

**11.13.** Две катушки намотаны на один общий сердечник. Индуктивность первой катушки  $L_1 = 0,2$  Гн, второй –  $L_2 = 0,8$  Гн, сопротивление второй катушки  $R_2 = 600$  Ом. Какой ток  $I_2$  потечет во второй катушке, если ток  $I_1 = 0,3$  А, текущий в первой катушке, выключить в течение времени  $t = 1$  мс.

$$[I_2 = 0,2 \text{ А}]$$

**11.14.** В магнитное поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл помещена квадратная рамка из медной проволоки. Площадь поперечного сечения проволоки  $S = 1 \text{ мм}^2$ , площадь рамки  $S = 25 \text{ см}^2$ . Нормаль к плоскости рамки параллельна магнитному полю. Какое количество электричества пройдет по контуру рамки при исчезновении магнитного поля?

$$[q = 74 \text{ мКл}]$$

**11.15.** Катушка имеет индуктивность  $L = 0,2$  Гн и сопротивление  $R = 1,64$  Ом. Во сколько раз уменьшится ток в катушке через время  $t = 0,05$  с после того, как ЭДС выключена и катушка замкнута накоротко?

$$[\text{в } 1,5 \text{ раза}]$$

## 12. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

### 12.1. Основные формулы

Уравнение гармонических колебаний:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$\text{или } x = A \cos(\omega t + \varphi_2),$$

где  $x$  – смещение от положения равновесия;

$A$  – амплитуда колебаний;

$\omega$  – циклическая частота;

$\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – начальные фазы колебаний.

Циклическая частота:

$$\omega = 2\pi\nu \text{ или } \omega = \frac{2\pi}{\Phi},$$

где  $\nu$  – линейная частота;

$\Phi$  – период.

Скорость точки, совершающей гармонические колебания:

$$\vartheta = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$\text{или } \vartheta = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Ускорение при гармоническом колебании:

$$a = \frac{d\vartheta}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$\text{или } a = \frac{d\vartheta}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Возвращающаяся сила:

$$F = -kx,$$

где  $k = m\omega^2$ .

Полная энергия колеблющейся точки:

$$E = T + \Pi = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

Период колебаний:

а) тела, подвешенного на пружине:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где  $k$  – жесткость пружины.

б) математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

в) физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}},$$

где  $J$  – момент инерции тела относительно оси колебаний;

$a$  – расстояние центра тяжести маятника от оси колебаний.

Уравнение затухающих колебаний:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$\text{или } x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_2),$$

где  $A_0$  – амплитуда в момент времени  $t$ ;

$\delta$  – коэффициент затухания.

Логарифмический декремент затухания:

$$\lambda = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} = \delta T.$$

Условия резонанса:

$$\omega = \omega_0.$$

Скорость  $\vartheta$  распространения волны, длина волны  $\lambda$  частоты  $\nu$  связаны:

$$\vartheta = \lambda\nu;$$

$$\vartheta = \frac{\lambda}{\Phi}.$$

Уравнение бегущей волны:

$$y = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right),$$

где  $x$  – расстояние точки от источника колебаний.

Разность фаз  $\Delta\varphi$  колебаний двух точек среды:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda},$$

где  $\Delta x$  – расстояние между точками.

## 12.2. Примеры решения задач

**Задача 1.** Материальная точка массой  $m = 5$  г совершает гармонические колебания с частотой  $\nu = 0,5$  Гц и амплитудой  $A = 3$  см. Определить: 1) скорость  $v$  точки в момент времени, когда смещение  $x = 1,5$  см; 2) максимальную силу  $F_{\max}$ , действующую точку; 3) полную энергию  $E$  колеблющейся точки.

**Анализ и решение.** Уравнение колебания:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Скорость определяется:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega(\cos \omega t + \varphi).$$

Возведем оба уравнения в квадрат, разделим первое на  $A^2$ , второе на  $A^2\omega^2$  и сложим:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{4\pi^2\nu^2 A^2} = 1.$$

$$v = \pm 2\pi\nu \sqrt{A^2 - x^2} = \pm 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \sqrt{9 \cdot 10^{-4} - 2,25 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= \pm 8,270^{-2} \text{ м/с.}$$

Знак «+» – когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси  $x$ ; знак «-» – с отрицательным направлением оси  $x$ .

