

фотоэлектронов, равной 10 Мм/с. Работой выхода электронов из металла пренебречь.

Ответ: $\lambda = 4,36$ нм.

15. Красная граница фотоэффекта у лития 520 нм. Какую обратную разность потенциалов (задерживающее напряжение) нужно приложить к фотоэлементу (к фотокатоду подключается плюс, к аноду – коллектору – минус источника напряжения), чтобы задержать электроны, испускаемые литием под действием ультрафиолетового излучения, длина волны которого 220 нм.

Ответ: $U_{\text{зад}} = 3,8$ В.

Занятие № 8

Тема: Эффект Комптона

Краткая теория

Эффектом Комптона называется упругое рассеяние коротковолнового электромагнитного излучения на свободных или слабосвязанных электронах вещества, сопровождающееся увеличением длины волны. Эффект Комптона может быть объяснен на основе квантовых представлений о природе света – он является результатом упругого столкновения фотонов света со свободными электронами. При этом отразившиеся (или рассеянные) фотоны теряют часть энергии, что означает уменьшение частоты (увеличение длины волны) рассеянного излучения. Этот результат не укладывается в рамки волновой теории, согласно которой длина волны не должна изменяться при рассеянии.

Эффект Комптона может наблюдаться лишь в высокочастотной части электромагнитного излучения (рентгеновского и γ -излучения), так как энергия налетающего фотона должна значительно превышать энергию связи электрона с атомом. В видимой области спектра эффект не наблюдается.

Длина волны рассеянного излучения не зависит от длины волны падающего излучения и природы рассеивающего вещества, а определяется только углом рассеяния

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

где λ – длина волны падающего излучения, λ' – длина волны рассеянного излучения, θ – угол рассеяния, λ_c – комптоновская длина волны:

$$\left(\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} \right),$$

где m_0 – масса частицы, на которой происходит рассеяние, для электрона $\lambda_c = 2,426$ пм.

В составе рассеянного излучения присутствует и излучение первоначальной длины волны λ . Это объясняется тем, что налетающие фотоны сталкиваются не только со свободными или слабосвязанными электронами. Если электрон сильно связан с атомом, то фотон при соударении обменивается энергией и с атомом в целом. Поскольку масса атома на несколько порядков больше массы электрона, то атому передается лишь ничтожная часть энергии фотона. Поэтому рассеянное излучение в этом случае практически не изменяет длину волны по сравнению с падающим.

Примеры решения задач

Задача 8.1. Фотон с энергией $\varepsilon_{\text{ф}} = 0,75$ МэВ рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 60^\circ$. Принимая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения с фотоном были пренебрежимо малы, определить: а) энергию $\varepsilon'_{\text{ф}}$ рассеянного фотона, б) кинетическую энергию W электрона отдачи, в) направление движения электрона отдачи.

Решение

$\varepsilon_{\text{ф}} = 0,75$ МэВ
$\theta = 60^\circ$
$m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг
$\varepsilon'_{\text{ф}} - ?$ $W - ?$ $\varphi - ?$

а) Энергия фотона

$$\varepsilon_{\text{ф}} = h\nu = hc / \lambda \Rightarrow \lambda = hc / \varepsilon_{\text{ф}}.$$

Аналогично

$$\lambda' = hc / \varepsilon'_{\text{ф}}.$$

Подставим эти выражения в формулу Комптона:

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{hc}{2\varepsilon'_{\text{ф}}} - \frac{hc}{\varepsilon_{\text{ф}}} = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\epsilon_1}{\phi} - \frac{\epsilon_1}{\phi} = \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2^2} \Rightarrow \epsilon'_\phi = \left(\frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2^2} + \frac{1}{\epsilon} \right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\epsilon'_\phi = \left(\frac{2 \cdot 0,25}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}} \frac{1}{0,75 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}} \right)^{-1} = 6,9 \cdot 10^{12} \text{ Дж} = 0,43 \text{ МэВ}.$$

