

9. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Основные формулы и методические указания

Для установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости имеет место уравнение Бернулли:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \text{const},$$

где ρ – плотность жидкости в данном сечении труб, h – высота данного сечения трубы над некоторым уровнем, p – давление.

Сила сопротивления, которую испытывает падающий в вязкой жидкости (в газе) шарик, определяется силой Стокса:

$$F = 6\pi\eta r v,$$

где η – динамическая вязкость жидкости (газа), r – радиус шарика, v – его скорость.

Закон Стокса справедлив только для ламинарного движения. Формула Пуазейля определяет объем жидкости (газа), протекающий за время t через капиллярную трубку радиусом r и длиной l :

$$V = \frac{\pi r^4 t \Delta p}{8l\eta},$$

где η – динамическая вязкость жидкости (газа), Δp – разность давлений на концах трубки.

Характер движения жидкости определяется безразмерным числом Рейнольдса:

$$R_e = \frac{D v \rho}{\eta} = \frac{D v}{\nu},$$

где D – величина, характеризующая линейные размеры тела, обтекаемого жидкостью (газом), v – скорость течения, ρ – плотность, η – динамическая вязкость.

Отношение $\nu = \eta / \rho$ называется кинематической вязкостью.

Переход от ламинарного движения к турбулентному определяется критическим значением числа Рейнольдса.

Объем жидкости, протекающий за единицу времени, равен произведению площади сечения на скорость:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \text{или} \quad Sv = \text{const}.$$

Это уравнение неразрывности струи (теорема Эйлера).

Сила внутреннего трения для ньютоновских жидкостей выражается уравнением Ньютона:

$$\vec{F} = \eta \frac{d\vec{v}}{dx} S,$$

где η – коэффициент внутреннего трения или динамическая вязкость, \vec{F} направлена перпендикулярно $\frac{d\vec{v}}{dx}$.

Примеры решения задач

Задача 1. Наблюдая под микроскопом движение эритроцитов в капилляре, можно измерить скорость течения крови ($v_{\text{кп}} = 0,5$ мм/с). Средняя скорость тока крови в аорте составляет $v_a = 40$ см/с. На основании этих данных определить, во сколько раз сумма поперечных сечений всех функционирующих капилляров больше сечения аорты.

Решение. Условие неразрывности струи получено для трубки тока переменного сечения. Оно применимо и к разветвлению труб. Такое разветвление в задаче начинается с аорты (S_a) и заканчивается капиллярами (общая площадь сечения $S_{\text{кп}}$).

Запишем уравнение неразрывности:

$$S_a \cdot v_a = S_{\text{кп}} \cdot v_{\text{кп}},$$

отсюда находим

$$\frac{S_{\text{кп}}}{S_a} = \frac{v_a}{v_{\text{кп}}} = 800 \text{ раз.}$$

Задача 2. В цилиндрическом стакане, высота которого $h = 10$ см и внутренний диаметр $D = 5$ см вращается вода. Градиент скорости воды вблизи поверхности стакана равен $\frac{dv}{dr} = 2 \text{ с}^{-1}$. Найти момент силы, действующий со стороны жидкости на стакан. Считать, что вода заполняет весь стакан и сохраняет форму цилиндра. Вязкость воды принять равной $\eta = 1 \text{ мПа} \cdot \text{с}$.

Решение. Со стороны воды на внутреннюю поверхность стакана действует сила внутреннего трения \vec{F} , направленная по касательной к внутреннему сечению (окружности) стакана. Момент этой силы равен:

$$M = \frac{F \cdot D}{2}. \quad (9.1)$$

По уравнению Ньютона находим силу \vec{F} :

$$F = \eta \frac{dv}{dr} S = \eta \frac{dv}{dr} h \pi D. \quad (9.2)$$

Подставляя (9.2) в (9.1), получаем:

$$M = \eta \frac{dv}{dr} \cdot \frac{h \pi D^2}{2} = 7,9 \cdot 10^{-7} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Задача 3. По горизонтальной трубке переменного сечения протекает вода. Статистическое давление в точке x_0 равно $p_0 = 0,3$ Па, а скорость воды $v_0 = 4$ см/с. Найти статистическое и динамическое давление в точке x_1 , если отношение сечение трубы $S_{x_0} : S_{x_1} = 0,5$. Вязкость воды не учитывать.

Решение. Из уравнения неразрывности струи получаем:

$$S_{x_0} v_0 = S_{x_1} v_1, \quad \Rightarrow v_1 = \frac{S_{x_0}}{S_{x_1}} v_0.$$

Подставляем это значение скорости в выражение для динамического давления:

$$p_d = \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho S_{x_0}^2 v_0^2}{2 S_{x_1}^2} = 0,2 \text{ Па}.$$

Уравнение Бернулли для горизонтальной трубы записывается таким образом:

$$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

Отсюда статическое давление