерциальных систем, и создаваемое им переменное магнитное поле возбуждает вихревое

электрическое поле. Таким образом, поле, которое относительно некоторой системы отсчета оказывается чисто электрическим или чисто магнитным, относительно других систем отсчета будет представлять собой совокупность электрического и магнитного полей.

Вывод: теория Максвелла, ее экспериментальное подтверждение, а также принцип относительности Эйнштейна приводят к единой теории электрических, магнитных и оптических явлений, основанных на представлении об электромагнитном поле.

Контрольные вопросы

1. Что является причиной возникновения вихревого электрического поля? Чем оно отличается от электростатического поля?
2. Чему равна циркуляция вихревого электрического поля?
3. Почему вводится понятие тока смещения? Что он собой по существу представляет?
4. Выведите и объясните выражение для плотности тока смещения.
5. Запишите, объяснив физический смысл, обобщённую теорему о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля.
6. Запишите полную систему уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной форме и объясните их физический смысл.
7. Почему постоянные электрические и магнитные поля можно рассматривать обособленно друг от друга? Запишите для них уравнения Максвелла в обеих формах.
8. Почему уравнения Максвелла в интегральной форме являются более общими?
9. Какие основные выводы можно сделать на основе теории Максвелла?

ЛЕКЦИЯ 14

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

14.1. Колебания

Колебаниями называются движения или процессы, характеризующиеся определенной повторяемостью во времени.

Колебательные процессы широко распространены в природе и технике. Например: качание маятника часов, обращение Земли вокруг Солнца, переменный электрический ток в цепи, колебание струны и т.д.

Физическая природа колебаний может быть различной, поэтому *различают* колебания механические, электромагнитные, электромеханические и др.

Колебания различной физической природы описываются одинаковыми характеристиками и уравнениями, поэтому к их изучению осуществляется *единый подход.*

По характеру зависимости от времени колебания бывают *периодическими* – колебания, характеризуемые такими функциями, что при любом t

$$f(t+T)=f(t), \tag{1}$$

где T - период колебаний; и *непериодическими*, если

$$f(t+T)\neq f(t). \tag{2}$$

По способу возбуждения колебания делятся на свободные (или собственные), вынужденные, параметрические, автоколебания.

Свободные колебания – колебания, происходящие за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.

Вынужденные колебания – колебания, происходящие при периодическом внешнем воздействии.

Параметрические колебания – колебания, происходящие при периодическом изменении какого-то параметра колебательной системы за счет внешнего воздействия.

Автоколебания – незатухающие колебания, возникающие и поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии.

14.2. Уравнение гармонических колебаний

Гармонические колебания – простейшие периодические колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется по закону *синуса* или *косинуса*.

Например: движение точки M по окружности радиуса A с постоянной угловой скоростью ω_0 (рис. 14.1).

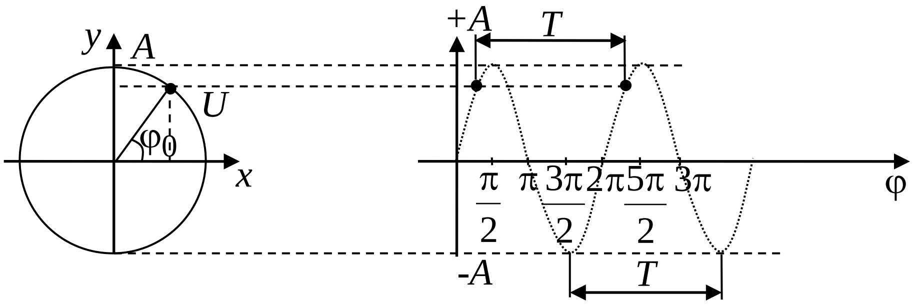


Рис. 14.1

Гармонические колебания величины x описываются уравнениями типа

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

или

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi), \qquad (3)$$

где $A[\text{м}]$ - *амплитуда колебаний* – это максимальная величин смещения колеблющейся точки от положения равновесия; ω_0 - *круговая (циклическая) частота* – число колебаний за 2π секунд; φ - *начальная фаза колебаний* – определяет смещение колеблющейся величины от положения равновесия в начальный момент времени $(t = 0)$; $(\omega_0 t + \varphi)[\text{рад}]$ - *фаза колебаний* – определяет смещение колеблющейся величины от положения равновесия в данный момент времени. (Показывает, какая часть периода прошла от начала колебания); $T[\text{с}]$ - *период колебаний* – промежуток времени, в течение которого фаза колебания получает приращение 2π, т.е.

$$\omega_0(t + T) + \varphi = \omega_0 t + \varphi + 2\pi,$$

откуда продолжительность одного полного колебания:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

$\nu[\text{Гц}]$ - *частота колебаний* – величина, обратная периоду колебаний, т.е. число полных колебаний, совершаемых в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

14.3. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Гармоническое колебание величины x:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Первая производная от x:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4)$$

Вторая производная от x:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \quad (5)$$

Вывод: 1) получили гармонические колебания той же циклической частоты; 2) амплитуды $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ равны, соответственно, $A\omega_0$ и $A\omega_0^2$; 3) фаза $\frac{dx}{dt}$ отличается от фазы x на $\frac{\pi}{2}$; 4) фаза $\frac{d^2x}{dt^2}$ отличается от фазы x на π.

Таким образом при $x = 0$, $\frac{dx}{dt}$ принимает максимальное значение; при $x_{\max} < 0$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ принимает максимальное значение (рис. 14.2).

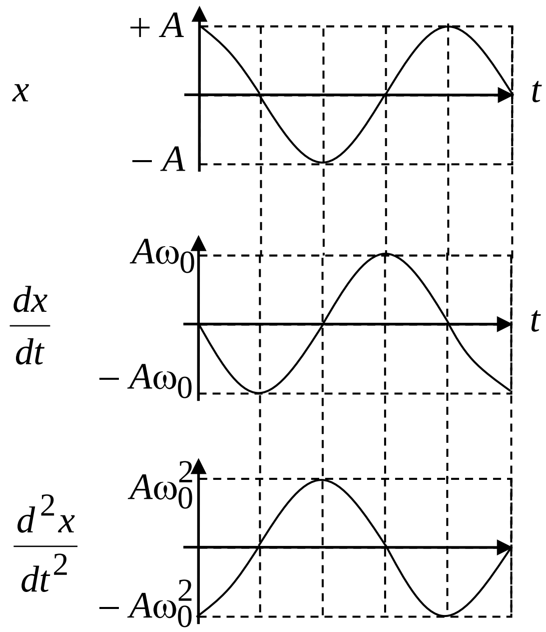


Рис. 14.2

Запишем вторую производную от x:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0{}^2\cos(\omega_0 t + \varphi);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A\omega_0{}^2\cos(\omega_0 t + \varphi) = 0 \ \ (A\cos(\omega_0 t + \varphi) = x);$$

Тогда, дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (6)$$

или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (7)$$

Решением этого уравнения является выражение (3)

14.4. Упругие волны

Колебания, возбужденные в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной) распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной точки среды к другой.