б) Кинетическая энергия электрона отдачи равна

$$W = \epsilon_\phi - \epsilon'_\phi = 0,75 - 0,43 = 0,32 \text{ МэВ}$$

в) По закону сохранения импульса импульс налетающего фотона \vec{p}_ϕ равен векторной сумме импульсов рассеянного фотона \vec{p}'_ϕ и электрона отдачи $m_0 \vec{v}$ (рис. 8.1):

$$\vec{p}_\phi = \vec{p}'_\phi + m_0 \vec{v}.$$

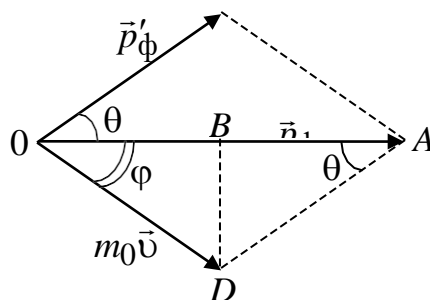


Рис. 8.1

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{BD}{BO} = \frac{AD \sin \theta}{OA - AD \cos \theta}. \quad (1)$$

Отметим, что $AD = p'_\phi$, а $OA = p_\phi$, следовательно:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p'_\phi \sin \theta}{p_\phi - p'_\phi \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\frac{p_\phi}{p'_\phi} - \cos \theta}. \quad (2)$$

Учитывая, что $p_\phi = \frac{\epsilon_\phi}{c}$ и $p'_\phi = \frac{\epsilon'_\phi}{c}$, получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \theta}{\frac{\varepsilon_{\phi}}{\varepsilon'_{\phi}} - \cos \theta} = \frac{0,867}{\frac{0,75}{0,43} - 0,5} = 0,697,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 0,697 = 35^{\circ}$$

Ответ: $\varepsilon'_{\phi} = 0,43$ МэВ, $W = 0,32$ МэВ, $\varphi = 35^{\circ}$.

Задача 8.2. В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном был рассеян на угол $\theta = 90^{\circ}$. Энергия рассеянного фотона ε'_{ϕ} равна 0,4 МэВ. Определить энергию ε_{ϕ} фотона до рассеяния.

Решение

$\theta = 90^{\circ}$ $\varepsilon'_{\phi} = 0,4$ МэВ $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> $\varepsilon_{\phi} = ?$	Энергия падающего фотона $\varepsilon_{\phi} = h\nu = hc/\lambda. \quad (1)$
	Аналогично для рассеянного фотона $\varepsilon'_{\phi} = hc/\lambda'. \quad (2)$

Из выражений (1) и (2) выразим λ и λ'

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon_{\phi}}, \quad (3)$$

$$\lambda' = \frac{hc}{\varepsilon'_{\phi}}. \quad (4)$$

Подставим (3) и (4) в формулу Комптона

$$\frac{hc}{\varepsilon'_{\phi}} - \frac{hc}{\varepsilon_{\phi}} = 2\lambda c \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (5)$$

С учетом $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$ получим

$$\frac{1}{\varepsilon'_{\phi}} - \frac{1}{\varepsilon_{\phi}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{m_0 c^2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{\phi} = \left(\frac{1}{\varepsilon'_{\phi} - \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{m_0 c^2}} \right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{\text{th}} = \left(\frac{1}{0,4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} - \frac{2 \cdot 0,5}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^8}} \right)^{-1} = 2,93 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 1,85 \text{ МэВ},$$

Ответ. $\varepsilon_{\phi} = 1,85 \text{ МэВ}$.

Задача 8.3. Рентгеновский фотон с частотой $7,5 \cdot 10^{18}$ Гц испытывает рассеяние на 90° на свободном электроне. Определить частоту фотона после столкновения, импульс и энергию электрона отдачи.

Решение

$\nu = 7,5 \cdot 10^{18} \text{ Гц}$ $\theta = 90^\circ$ $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> $\nu' - ? \quad p - ? \quad W_э - ?$	Длина волны λ и частота ν излучения связаны выражением $\lambda = c/\nu. \tag{1}$
--	---

Используем соотношение (1) в формуле Комптона

$$\lambda' - \lambda = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = 2 \frac{h}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Откуда следует

$$\nu' = \left(2 \frac{h}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\nu} \right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\nu' = \left(2 \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 0,5}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}} + \frac{1}{7,5 \cdot 10^{18}} \right)^{-1} = 7,07 \cdot 10^{18} \text{ Гц}.$$

Из закона сохранения импульса можно записать

$$\vec{p}_\phi = \vec{p}'_\phi + \vec{p}, \quad (2)$$

где $p_\phi = \frac{h\nu}{c}$ – импульс налетающего фотона, $p'_\phi = \frac{h\nu'}{c}$ – импульс рассеянного фотона, p – импульс электрона отдачи.