Сила  $F = ma$ , где

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -4\pi^2\nu^2 A \sin(\omega t + \varphi);$$

$$F = -4\pi^2\nu^2 mA \sin(\omega t + \varphi);$$

$$F_{\max} = 4\pi^2\nu^2 mA = 4 \cdot 9,87 \cdot 0,25 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,03 = 1,49 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

Полная энергия  $E$  равна максимальной кинетической энергии  $T_{\max}$ :

$$E = T_{\max} = \frac{m\vartheta_{\max}^2}{2};$$

$$\vartheta_{\max} \text{ при } \cos(\omega t + \varphi) = 1;$$

$$\vartheta_{\max} = 2\pi\vartheta A, \text{ тогда}$$

$$E = 2\pi^2 m \nu^2 A^2 = 2 \cdot 9,87 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,25 \cdot 9 \cdot 10^{-4} = 2,21 \cdot 10^{-5} \text{ Дж} = 22,1 \text{ мкДж}$$

**Задача 2.** Диск радиусом  $R = 24$  см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно к плоскости диска. Определить приведенную длину  $L$  и период  $T$  колебаний такого маятника.

**Анализ и решение.** Приведенная длина равна

$$L = \frac{J}{ma}.$$

По теореме Штейнера:

$$J = J_0 + ma^2,$$

где  $a = \frac{r}{2}$ , тогда

$$J = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{mr^2}{4} = \frac{3}{4}mr^2;$$

$$L = \frac{\frac{3}{4}mr^2}{m \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}r = \frac{3}{2} \cdot 0,24 = 0,36 \text{ м}.$$

Период колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{0,36}{10}} = 1,2 \text{ с}.$$

**Задача 3.** Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью  $\vartheta = 15$  м/с. Период колебаний шнура  $T = 1,2$  с, амплитуда  $A = 2$  см. Определить: 1) длину волны; 2) фазу колебания, смещение  $y$ , скорость  $\vartheta$  и ускорение  $a$  в точке, отстоящий на расстоянии  $x = 45$  см от источника воли в момент времени  $t = 4$  с; 3) разность фаз  $\Delta\varphi$  колебаний двух точек, отстоящих от источника воли на расстояниях  $x_1 = 20$  м и  $x_2 = 30$  м.

**Анализ и решение.**

1) Длина волны

$$\lambda = \vartheta T = 15 \cdot 1,2 \text{ м} = 18 \text{ м}.$$

2) Фаза колебаний, смещение, скорость и ускорение могут быть найдены с помощью уравнения волны:

$$y = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{\vartheta} \right),$$

где  $y$  – смещение точки;  $x$  – расстояние точки от источника воли.

### Фаза

$$\varphi = \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} \right) = \frac{2 \cdot 3,14}{1,2} \left( 4 - \frac{0,45}{0,15} \right) = 1,67\pi.$$

Смещение

$$y = 0,02 \sin 1,67\pi = 0,02 \sin 300^\circ = -0,0173 \text{ м}.$$

Скорость точки  $U$  – первая производная от смещения по времени.

$$\begin{aligned} U &= \frac{dy}{dt} = A\omega \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = \frac{2\pi A}{T} \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = \\ &= \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,02}{1,2} \cos 1,67\pi = 0,052 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

### Ускорение

$$a = \frac{dU}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = -0,02 \left( \frac{2 \cdot 3,14}{1,2} \right)^2 \sin 1,67\pi = 0,475 \text{ м/с}^2.$$

3) разность фаз  $\Delta\varphi$  связана с расстоянием  $\Delta x$  между точками:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{18} (30 - 20) = 1,1\pi.$$

## 12.3. Задачи для самостоятельного решения

**12.1.** Уравнение колебаний точки имеет вид  $x = 2 \sin 5t$  см. Определить максимальные значения скорости  $v$  и ускорения  $a$  точки.

$$[10 \text{ см/с}^2; -50 \text{ см/с}^2]$$

**12.2.** Точка колеблется гармонически. Амплитуда колебания  $A = 5$  см, круговая частота  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ . Начальная фаза  $\varphi_0 = 0$ . Определить ускорения точки в момент, когда ее скорость  $v = 8 \text{ см/с}$ .

$$[12 \text{ см/с}^2]$$

**12.3.** Точка совершает гармонические колебания по закону синуса. Наибольшее смещение точки  $A = 10$  см, наибольшая скорость  $v = 20 \text{ см/с}$ . Написать уравнение колебаний и найти максимальное ускорение  $a$  точки.

$$[x = 10 \sin 2t \text{ см}; 40 \text{ см/с}^2]$$

**12.4.** Точка совершает гармонические колебания. В некоторый момент времени  $t$  смещение точки  $x = 5$  см, скорость  $v = 20 \text{ см/с}$  и ускорение  $a = 80 \text{ см/с}^2$ . Найти амплитуду  $A$ , циклическую частоту  $\omega$ , период колебаний  $T$  и фазу  $\varphi$  колебаний в данный момент времени.

$$[7,07 \text{ см}; 4 \text{ с}^{-1}; 1,57 \text{ с}; 0,785 \text{ рад}]$$