Среда рассматривается как *сплошная*, т.е. среда, непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

Процесс распространения колебаний в сплошной среде называется *волной*. При распространении волны частицы среды колеблются около своих равновесных положений.

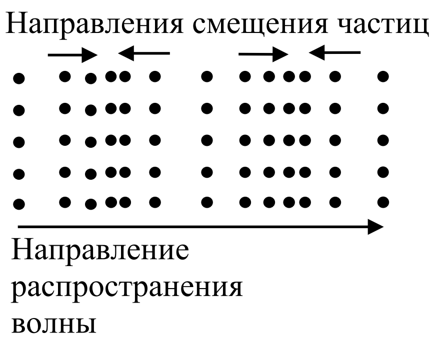
Основное свойство всех волн независимо от их природы – *перенос энергии без переноса вещества*. Вместе с волной от частицы к частице передается состояние колебательного движения и его энергия.

По физической природе волны бывают *упругие* (или механические), *волны на поверхности жидкости, электромагнитные*.

Упругие волны по ориентации возмущений относительно направления распространения волны бывают *продольные* и *поперечные*.

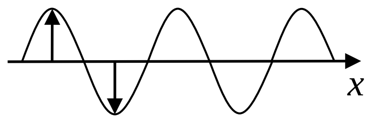
По форме волновых поверхностей волны бывают *плоскими и сферическими*.

Продольные волны – волны, в которых частицы среды колеблются в направлении распространения волны.



Продольные волны могут распространятся в среде, где возникают упругие силы при деформациях сжатия и растяжения, т.е. в твердых телах, жидкостях и газах.

Поперечные волны – волны, в которых частицы колеблются в направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны. Поперечные упругие волны могут распространятся в среде, т.е. в твердых телах.



Таким образом, в жидкостях и газах возникают только продольные волны, в твердых телах – как продольные, так и поперечные.

Упругая волна называется *гармонической*, если соответствующие ей колебания частиц являются *гармоническими*.

График гармонической волны, распространяющейся со скоростью υ вдоль оси x изображен на рис. 14.3.

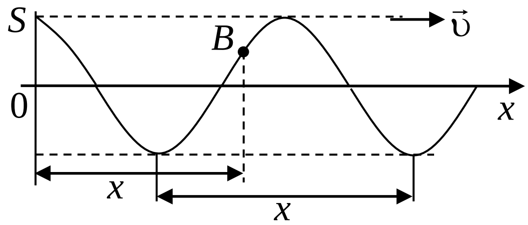
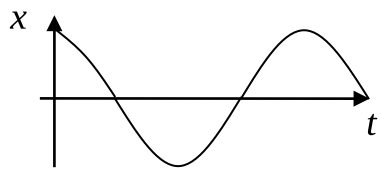


Рис. 14.3

Это зависимость между смещением S частиц среды, участвующих в волновом процессе, и расстоянием x этих частиц от источника колебаний O для какого-то фиксированного момента времени t.

Рисунок задает мгновенную картину распределения возмущения вдоль направления распространения волны.

Отличие графиков гармонических волн и колебаний. Эти графики различны по существу: график волны определяет зависимость смещения всех частиц среды от расстояния до источника колебаний в данный момент времени; график колебания – зависимость смещения данной частицы от времени.



Длина волны – расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе.

Длина волны равна расстоянию, на которое распространяется определенная фаза колебания за период

$$\lambda = \vec{\upsilon} \cdot T\,,$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{\upsilon}}{\nu}.$$

Волна, распространяясь от источника колебаний, охватывает новые области пространства.

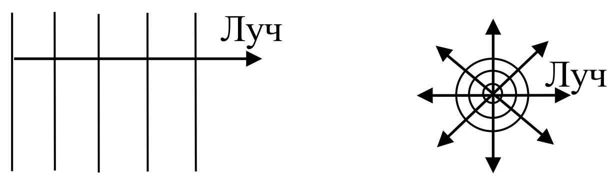
Волновым фронтом называется геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t.

Волновой поверхностью называют геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

Волновых поверхностей можно провести множество, а волновой фронт в любой момент времени – один.

Волновой фронт также является волной поверхностью.

Волновые поверхности могут быть *плоскими* или *сферическими*. Соответственно *волны* бывают *плоскими* или *сферическими*.



Луч – прямая, $\perp$ волновой поверхности и совпадающая с направлением переноса энергии волной.

Плоские волны – волны, для которых волновые поверхности – совокупность параллельных плоскостей, перпендикулярных направлению распространения волны.

Сферические волны – волны, для которых волновые поверхности – совокупность концентрических сфер.

14.5. Уравнение бегущей волны

Бегущими волнами называют волны, которые переносят в пространстве энергию.

Перенос энергии волнами характеризуется *вектором плотности потока энергии – вектором Умова*.

$$\vec{U} = \omega \cdot \vec{\upsilon}, \tag{8}$$

где υ - скорость волны; ω - объемная плотность энергии колебательного движения.

Направление *вектора Умова* совпадает с направлением переноса энергии, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную $\perp$ направлению распространения волны.

Поток энергии - энергия, переносимая волнами через некоторую поверхность в единицу времени:

$$\Phi = \frac{dW}{dt}. \tag{9}$$

Плотность потока энергии волн - поток энергии, переносимый волной через единичную площадку, расположенную $\perp$ направлению распространения волны:

$$\vec{U} = \frac{d\Phi}{dS} = \omega\upsilon. \tag{10}$$

Интенсивность волны $\left|<\vec{U}>\right|$ – это модуль среднего значения *вектора Умова*.

Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x. В общем случае уравнением волны называется зависимость смещения колеблющейся частицы от координаты и времени.

$$f = f(x, y, z, t), \tag{11}$$

где x, y, z - координаты равновесного положения частицы.

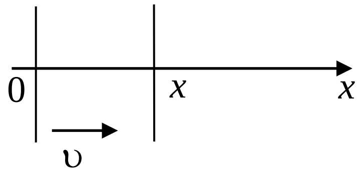
Рассмотрим плоскую волну, предположим, что колебания носят гармонический характер, а ось x совпадает с направлением распространения волны. Тогда волновые поверхности будут $\perp$ оси x, смещение S будет зависеть только от x и t т.е.

$$S = S(x,t). \tag{12}$$

Пусть колебания точек плоскости $x = 0$ имеют вид

$$S(0;t) = A\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{13}$$

Найдем вид этой функции для произвольного значения x. До плоскости x волна идет время $\tau = \dfrac{x}{\upsilon}$.



Следовательно, колебания точек на этой плоскости будут отставать по времени от колебаний источника на это время τ.