Выражение (2) отображается графически с учетом $\theta = 90^\circ$.

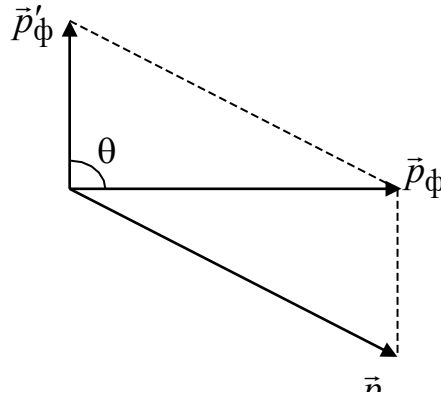


Рис. 8.2

Из рис. 8.2 можно записать:

$$p = \sqrt{p_\phi^2 + (p'_\phi)^2} = \frac{h}{c} \sqrt{\nu^2 + (\nu')^2} =$$

$$= \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^8} \sqrt{7,5^2 + 7,07^2} \cdot 10^{18} = 2 \cdot 10^{-23} \text{ (кг} \cdot \text{м/с)}.$$

Энергия электрона отдачи определится так

$$W = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{4 \cdot 10^{-46}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 0,22 \cdot 10^{-15} \text{ Дж.}$$

Ответ. $\nu' = 7,07 \cdot 10^{18}$ Гц, $p = 2 \cdot 10^{-23}$ кг · м/с, $W = 0,22 \cdot 10^{-15}$ Дж.

Задача 8.4. Фотон с энергией $\varepsilon_\phi = 1,025$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить угол рассеяния θ фотона, если длина волны рассеянного фотона оказалась равной комптоновской длине волны $\lambda_c = 2,43$ пм.

Решение

$\varepsilon_\phi = 1,025$ МэВ

Из соотношения

$\lambda' = \lambda_c = 2,43 \text{ пм}$ $\theta - ?$	$\varepsilon_{\text{ф}} = h\nu = hc / \lambda \Rightarrow \lambda = hc / \varepsilon_{\text{ф}}$	(1)
--	--	-----

Преобразуем формулу Комптона с помощью (1):

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow \lambda_c - \frac{hc}{\varepsilon_{\text{ф}}} = \lambda_c (1 - \cos\theta) \quad (2)$$

Из выражения (2) $\cos\theta = \frac{hc}{\varepsilon_{\text{ф}} \cdot \lambda_c} \Rightarrow$

$$\cos\theta = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,025 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \cdot 2,43 \cdot 10^{-12}} = 0,498 \approx 0,5.$$

$$\theta = \arccos 0,5 = 60^\circ.$$

Ответ. $\theta = 60^\circ$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить длину волны рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения под углом $\theta = 60^\circ$ длина волны рассеянного излучения оказалась равной 57 пм.

Ответ: $\lambda = 55,8 \text{ пм}$.

2. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. Оказывается, что длины волн рассеянного под углами $\theta_1 = 60^\circ$ и $\theta_2 = 120^\circ$ излучения отличаются в 1,5 раза. Определить длину волны падающего излучения, предполагая, что рассеяние происходит на свободных электронах.

Ответ: $\lambda = 3,64 \text{ пм}$.

3. Фотон с длиной волны $\lambda = 5 \text{ пм}$ испытал комптоновское рассеяние под углом $\theta = 90^\circ$ на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить: 1) изменение длины волны при рассеянии, 2) энергию электрона отдачи, 3) импульс электрона отдачи.

Ответ: 1) $\Delta\lambda = 2,43 \text{ пм}$; 2) $W_э = 81,3 \text{ кэВ}$; 3) $p_э = 1,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$.

4. Фотон с энергией $\varepsilon_{\text{ф}} = 0,25 \text{ МэВ}$ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить кинетическую энергию электрона отдачи, если длина волны рассеянного фотона изменилась на 20 %.