1. ЗАКОН КУЛОНА И НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1.1. Основные формулы

Закон Кулона в рационализованном виде:

$$F = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

где F – сила взаимодействия точечных зарядов или заряженных равномерно шаров; $|q_1||q_2|$ – модули зарядов; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл^2/(Н·м) (Ф/м) – электрическая постоянная; ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды, в которой взаимодействуют заряды $|q_1|$ и $|q_2|$; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд.

Напряженность электрического поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_\text{к}}{q}\left[\frac{\text{В}}{\text{м}}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

Напряженность поля точечного заряда:

$$E = k\frac{q}{r^2},$$

где q – заряд, создающий поле; r – расстояние от точки, где находится заряд, до точки, где создается поле.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Если зарядов несколько, то результирующая напряженность $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n.$$

1.2. Примеры решения задач

Задача 1. Два шарика одинаковых радиуса и массы подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда $q_0 = 0{,}4$ мкКл они оттолкнулись друг от друга и разошлись на угол 2α = 60°. Найти массу m каждого шарика, если расстояние от центра шарика до точки подвеса l = 20 см (рис. 1.1).

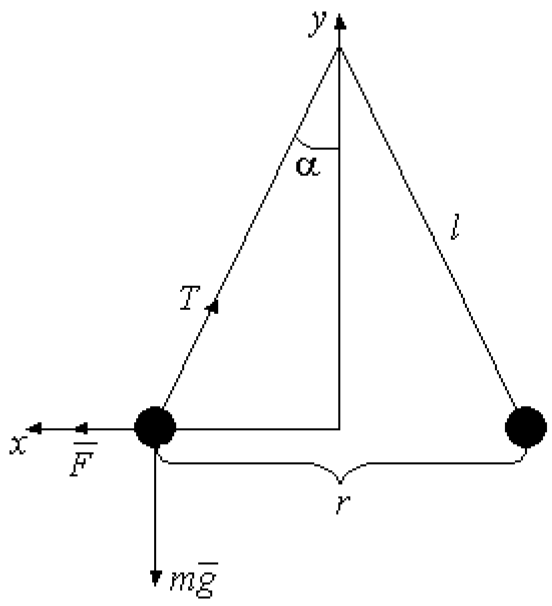

Рис. 1.1

Анализ и решение. На каждый шарик действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити *T*, сила электростатического отталкивания $\vec{F}$.

Условие равновесия шариков в векторной форме:

$$\vec{F} + \vec{T} + m\vec{g} = 0;$$

в проекциях на ось *x*:

$$\vec{F} - T\sin\alpha = 0; \qquad (1)$$

на ось *y*:

$$\vec{T}\cos\alpha - mg = 0. \qquad (2)$$

Из (1)

$$\vec{T} = \frac{\vec{F}}{\sin\alpha}.$$

Из (2)

$$\vec{T} = \frac{\vec{F}}{\cos\alpha}.$$

Следовательно

$$\vec{T} = \vec{T},$$

$$\frac{\vec{F}}{\sin\alpha} = \frac{m\vec{g}}{\cos\alpha},$$

$$\vec{F} = m\vec{g}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = m\vec{g}tg\alpha. \qquad (3)$$

Из рисунка

$$r/2 = l\sin\alpha \qquad (4)$$

$$r = 2l\sin\alpha.$$

По закону сохранения заряда, он распределился на два шарика равномерно

$$\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

Учитывая (3) и (4):

$$m\vec{g} \cdot \mathrm{tg}\alpha = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 4l^2 \sin^2\alpha} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2 \sin^2\alpha},$$

где $q = q_0 / 2$ – заряд на каждом шарике.

$$m = \frac{q_0^2}{4g\mathrm{tg}\alpha 16\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2 \sin^2\alpha} = \frac{q_0^2}{4 \cdot 16 \cdot g \cdot \mathrm{tg}\alpha \sin^2\alpha\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2} =$$

$$= \frac{0,4 \cdot 0,4 \cdot 10^{-6} 10^{-6}}{4 \cdot 16 \cdot 10 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \mathrm{tg}30^\circ \cdot \sin^2 30^\circ} = 15,6 \text{ г}.$$

Задача 2. Найти плотность материала ρ шариков из задачи 1, если известно, что при погружении этих шариков в керосин угол расхождения нитей стал равным $2\alpha_к = 54°$ (рис. 1.2).