Тогда уравнение колебаний частиц, летающих в плоскости x, имеет вид:

$$S(x,t) = A\cos(\omega(t-\tau)+\varphi_0) = A\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)+\varphi_0\right). \qquad (14)$$

Итак: уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x в среде, не поглощающей энергию:

$$S(x,t) = A\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)+\varphi_0\right), \qquad (15)$$

где $A = \text{const}$ - амплитуда волны; ω - циклическая частота; φ_0 - начальная фаза волны; $\left[\omega\left(t-\dfrac{x}{\upsilon}\right)+\varphi_0\right]$ - фаза плоской волны.

Для характеристики волн используют *волновое число*:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{\omega}{\upsilon} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Тогда уравнение плоской гармонической волны:

$$S(x,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{\upsilon} + \varphi_0\right)$$

или с учетом $\dfrac{\omega}{\upsilon} = k$

$$S(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Уравнение волны, распространяющейся вдоль отрицательного направления оси x, отличается только знаком kx.

Зафиксируем некоторое значение фазы волны

$$\left[\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)+\varphi_0\right]=\text{const}.$$

Это выражение дает нам связь между координатой x и временем t, для которых фаза имеет фиксированное значение.

Получим скорость фазы $\frac{dx}{dt}$. Для этого продифференцируем выражение

$$\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)+\varphi_0=\text{const}.$$

Полученное выражение

$$d(\omega t)-d\left(\frac{\omega x}{\upsilon}\right)=0,$$

поделим на ω и разделим переменные:

$$dt-d\left(\frac{x}{\upsilon}\right)=0.$$

$$\upsilon dt=dx.$$

Тогда скорость перемещения фазы волны – фазовая скорость

$$\upsilon=\frac{dx}{dt}.$$

Мы получили, что скорость, с которой перемещается фиксированное значение фазы, совпадает со скоростью распространения волны, следовательно, υ - фазовая скорость.

Уравнение сферической волны

$$S(r,t)=\frac{A_0}{r}\cos(\omega t-Kr+\varphi_0).$$

Амплитуда этой волны убывает с расстоянием по закону $\frac{1}{r}$.

Записанное уравнение справедливо для r, значительно превышающих размеры источника колебаний – точечного источника.

Распространение волн в однородной изотропной среде в общем случае описывается *волновым уравнением*

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

или

$$\Delta S=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2},$$

где υ - фазовая скорость;

$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Решение этого уравнения – уравнение любой волны.

Например, для плоской волны волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.$$

Решением является уравнение плоской волны

$$S=A\cos(\omega t-Kx+\varphi_0).$$

Контрольные вопросы

1. Что такое колебания? Свободные, гармонические, периодические колебания? Приведите примеры колебаний в природе и технике.
2. Запишите уравнение гармонического колебания и дайте определение амплитуды, фазы, периода, частоты и циклической частоты колебания.
3. Выведите формулы для скорости и ускорения гармонически колеблющейся точки как функции времени. Получите дифференциальное уравнение гармонических колебаний.
4. Что такое волна?
5. Что называют поперечной волной? Продольной? Как они возникают?
6. Что называют длиной волны? Какова связь между длиной волны, скоростью, периодом, циклической частотой?

7. Что такое волновое число? Фазовая скорость?

8. В чем заключается физический смысл вектора Умова?

9. Какая волна называется бегущей, гармонической, плоской, сферической? Каковы уравнения этих волн?

10. Плоская гармоническая волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси X в среде, не поглощающей энергию со скоростью υ = 12 м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстоянии x_1 = 7 м и x_2 = 12 м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = \frac{5}{6}\pi$. Амплитуда волны A = 6 см. Определите: 1) длину волны; 2) уравнение волны; 3) смещение S_2 второй точки в момент времени t = 3 с. (Связь между разностью фаз и разностью хода волн: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$).

ЛЕКЦИЯ 15

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАТУХАЮЩИХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

15.1. Затухающие колебания

Гармонические колебания относятся к *свободным* колебаниям без трения, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как она была тем или иным способом выведена из состояния равновесия. Свободные колебания любого осциллятора в отсутствии трения будут гармоническими, если действующая сила (или момент силы) является *квазиупругой*, т.е. силой, направленной к положению равновесия и зависящей от смещения из этого положения линейно. Частота и период свободных колебаний без трения зависят только от свойств самого осциллятора, в отличие от амплитуды колебаний и начальной фазы, которые определяются начальными условиями.

В любой реальной колебательной системе есть силы сопротивления (трения), действия которых приводит к уменьшению амплитуды и энергии колебаний. Такие свободные колебания называются *затухающими*. *Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний* линейной системы, у которой параметры, определяющие физические свойства системы в ходе процесса не изменяются, задается в виде

$$\frac{d^2S}{dt^2}+2\beta\frac{dS}{dt}+\omega_0^2S=0, \tag{1}$$

где S - колеблющаяся величина, описывающая физический процесс; $\beta=\mathrm{const}$ - коэффициент затухания; ω_0 - циклическая частота свободных незатухающих колебаний при $\beta=0$ (при отсутствии потерь энергии) или *собственная* частота колебательной системы.

Уравнение (1) при условии $\beta=\omega_0$ описывает затухающие колебания и его решение имеет вид

$$S=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi), \tag{2}$$

где $A=A_0e^{-\beta t}$ - амплитуда затухающих колебаний; $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ - частота затухающих колебаний.

Зависимость $S = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$ показана на рис. 15.1 сплошной линией, а зависимость $A = A_0 e^{-\beta t}$ - штриховыми линиями.

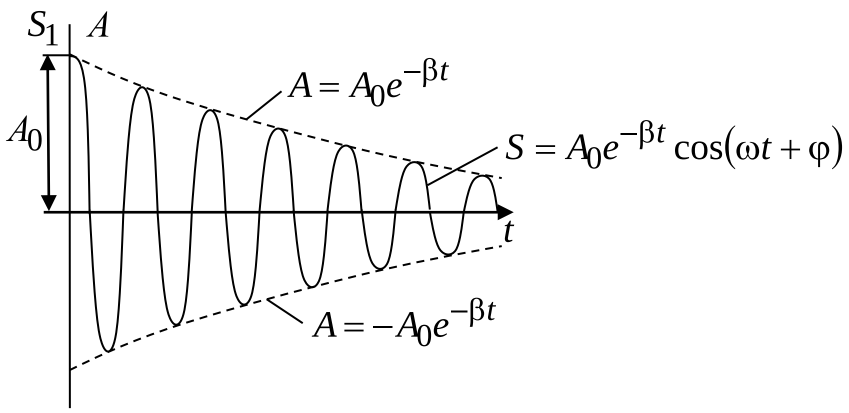


Рис. 15.1

Видно, что эта функция (2) не периодическая. Тем не менее величину $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ принято называть периодом затухающих колебаний, если затухание мало. Таким образом, промежуток времени между двумя последующими максимумами или минимумами колеблющейся физической величины условно называется периодом затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Характеристики затухающих колебаний. Кроме коэффициента β затухание характеризуют и другими величинами:

1. *Время релаксации* τ - это промежуток времени $\tau = \dfrac{1}{\beta}$, в течении которого амплитуда затухающего колебания уменьшается в *e* раз.

