

6.9. Маховик вращается с частотой $n = 10$ об/с. Его кинетическая энергия $W_k = 7,85$ кДж. За какое время t момент силы $M = 50$ Н·м, приложенный к маховику, увеличит угловую скорость ω маховика вдвое?

Ответ: $t = 5$ с.

6.10. Человек массой $m_0 = 60$ кг находится на неподвижной платформе массой $m = 100$ кг. С какой частотой n будет вращаться платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом $r = 5$ м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы $v_0 = 4$ км/ч. Радиус платформы $R = 10$ м. Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой.

Ответ: $n = 8,2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$.

7. СТАТИКА

Основные формулы и методические указания

Статика – раздел механики, в котором рассматриваются условия равновесия материальных точек и абсолютно твердых тел.

Момент силы относительно оси, проходящей через т. O определяется выражением

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}],$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из т. O в точку приложения силы \vec{F} .

$$M = \pm |\vec{F}|h,$$

где h – плечо силы (длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы).

Момент силы считается положительным, если сила, действуя в отдельности, вращала бы тело по часовой стрелке, и отрицательным, если бы вращала тело против часовой стрелки.

Когда алгебраическая сумма моментов всех сил относительно произвольной оси равна нулю, то тело не вращается или вращается равномерно

$$\sum M_i = 0.$$

Если тело рассматривается как материальная точка, то условие покоя есть равенство

$$\sum \vec{F}_i = 0.$$

Если тело рассматривается как абсолютно твердое, то условием равновесия являются 2 условия:

1) алгебраическая сумма проекций всех сил, приложенных к телу, на выбранные направления равна нулю

$$\sum_i F_{ix} = 0; \quad \sum_i F_{iy} = 0; \quad \sum_i F_{iz} = 0;$$

2) алгебраическая сумма моментов всех сил, приложенных к телу, относительно оси, проходящей через любую точку O , равна нулю

$$\sum_i M_i = 0.$$

Центром масс системы материальных точек называется воображаемая точка C , положение которой характеризует распределение массы этой системы. Его радиус-вектор равен

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i^n m_i \vec{r}_i}{m},$$

m_i и \vec{r}_i – масса и радиус-вектор i -й материальной точки, n – число материальных точек системы, $m = \sum_{i=1}^n m_i$ – масса системы.

Для всех тел, рассматриваемых в нашем курсе, центр масс и центр тяжести совпадают.

Для произвольного количества материальных точек m_i , координаты которых известны (x_i, y_i , где $i = 1, \dots, N, N$ – число материальных точек) центр тяжести системы (центр масс) рассчитывается по формулам

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Груз массой m подвешен на кронштейн ABC . Угол между стержнями AB и BC равен α . Найти усилия в стержнях AB и BC .

Решение.

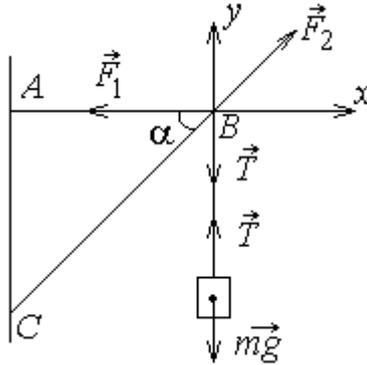


Рис. 7.1

Узел B находится в равновесии, поэтому

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad (7.1)$$

или в проекциях на оси x и y

$$\sum_i F_{ix} = 0; \quad \sum_i F_{iy} = 0. \quad (7.2)$$

На узел B действуют силы: натяжения нити \vec{T} , силы реакции стержней AB (\vec{F}_1) и BC (\vec{F}_2). Запишем уравнение (7.1) для узла B

$$Ox: -F_1 + F_2 \cos \alpha = 0,$$

$$Oy: -T + F_2 \sin \alpha = 0.$$

Силу натяжение нити найдем из условия равновесия сил для груза m

$$\vec{T} + m\vec{g} = 0,$$

$$T - mg = 0,$$

$$T = mg.$$

Получим:

$$F_2 = \frac{mg}{\sin \alpha}, \quad F_1 = mg \operatorname{ctg} \alpha.$$

Задача 2. Какую минимальную силу F , направленную горизонтально, нужно приложить к катку цилиндрической формы массой m и радиусом R , чтобы перекатить его через ступеньку высотой h ?