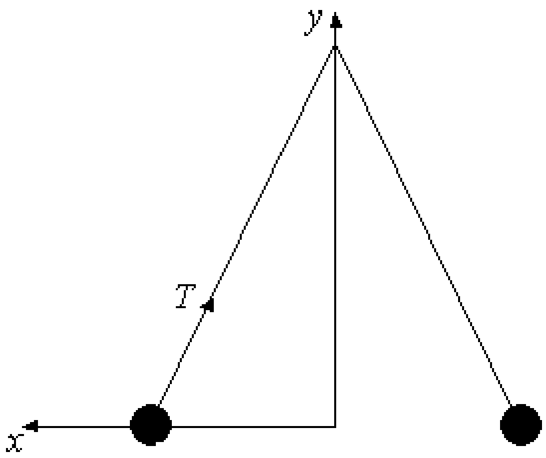

Рис. 1.2

Анализ и решение. При погружении шариков в керосин на каждый шарик стала действовать выталкивающая сила Архимеда F_A.

Для шарика на воздухе из задачи 1:

$$mg = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 4l^2 \sin^2\alpha\mathrm{tg}\alpha}, \qquad (1)$$

где ε = 1 – диэлектрическая проницаемость воздуха.

Для шарика при погружении в керосин:

$$mg - F_{\text{А}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_{\text{к}}\varepsilon_0 4l^2 \sin^2\alpha_{\text{к}} \operatorname{tg}\alpha_{\text{к}}}, \qquad (2)$$

так как
$$mg - F_{\text{А}} = \rho V g - \rho_{\text{к}} V g = (\rho - \rho_{\text{к}}) V g, \qquad (3)$$

где ρ – плотность материала шарика.

$$(\rho - \rho_{\text{к}}) V g = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_{\text{к}}\varepsilon_0 4l^2 \sin^2\alpha_{\text{к}} \operatorname{tg}\alpha_{\text{к}}}.$$

Делим на (1)

$$\frac{(\rho - \rho_{\text{к}}) V g}{\rho V g} = \frac{q^2 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 4l^2 \sin^2\alpha \operatorname{tg}\alpha}{4\pi\varepsilon_{\text{к}}\varepsilon_0 4l^2 \sin^2\alpha_{\text{к}} \operatorname{tg}\alpha_{\text{к}}} = \frac{\varepsilon \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha}{\varepsilon_{\text{к}} \sin^2\alpha_{\text{к}} \operatorname{tg}\alpha_{\text{к}}}.$$

Отсюда плотность материала

$$\rho = \rho_{\text{к}} \frac{\varepsilon_{\text{к}} \sin^2\alpha_{\text{к}} \operatorname{tg}\alpha_{\text{к}}}{\varepsilon_{\text{к}} \sin^2\alpha_{\text{к}} \operatorname{tg}\alpha_{\text{к}} - \varepsilon \sin^2\alpha \operatorname{tg}\alpha}.$$

Отсюда ρ = $2{,}55 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Задача 3. В центра квадрата, в каждой вершине которого находится заряд q = 2,33 нКл, помещен отрицательный заряд q_0. Найти этот заряд, если на каждый заряд q действует результирующая сила F = 0 (рис. 1.3).

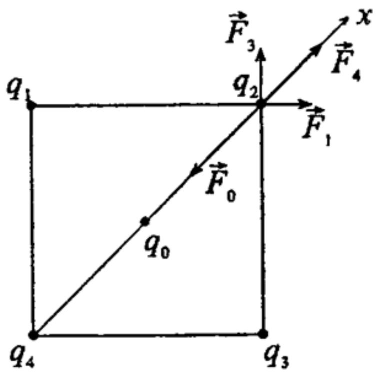

Рис. 1.3

Анализ и решение. Рассмотрим силы, действующие на любой из зарядов в вершинах, например, на заряд q_2. Со стороны зарядов q_1, q_3, q_3 на него действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$, соответственно, причем

$$F_1 = F_3 = \frac{kq^2}{a^2},$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