2. *Логарифмический декремент затухания*. Его определяют как

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \qquad (3)$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ - амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период;
N_e - число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в е раз. При малом затухании $(\beta << \omega_0)$ λ характеризует относительное

уменьшение амплитуды колебаний за период. Для данной колебательной системы логарифмический декремент затухания – постоянная величина.

3. *Добротность осциллятора*. По определению (при малом затухании $(\beta << \omega_0)$)

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega_0}{2\beta}. \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что *добротность* пропорциональна числу колебаний N_e, совершаемых системой за время релаксации.

При достаточно большом затухании $(\beta >> \omega_0)$ система совершает *апериодическое* движение: выведенная из равновесия, она возвращается в это положение, не совершая колебаний.

Выводы, полученные для свободных затухающих колебаний линейных систем, применимы для колебаний различной физической природы – механических (пружинный маятник) и электромагнитных (электрический колебательный контур).

В качестве примера рассмотрим свободные затухающие колебания пружинного маятника. Пусть пружинный маятник массы m совершает малые колебания под действием упругой силы $F = -kx$. Если на маятник, кроме квазиупругой силы $F = -kx$ действует сила сопротивления (трения), пропорциональная скорости

$$F_{\text{тр}} = -r\upsilon = -r\frac{dx}{dt},$$

где r - коэффициент сопротивления, то маятник будет совершать затухающие колебания.

При этих условиях уравнение движения маятника будет иметь вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}. \quad (5)$$

Разделим уравнение на величину m и введем $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и $p = \frac{r}{2m}$ - собственную частоту ω_0 маятника и коэффициент затухания β, соответственно. Тогда дифференциальное уравнение затухающих колебаний маятника:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0\,. \qquad (6)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi),$$

где частота

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}\,.$$

Добротность пружинного маятника, согласно определению (4)

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

равна

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 2m}{2r} = \frac{\sqrt{km}}{r}\,. \qquad (7)$$

15.2. Вынужденные колебания

Свободные колебания реальной колебательной системы является, как мы выяснили, затухающими. Чтобы возбудить в такой системе незатухающие колебания, необходимо компенсировать потери энергии, обусловленные силами сопротивления (трения). Это можно осуществить, воздействуя на систему переменной внешней силой F, изменяющейся по гармоническому закону

$$F = F_0\cos\omega t\,. \qquad (8)$$

Возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы колебания, называются *вынужденными механическими колебаниями*.

Рассмотрим вынужденные колебания пружинного маятника. В этом случае на маятник действуют одновременно три силы: квазиупругая ($-kx$), сила сопротивления ($-r\dfrac{dx}{dt}$) и внешняя вынуждающая ($F_0\cos\omega t$). Согласно второго закона Ньютона, закон движения для пружинного маятника запишется в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega t\,. \qquad (9)$$

Учтем, что собственная частота колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и коэффициент затухания $\beta = \frac{r}{2m}$, придем к дифференциальному уравнению вынужденных колебаний пружинного маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t\,. \qquad (10)$$

Опыт показывает, что по истечении некоторого времени (с момента начала действия вынуждающей силы) в системе устанавливаются гармонические колебания с частотой вынуждающей силы, но отличающиеся от нее по фазе на φ

$$x = A\cos(\omega t - \varphi). \qquad (11)$$

Решение уравнения, как доказывается в математике, представляет собой сумму общего решения однородного уравнения (когда правая часть равна нулю) и частично решения неоднородного:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) + a\cos(\omega t - \varphi). \qquad (12)$$

Общее решение однородного уравнения описывает затухающие колебания, которые по истечении некоторого времени практически исчезают. Нас будет интересовать только частное решение, соответствующее установившимся колебаниям. Задача сводится к определению постоянных *A* и φ в уравнении (11). Для этого продифференцируем это выражение дважды по времени:

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t - \varphi) = A\omega\sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t - \varphi) = A\omega^2\cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

и подставим в исходное уравнение (11). Сумма трех гармонических функций в левой части уравнения (11) должна быть равной функции $\frac{F_0}{m}\cos\omega t$:

$$A\omega^2\cos(\omega t-\varphi+\pi)+2\beta A\omega\cos\left(\omega t-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+\omega_0^2 A\cos(\omega t-\varphi)=\frac{F_0}{m}\cos\omega t. \quad (13)$$

Учитывая фазовые сдвиги между x, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$, представим это равенство с помощью векторной диаграммы (для случая $\omega<\omega_0$) (рис. 15.2).

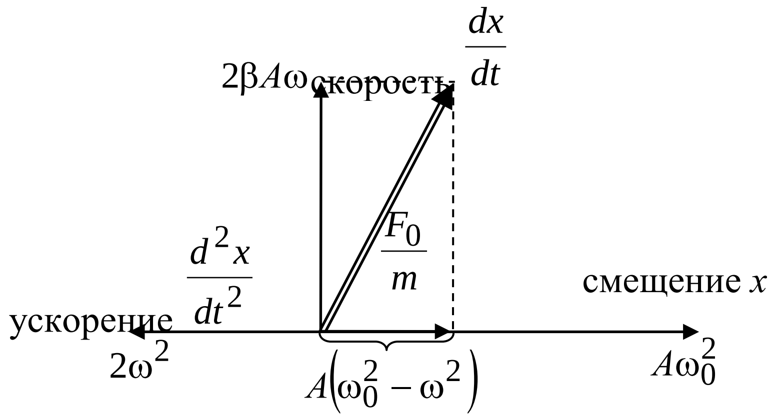


Рис. 15.2

Из диаграммы по теореме Пифагора следует, что

$$\frac{F_0}{m}=A^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2A^2\omega^2,$$

откуда амплитуда установившихся колебаний

$$A=\frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}. \quad (14)$$

Из диаграммы видно, что отставшие смещения по фазе не φ от вынуждающей силы определяется как

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{2\beta A\omega}{A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \quad (15)$$

и

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Формулы (14) и (15) показывают, что амплитуда A установившихся колебаний и отставание смещения по фазе на φ от вынуждающей силы определяется свойствами слабого осциллятора (ω_0, β) и вынуждающей силы ($\frac{F_0}{m}$, ω), но не начальными условиями. Таким образом, в установившемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой ω и являются гармоническими; амплитуда и фаза колебаний, определяемые выражениями (14) и (15) также зависят от ω - частоты вынуждающей силы. Графически вынужденные колебания представлены на рис. 15.3.