Решение.

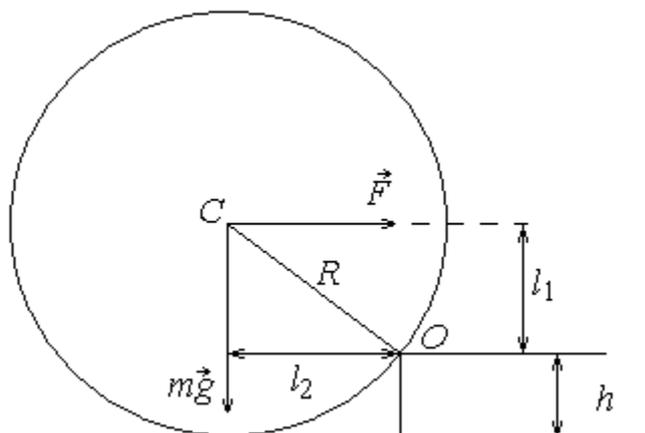


Рис. 7.2

Чтобы перекатить каток через ступеньку (повернуть вокруг точки опоры O), необходимо выполнение условия: момент силы F , вращающий каток по часовой стрелке вокруг точки O , равен моменту силы тяжести, вращающего каток против часовой стрелки. (Момент силы опоры равен нулю, так как плечо этой силы равно нулю).

$$M_1 = M_2, \quad Fl_1 = mgl_2, \quad (7.3)$$

где l_1 – плечо силы \vec{F} , l_2 – плечо силы тяжести.

$$l_2 = \sqrt{R^2 - (R - h)^2} = \sqrt{h(2R - h)}, \quad l_1 = R - h.$$

Подставим l_1 и l_2 в (7.3), получим

$$F(R - h) = mg\sqrt{h(2R - h)},$$

$$F = \frac{mg\sqrt{h(2R - h)}}{R - h}.$$

Задача 3. Материальные точки с массами m , $2m$, $3m$ и $4m$ расположены в вершинах прямоугольника со сторонами $l_1 = 0,4$ м и $l_2 = 0,8$ м. Найти центр тяжести системы этих материальных точек.

Решение.

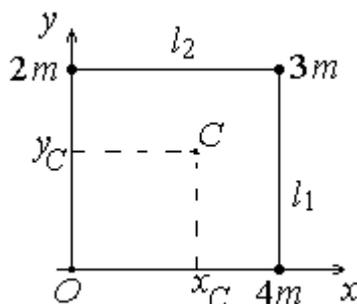


Рис. 7.3

Совместим начало координат с вершиной прямоугольника, в которой расположена материальная точка массой m . Оси координат направим по сторонам прямоугольника. Тогда

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{mx_1 + 2mx_2 + 3mx_3 + 4mx_4}{m + 2m + 3m + 4m} = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4}{10},$$

соответственно

$$y_C = \frac{y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4}{10}.$$

Из построения следует, что

$$x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = 0, y_2 = l_2, x_3 = x_4 = l_2, y_3 = l_1, y_4 = 0.$$

Отсюда

$$x_C = \frac{3l_2 + 4l_2}{10} = 0,7l_2; \quad x_C = 0,56 \text{ м},$$

$$y_C = \frac{2l_1 + 3l_1}{10} = 0,5l_1; \quad y_C = 0,2 \text{ м}.$$

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Фонарь массой $m = 10$ кг висит посередине улицы шириной $l = 10$ м. Допустимая сила натяжения каната $T = 500$ Н. На какой высоте H могут быть закреплены концы каната, чтобы точка подвеса фонаря находилась на высоте $h = 5$ м?

Ответ: $H_{\min} = h + \frac{mgl}{2\sqrt{4T^2 - (mg)^2}} = 5,5 \text{ м}.$