$$F_4 = k\frac{q^2}{2a^2}.$$

Сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_0, равна

$$F_0 = \frac{2kq|q_0|}{a^2}.$$

Условие равновесия заряда q_2

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_0 = 0. \qquad (1)$$

В проекции на ось x уравнение (1) имеет вид

$$F_1\cos 45^\circ + F_3\cos 45^\circ + F_4 - F_0 = 0,$$

$$\frac{kq^2}{2a^2} + k\frac{q^2}{a^2}\sqrt{2} + k\frac{2q|q_0|}{a^2} = 0.$$

Отсюда

$$-|q_0| = \frac{q^2}{2\cdot 2q} + \frac{q^2\sqrt{2}}{2q} = \frac{q}{4}(1 + 2\sqrt{2}) = -0{,}95q = -2{,}23 \text{ нКл}.$$

$$q_0 = -2{,}23 \text{ нКл}.$$

Задача 4. Два заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины опускаются в керосин плотностью 0,8 г/см^3. Какой должна быть плотность материала шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и в керосине был один и тот же? Диэлектрическая проницаемость керосина ε = 2 (рис. 1.4).

Анализ и решение.

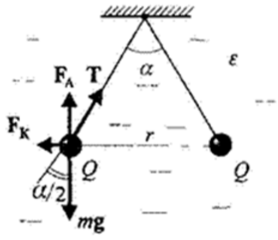

Рис. 1.4

$$F = mg\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$$F_к = (mg - F_А)\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

$$F_к = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

$$F_А = \rho_к V g,$$

$$mg = \rho V g,$$

$$\frac{F}{mg}=\frac{F_{\text{к}}}{mg-F_{\text{А}}}; \qquad \rho=\frac{\varepsilon\rho_{\text{к}}}{\varepsilon-1};$$

$$\rho=\frac{2\cdot 8\cdot 10^{2}}{2-1}=16\cdot 10^{2}\ \text{кг/м}^3\ (16\ \text{г/см}^3).$$

Задача 5. Найти напряженность E электрического поля на расстоянии r = 0,2 нм от одновалентного иона. Заряд иона считать точечным.

Анализ и решение. Заряд одновалентного иона по абсолютной величине равен заряду электрона.

Одновалентный ион создает электрическое поле с напряженностью

$$E=\frac{|q|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2};$$

$$E=\frac{1{,}6021892\cdot 10^{-19}}{4\cdot 3{,}14\cdot 1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 10^{-9}10^{-9}}\approx\frac{16{,}03}{12\cdot 0{,}04}\approx 36\ \text{Кл/м}.$$

1.3. Задачи для самостоятельного решения

1.1. Два одинаковых маленьких шарика массой по 0,01 г подвешены на шелковых нитях длиной по 1 м так, что они касаются друг друга. Один из шариков отвели в сторону, зарядили и привели в сопротивление с другим шариком, после чего шарики отошли друг от друга на расстояние 14 см. Определить величину заряда первого шарика до соприкосновения его с другим шариком.

[q = ±7,8·10^9 Кл]

1.2. Найти напряженность E электростатического поля на расстоянии r = 2·10^{-8} см от одновалентного иона. Заряд иона считать точечным.

[E = 3,6·10^{10} В/м]

1.3. Найти напряженность E электростатического поля в точке, лежащей посередине между точечными зарядами q_1 = 8·10^{-9} Кл и q_2 = -6·10^{-9} Кл. Расстояние между зарядами r = 10 см, ε = 1.

[E = 5,04 В/м]

1.4. Во сколько раз энергия электростатического взаимодействия двух частиц с зарядом q и массой m больше энергии их гравитационного взаимодействия? Решить задачу для: 1) электронов; 2) протонов.

$$\left[\frac{W_{\text{эл}}}{W_{\text{гр}}}=4{,}17\cdot 10^{42};\frac{W_{\text{пр}}}{W_{\text{гр}}}=1{,}24\cdot 10^{36}\right]$$

1.5. заряды 90 и 10 нКл расположены на расстоянии 4 см друг от друга. Где надо разместить третий заряд, чтобы силы, действующие на него со стороны других зарядов, были равны по модулю и противоположны по направлению?

[В 1 см от меньшего и в 3 см от большего зарядов]