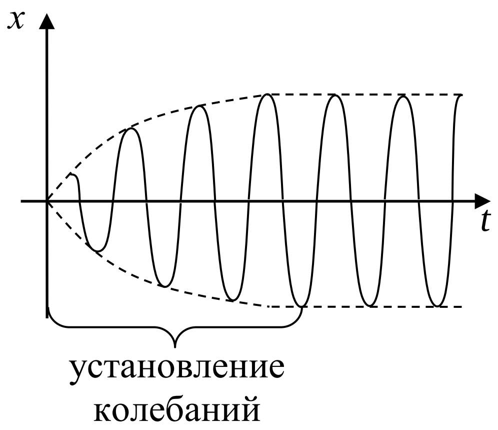


Рис. 15.3

15.3. Амплитудные резонансные кривые. Резонанс

Рассмотрим зависимость амплитуды A вынужденных колебаний от частоты ω вынуждающей силы. Из формулы (14) следует, что амплитуда A смещения имеет максимум. Чтобы определить *резонансную частоту* $\omega_{рез}$ – частоту, при которой амплитуда A смещения достигает максимума, нужно найти экстремум (максимум) подкоренного выражения в формуле (14). Для этого продифференцируем подкоренное выражение по ω и приравняв его нулю, получим условие, определяющее $\omega_{рез}$:

$$-4\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\omega + 8\beta^2\omega = 0.$$

Это равенство выполняется при $\omega = 0$ и $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, у которых только положительное значение имеет физический смысл. Следовательно, *резонансная частота* $\omega_{\text{рез}}$

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 2\beta^2}\,. \tag{16}$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы, называется *резонансом*.

При $\beta^2 << \omega_0^2$ значение $\omega_{\text{рез}}$ практически совпадает с собственной частотой ω_0 колебательной системы.

Подставляя выражение (16) в формулу (14), получим выражение для амплитуды при резонансе

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\,. \tag{17}$$

На рис. 15.4 приведены *резонансные* кривые – зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты при различных значениях β.

Чем меньше затухание системы, тем боле ярко выражен резонанс, тем правее лежит максимум данной кривой. При $\omega \to 0$, все кривые достигают одного и того же значения $\frac{F_0}{m\omega_0^2}$, которое называют статическим отклонением. При $\omega \to \infty$ все кривые асимптотически стремятся к нулю.

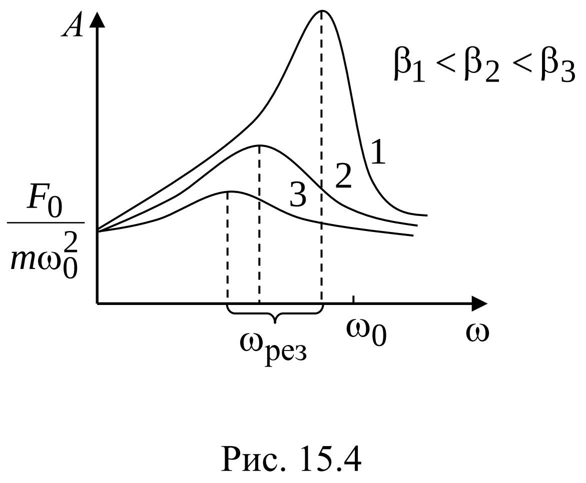


Рис. 15.4

Явление резонанса играет огромную роль в физике и технике. Его используют, если нужно усилить колебания, и, наоборот всячески избегают, если резонанс может привести к нежелательным усилениям колебаний. Так, радиотехника, прикладная акустика, электротехника используют явление резонанса.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются затухающими. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение.
2. По какому закону изменяется амплитуда затухающих колебаний? Являются ли затухающие колебания периодическими?
3. Что такое коэффициент затухания? декремент затухания? логарифмический декремент затухания? В чем заключается физический смысл этих величин?
4. Что такое вынужденные колебания? Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение.
5. От чего зависит амплитуда вынужденных колебаний? Запишите выражение для амплитуды при резонансе.
6. Чему равен сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой при вынужденных колебаниях? при резонансе?
7. Что называется резонансом? Какова его роль?

ЛЕКЦИЯ 16

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

16.1. Колебательный контур. Уравнение колебательного контура

Среди различных явлений особое место занимают электромагнитные колебания, при которых электрические величины (заряды, токи) периодически изменяются и которые сопровождаются взаимными превращениями электрического и магнитного полей. Для возбуждения и поддержания электромагнитных колебаний используется *колебательный контур* – цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R (рис. 16.1). Рассмотрим идеализированный колебательный контур, сопротивление которого пренебрежимо мало ($R \approx 0$). Выясним, каким образом в колебательном контуре возникают и поддерживаются электрические колебания.

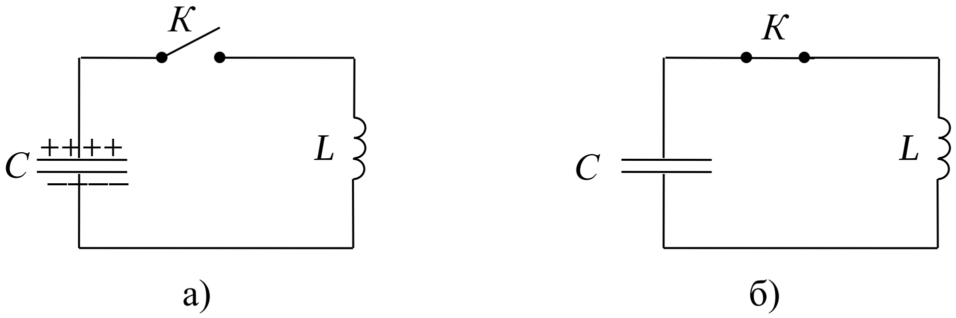


Рис. 16.1

Пусть вначале верхняя обкладка конденсатора заряжена положительно, а нижняя отрицательно (рис. 16.1, а). При этом вся энергия колебательного контура сосредоточена в конденсаторе. Замкнем ключ K. Конденсатор начнет разряжаться, и через катушку L потечет ток. Электронная энергия конденсатора начнет превращаться в магнитную энергию катушки. Этот процесс закончится, когда конденсатор полностью разрядиться, а ток в цепи достигнет максимума (рис. 16.1, б). С этого момента ток, не меняя направления, начнет убывать. Однако он прекратиться не сразу – его будет поддерживать ЭДС самоиндукции. Ток будет перезаряжать конденсатор, возникает электрическое поле, стремящееся ослабить ток. Наконец, ток прекратиться, а заряд на конденсаторе достигнет магнетизма. С этого момента конденсатор начнет разряжаться опять, ток потечет в обратном направлении и т.д. – процесс будет повторяться.

В контуре при отсутствии сопротивления проводников будут совершаться строго периодические колебания. В ходе процесса периодически изменяются заряд на обкладках конденсатора, напряжение на нем и ток через катушку. Если же сопротивление $R \neq 0$, то помимо описанного процесса будет происходить преобразование электромагнитной энергии в джоулеву теплоту.

Сопротивление проводников цепи R принято называть *активным сопротивлением*.

Уравнение колебательного контура. Найдем уравнение колебаний в контуре, содержащем последовательно соединенные конденсатор C, катушку индуктивности L, активное сопротивление R и внешнюю переменную ЭДС ε (рис. 16.2).

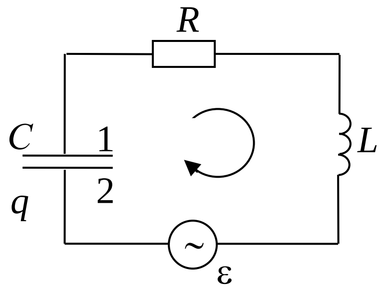


Рис. 16.2

Применим к колебательному контуру второе правило Кирхгофа. Выберем положительное направление обхода контура, например по часовой стрелке. Рассмотрим ситуацию, когда ток I течет в положительном направлении (обкладка 2 конденсатора имеет заряд $q > 0$). Тогда за промежуток времени dt заряд q получит приращение $dq > 0$, и ток в контуре определяется как

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{1}$$

Следовательно, если $I > 0$, то и $dq > 0$ (знак I совпадает со знаком dq).

Согласно закону Ома для участка цепи 1RL2

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_s + \varepsilon_1, \tag{2}$$

где ε_s - ЭДС самоиндукции. Учтем, что ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt};$$

связь между зарядом, емкостью и разностью потенциалов на обкладках конденсатора

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C}.$$

Поэтому уравнение (2) можно переписать в виде

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = \varepsilon \qquad (3)$$

или с учетом (1) как

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \varepsilon. \qquad (4)$$

Это и есть *уравнение колебательного контура* – линейное дифференциальное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Найдя с помощью этого уравнения $q(t)$, мы можем легко вычислить напряжение на конденсаторе как

$$U_c = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C}$$

и силу тока I по формуле (1)

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Уравнению колебательного контура можно придать иной вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon}{L}, \qquad (5)$$

где введены обозначения

$$2\beta = \frac{R}{L},$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Величину $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ называют *собственной частотой* контура, β - коэффициент затухания.

Если $\varepsilon = 0$, то колебания принято называть *свободными*. При $R = 0$ они будут *незатухающими*, а при $R \neq 0$ - затухающими.

Свободные электрические колебания. Если в контуре нет внешней ЭДС ε и активное сопротивление $R = 0$, то колебания в таком контуре являются *свободными незатухающими*. Их уравнение – частный случай уравнения (5), когда $\varepsilon = 0$ и $R = 0$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \tag{6}$$

Решением этого уравнения является функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \tag{7}$$

где q_m - амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора; ω_0 - собственная частота контура; α - начальная фаза.

Значение ω_0 определяется только свойствами самого контура, значения же q_m и α - начальными условиями (например, значения заряда q и тока $I = \frac{dq}{dt}$ в момент времени $t = 0$).

Согласно введенным обозначениям

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

поэтому *период свободных незатухающих колебаний*

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{LC}} \tag{8}$$

формула Томсона.

Найдя ток дифференцированием выражения (7) по времени и имея в виду, что напряжение на конденсаторе находится в фазе с зарядом q, нетрудно убедиться, что при свободных незатухающих колебаниях ток I опережает по фазе напряжение на конденсаторе на $\frac{\pi}{2}$.

Сила тока в колебательном контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega \sin(\omega_0 t + \alpha) = q_m \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \\ = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right), \tag{9}$$

где $I_m = \omega_0 q_m$ - амплитуда силы тока.

Напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m \cos(\omega_0 t + \alpha)}{C} = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \tag{10}$$

где $U_m = \frac{q_m}{C}$ - амплитуда напряжения.

Действительно, из выражений (9) и (10) вытекает, что когда ток достигает максимального значения, заряд (а также напряжение обращается в нуль, и наоборот).

16.2. Свободные затухающие колебания

Каждый реальный контур обладает активным сопротивлением, и энергия, запасенная в контуре, постепенно расходится на нагревание. Свободные колебания будут затухающими.

Уравнение данного колебательного контура мы получим, положив в уравнение (5) $\varepsilon = 0$. Тогда

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \tag{11}$$

Решение этого однородного дифференциального уравнения при $\beta < \omega_0$ имеет вид

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \tag{12}$$

где ω - частота затухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,, \tag{13}$$

q_m и α - произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. График функции (12) показан на рис. 16.3.

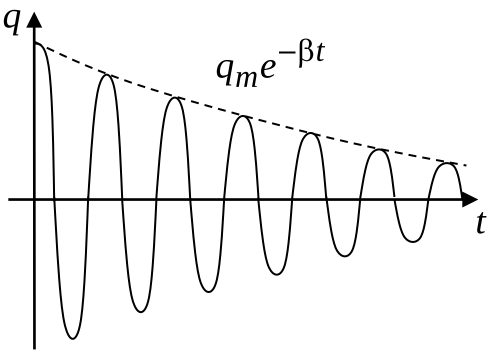


Рис. 16.3

Видно, что эта функция не периодическая, она определяет затухающие колебания.

Величину $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ называют периодом затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\beta}{\omega_0}\right)^2}}\,, \tag{14}$$

где T_0 - период свободных незатухающих колебаний.

Множитель $q_m e^{-\beta t}$ в уравнении (11) называют *амплитудой затухающих колебаний*. Зависимость ее от времени показана штриховой линией на рис. 16.3.

Напряжение на конденсаторе и ток в контуре. Зная $q(t)$, можно найти напряжение на конденсаторе и ток в контуре. Напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \tag{15}$$

Ток в контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = q_m e^{-\beta t}\left[-\beta\cos(\omega t + \alpha) - \omega\sin(\omega t + \alpha)\right].$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках к косинусу. Для этого умножим и разделим это выражение на $\sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \omega_0$, а затем введем угол δ по формулам

$$-\beta/\omega_0 = \cos\delta,$$
$$\omega/\omega_0 = \sin\delta. \tag{16}$$

После этого выражение для I примет вид

$$I = \omega q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha + \delta). \tag{17}$$

Из выражения (16) следует, что угол δ лежит во второй четверти ($\frac{\pi}{2} < \delta < \pi$). Это означает, что при наличии активного сопротивления R ток в контуре *опережает* по фазе напряжение (15) на конденсаторе более, чем на $\frac{\pi}{2}$. При $R = 0$ опережение $\delta = \frac{\pi}{2}$. Графики зависимостей $U_c(t)$ и $I(t)$ имеют вид, аналогичный рис. 16.3.

Величины характеризующие затухание.

1. *Коэффициент затухания* β *и время реакции* τ - время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в *e* раз. Из формулы (12) следует, что

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \tag{18}$$

2. *Логарифмический декремент затухания* λ. Он определяется как натуральный логарифм отношения двух значений амплитуд, взятых через период колебания *T*:

$$\lambda = \ln\frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T, \tag{19}$$

где *a* – амплитуда соответствующей величины (*q*, *U*, *I*). Или иначе:

$$\lambda = \frac{1}{N_e},$$

где N_e - число колебаний за время τ, т.е. за время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в е раз. Это легко получить из формул (18) и (19).

Если затухание мало ($\beta << \omega_0$), то $\omega \approx \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ и согласно формуле (19)

$$\lambda = \beta \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi R \sqrt{C/L}. \tag{20}$$

3. *Добротность Q колебательного контура*. По определению

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e,$$

где λ - логарифмический декремент затухания. Чем меньше затухание, тем больше Q. При слабом затухании ($\beta << \omega_0$) согласно выражению (20) добротность

$$Q \approx \frac{1}{R}\sqrt{L/C}.$$

И еще полезная формула для Q в случае слабого затухания:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\delta W},$$

где W – энергия, запасенная в контуре; δW – уменьшение этой энергии за период колебания T. В самом деле, энергия W пропорциональна квадрату амплитуды заряда конденсатора, т.е. $W \propto e^{-2\beta t}$. Отсюда относительное уменьшение энергии за период $\dfrac{\delta W}{W} = 2\beta T = 2\lambda$.

При $\beta \geq \omega_0$ вместо колебаний будет происходить *апериодический* разряд конденсатора. Активное сопротивление контура, при котором наступает апериодический процесс, называют *критическим*:

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{L/C}.$$

Огромный интерес для техники представляет возможность поддерживать колебания незатухающими. Для этого необходимо восполнять потери энергии реальной колебательной системы. Особенно важны и широко применимы *автоколебания* – незатухающие колебания, поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой. Автоколебательная система сама управляет внешними воздействиями, обеспечивая согласованность поступления энергии определенными порциями в нужный момент времени (в такт с ее колебаниями). Автоколебательными системами являются часы, двигатели внутреннего сгорания, паровые турбины, ламповые генераторы и т.д.

16.3. Вынужденные электрические колебания

Установившиеся колебания. Вернемся к уравнениям колебательного контура:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

или с учетом $I = \dfrac{dq}{dt}$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \varepsilon$$

и рассмотрим случай, когда в контур включена внешняя переменная ЭДС ε зависящая от времени по гармоническому закону

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos\omega t\,.$$

Колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся ЭДС, называются *вынужденными* электромагнитными колебаниями.

В данном случае уравнение колебательного контура записывается как

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \varepsilon_m \cos\omega t$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{2\beta dq}{dt}+\omega_0^2 q=\frac{\varepsilon_m}{L}\cos\omega t\,,$$

где введены обозначения:

$$2\beta=\frac{R}{L};$$

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC},$$

где ω_0 - собственная частота контура; β - коэффициент затухания.

Решение этого уравнения, как известно из математики, представляет собой сумму общего решения однородного уравнения (без правой части) и частного решения неоднородного уравнения.

Нас будут интересовать только установившиеся колебания, т.е. частное решение этого уравнения (общее решение однородного уравнения экспоненциально затухает, и по прошествии некоторого времени оно практически исчезает, обращается в нуль).

Это решение имеет вид

$$q=q_m\cos(\omega t-\psi),$$

где q_m - амплитуда заряда на конденсаторе; ψ - разность фаз между колебаниями заряда и внешней ЭДС $\varepsilon=\varepsilon_m\cos\omega t$.

q_m и ψ определяются только свойствами самого контура и вынуждающей ЭДС ε, причем оказывается, что $\psi>0$, поэтому q всегда отстает по фазе от ε.

Чтобы определить постоянные q_m и ψ, надо подставить $q=q_m\cos(\omega t-\psi)$ в исходное уравнение

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{2\beta dq}{dt}+\omega_0^2 q=\frac{\varepsilon_m}{L}\cos\omega t$$

и преобразовать полученное выражение. В целях достижения большей простоты сначала найдем ток I и затем его выражение подставим в исходное уравнение

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{q}{C}=\varepsilon_m\cos\omega t\,.$$

Попутно будет решен и вопрос с постоянными q_m и ψ.

Продифференцируем выражение $q = q_m \cos(\omega t - \psi)$ по t и найдем:

$$I = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = \omega q_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Запишем это выражение так:

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где I_m - амплитуда тока; φ - сдвиг по фазе между током и внешней ЭДС ε:

$$I_m = \omega q_m;$$

$$\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}.$$

Для того, чтобы найти I_m и φ представим исходное уравнение

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \varepsilon_m \cos\omega t$$

в виде:

$$U_L + U_R + U_C = \varepsilon_m \cos t,$$

где слева записана сумма напряжений на индуктивности L, сопротивления R и емкости C. Таким образом, мы видим, что сумма этих напряжений равна в каждый момент времени внешней ЭДС ε. Учитывая соотношения

$$I_m = \omega q_m$$

и

$$\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$$

запишем:

$$U_R = RI = RI_m \cos(\omega t - \varphi);$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega t - \psi) = \frac{I_m}{\omega C}\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t - \varphi) = \omega L I_m \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Векторная диаграмма. Из последних трех формул видно, что U_R *находится в фазе* с током *I*, U_C *отстает* по фазе от тока на $\frac{\pi}{2}$, а U_L *опережает* на $\frac{\pi}{2}$. Все это можно наглядно представить с помощью векторной диаграммы, изобразив амплитуды напряжений

$$U_{Rm} = RI_m;$$

$$U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C};$$

$$U_{Lm} = \omega L I_m$$

и их векторную сумму, равную, согласно

$$U_L + U_R + U_C = \varepsilon_m \cos t,$$

вектору величины ε_m (рис. 16.4)

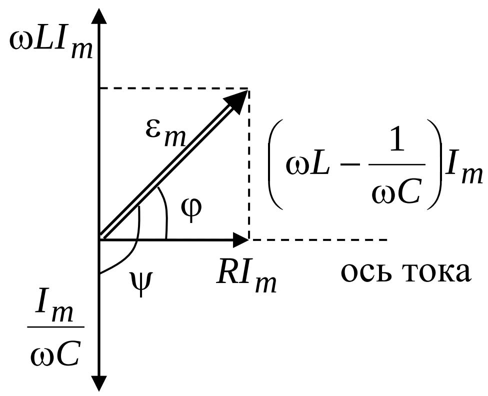


Рис. 16.4

Из прямоугольного треугольника этой диаграммы легко получить следующие выражения для I_m и φ в уравнении $I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$:

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

Задача, таким образом, решена.

16.4. Электрический резонанс. Резонансные кривые

Электрическим резонансом называется явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы (частоты вынуждающего переменного напряжения или внешней переменной ЭДС ε) к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы. Графики зависимостей амплитуд тока *I*, заряда *Q* на конденсаторе и напряжений U_R, U_C, U_L от частоты ω внешней ЭДС ε называются резонансными кривыми. Резонансные кривые для силы тока $I_m(\omega)$ показаны на рис. 16.5. Как видно из выражения

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

амплитуда силы тока имеет максимальное значение при $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$. Следовательно, резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура:

$$\omega_{I_{\text{рез}}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Максимум при резонансе оказывается тем выше и острее, чем меньше коэффициент затухания $\beta = \frac{R}{2L}$.

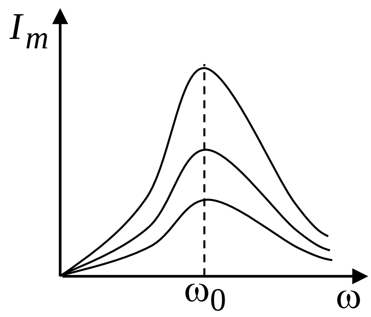


Рис. 16.5

Резонансные кривые для заряда на конденсаторе $Q_m(\omega)$ показаны на рис. 16.6 (резонансные кривые для напряжения U_{Cm} на конденсаторе имеют такой же вид). Максимум амплитуды заряда достигается при резонансной частоте

$$\omega_{Q_{\text{рез}}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

которая по мере уменьшения β все больше приближается к ω_0. Для получения этого выражения надо представить q_m, согласно $I_m = \omega q_m$, как $q_m = \dfrac{I_m}{\omega}$, где

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

тогда

$$q_m = \frac{\dfrac{\varepsilon_m}{L}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Максимум этой функции, или, что то же самое, минимум подкоренного выражения, найдем, приравняв производную по ω от подкоренного выражения к нулю

$$-4\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\omega + 8\beta^2\omega = 0.$$

Это равенство выполняется при $\omega = 0$, $\pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, у которых только положительное значение имеет физический смысл. Следовательно, резонансная частота

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,.$$

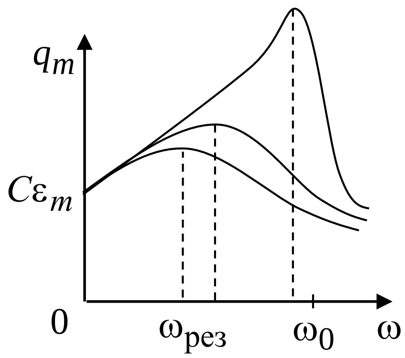


Рис. 16.6

На рис. 16.7 изображено перераспределение амплитуд напряжений U_R, U_C, U_L в зависимости от частоты ω внешней ЭДС.

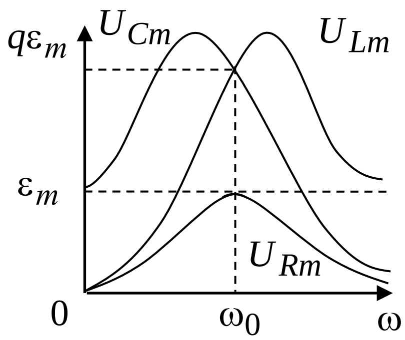


Рис. 16.7

Резонансные частоты для U_R, U_C, U_L определяются следующими формулами:

$$\omega_{R_{рез}} = \omega_0;$$

$$\omega_{C_{\text{рез}}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2} \; ;$$

$$\omega_{L_{\text{рез}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}} \, .$$

Чем меньше β, тем ближе резонансные частоты всех величин к значению ω_0.

Резонансные кривые и добротность. Форма резонансных кривых определенным образом связана с добротностью Q контура. Особенно простой эта связь оказывается для случая слабого затухания, т.е. при $\beta \ll \omega_0$. В этом случае

$$\frac{U_{C_{\text{рез}}}}{\varepsilon_m} = Q,$$

где Q – добротность.

Действительно, при $\beta \ll \omega_0$, величина $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$ и

$$U_{C_{\text{рез}}} = \frac{I_m}{\omega C} = \frac{\varepsilon_m}{\omega_0 CR}$$

или

$$\frac{U_{C_{m\text{рез}}}}{\varepsilon_m} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R}\sqrt{L/C} \, ,$$

а это и есть добротность Q контура.

Таким образом, добротность контура (при $\beta \ll \omega_0$) показывает, во сколько раз максимальное значение амплитуды напряжения на конденсаторе (и на индуктивности) превышает амплитуду внешней ЭДС.

Добротность контура связана с другой важной характеристикой резонансной кривой – ее шириной. При $\beta \ll \omega_0$

$$Q = \frac{\omega_0}{\delta\omega},$$

где ω_0 - резонансная частота; $\delta\omega$ - ширина резонансной кривой на «высоте», равной 0,7 от максимальной, т.е. в резонансе.

Резонанс. Таким образом, явление резонанса в случае электромагнитных колебаний – это возбуждение сильных колебаний при частоте внешней ЭДС или напряжения, равной или близкой к собственной частоте колебательного контура. Резонанс используют для выделения из сложного напряжения нужной составляющей. На этом основана вся техника радиоприема. Для того, чтобы радиоприемник принимал интересующую нас радиостанцию, его необходимо настроить, т.е. изменением C и L колебательного контура добиться совпадения его собственной частоты с частотой электромагнитных волн, излучаемых радиостанцией.

Важно! С явлением *резонанса* связана и *опасность*: внешняя ЭДС или напряжение могут быть малы, однако при этом напряжение на отдельных элементах контура (на емкости или индуктивности) могут достигать опасного для жизни значения. Об этом необходимо всегда помнить!

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой колебательный контур? Для чего он служит?
2. Какие процессы происходят при свободных гармонических колебаниях в колебательном контуре? Чем определяется период и амплитуда колебаний, собственная частота контура?
3. Запишите выражения для силы тока в колебательном контуре, напряжения на конденсаторе. Проанализируйте их.
4. Запишите дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний и проанализируйте его. Что является его решением?
5. Как определяется период затухающих колебаний? Что такое время релаксации, коэффициент затухания, добротность колебательного контура?
6. Какие колебания называются апериодическими? Что такое автоколебания? При каких условиях они наблюдаются, где применяются?
7. Дайте определение вынужденных электромагнитных колебаний. Что играет роль периодически действующего фактора в случае вынужденных электромагнитных колебаний? Запишите дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний и его решение.
8. От чего зависит амплитуда вынужденных электромагнитных колебаний? Запишите выражение для амплитуды и фазы при резонансе.
9. Дайте определение резонанса в случае электромагнитных колебаний. Для чего используют это явление?