14. Угол рассеяния рентгеновских лучей с длиной волны λ = 5 пм равен $\theta = 30^\circ$, а электроны отдачи движутся под углом $\varphi = 60^\circ$ к направлению падающих лучей. Найти: 1) импульс электронов отдачи $p_э$, 2) импульс фотонов рассеянных лучей $p'_ф$.

Ответ: $p_э$ = 6,63 · 10^{-23} кг · м/с, $p'_ф$ = 1,14 · 10^{-22} кг · м/с.

15. Определить максимальное изменение длины волны при рассеянии света на протонах ($m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг).

Ответ: $\Delta\lambda_{max} = 2{,}64 \cdot 10^{-15}$ м.

16. Фотон с энергией $\varepsilon_ф$ = 0,25 МэВ рассеялся на свободном электроне. Энергия $\varepsilon'_ф$ рассеянного фотона равна 0,2 МэВ. Определить угол рассеяния θ.

Ответ: $\theta = 60^\circ 40'$ или $299^\circ 20'$.

17. Угол рассеяния фотона $\theta = 90^\circ$. Угол отдачи электрона $\varphi = 30^\circ$. Определить энергию $\varepsilon_ф$ падающего фотона.

Ответ: $\varepsilon_ф$ = 0,37 МэВ.

18. Фотон (λ = 1 пм) рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 90^\circ$. Какую долю своей энергии фотон передал электрону?

Ответ: 70 %.

19. При эффекте Комптона γ-квант с энергией $\varepsilon_ф$ = 1,533 МэВ был рассеян на некоторый угол θ. Найти угол рассеяния γ-кванта, если кинетическая энергия электрона отдачи оказалась равной $W_э$ = 0,511 МэВ.

Ответ: θ = 80,8°.

Занятие № 9

Тема: **Волны де-Бройля**

Краткая теория

Корпускулярно-волновая двойственность свойств характерна не только для света, она проявляется для всех частиц, обладающих импульсом. Эта идея принадлежит французскому физику Луи де-Бройлю, поэтому волны, которые сопровождают движение любой материальной частицы, носят название волн де-Бройля. Природа этих волн не электромагнитная.

Формула де-Бройля устанавливает зависимость длины волны, связанной с движущейся материальной частицей, от ее импульса p.

$$\lambda = h/p = h/(m\upsilon),$$

где m – масса частицы, υ – скорость частицы, h – постоянная Планка.

Если частица релятивистская, т.е. ее скорость υ сравнима со скоростью света в вакууме c, то импульс частицы определяется, как

$$p = m\upsilon = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}},$$

где m_0 – масса покоя частицы.

Соответственно изменяется формула де-Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}.$$

Волны де-Бройля, как и любые волны, характеризуются волновым числом, т.е. числом длин волн, укладывающимся на 2π единицах длины:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Объединив это выражение с формулой де-Бройля, получим еще один ее вид:

$$\vec{p} = \frac{h}{2\pi}\vec{k},$$

где $\vec{k}$ – волновой вектор, модуль его равен волновому числу k, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{p}$.

Длина волны де-Бройля для частицы с массой m, имеющей кинетическую энергию $W_к$, определяется из соотношения

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mW_к}}.$$

Для релятивистской частицы связь между кинетической энергией частицы $W_к$, определяется из уравнения

$$p^2c^2 = W_к(W_к + 2m_0c^2) \Rightarrow$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_к(W_к + 2m_0c^2)}.$$

У макроскопических тел волновые свойства не проявляются, так как масса их значительна и величина длины волны де-Бройля λ пренебрежимо мала.

Кроме формулы де-Бройля в квантовой механике принимается, что связь энергии частицы W с частотой ее волны де-Бройля ν имеет вид, аналогичный кванту энергии

$$W = h\nu = \hbar\omega,$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота.

Волны де-Бройля имеют специфическую природу, не имеющую аналогии в классической физике. Это так называемые вероятностные волны – квадрат модуля амплитуды волны де-Бройля в данной точке является мерой вероятности того, что частица будет обнаружена в этой точке.

Примеры решения задач

Задача 9.1. Найти длину волны де-Бройля λ для электрона, обладающего кинетической энергией: 1) $W_к$ = 100 эВ, 2) $W_к$ = 3,0 МэВ.

Решение

1) $W_к$ = 100 эВ 2) $W_к$ = 3 МэВ	Для определения того, является или нет электрон релятивистской частицей, необходимо сравнить его
$\lambda_1 - ?\ \lambda_2 - ?$	энергию с энергией его покоя $E_0 = m_0c^2$

$$E_0 = 9{,}1\cdot10^{-31}\cdot9\cdot10^{16} = 81{,}9\cdot10^{-15}\text{ Дж} = 0{,}512\text{ МэВ}.$$

1) 100 эВ << 512000 эВ, т.е. в данном случае электрон является классической частицей, поэтому его импульс $p = \sqrt{2mW_к}$. Из формулы де-Бройля следует

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2mW_к}} = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}}{\sqrt{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\cdot100\cdot1{,}6\cdot10^{-19}}} = 1{,}23\cdot10^{-10}\text{ м} = 1{,}23\ \mathring{A}.$$

2) 3 МэВ > 0,512 МэВ, поэтому в этом случае электрон надо считать релятивистской частицей, т.е. его импульс

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_к(W_к + 2m_0c^2)},$$

откуда следует, что

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{W_к(W_к + 2m_0c^2)}} \Rightarrow$$

$$\lambda_2 = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{\sqrt{3\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}(3\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19} + 2\cdot 0{,}512\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19})}} =$$

$$= 0{,}62\cdot 10^{-10}\ \text{м} = 0{,}62\ \overset{\circ}{A}.$$

Ответ: $\lambda_1 = 1{,}23\ \overset{\circ}{A}$, $\lambda_2 = 0{,}62\ \overset{\circ}{A}$.

Задача 9.2. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов U = 500 В, имеет длину волны де-Бройля λ = 1,282 пм. Принимая заряд этой частицы равным заряду электрона, определить ее массу.

Решение

U = 500 В λ = 1,282 пм $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл	Частица с зарядом е, пройдя ускоряющую разность потенциалов U, получает кинетическую энергию
$m - ?$	$$W_к = eU \qquad (1)$$

Из выражения (1) определяется импульс частицы

$$p = \sqrt{2mW_к} = \sqrt{2meU}. \qquad (2)$$

С учетом (2) формула де-Бройля запишется так:

$$\lambda = h/p = \frac{h}{\sqrt{2meU}},$$

откуда

$$m = \frac{h^2}{2e\lambda^2 U} \Rightarrow$$

$$m = \frac{6{,}62^2\cdot 10^{-68}}{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}282^2\cdot 10^{-24}\cdot 500} = 1{,}67\cdot 10^{-27}\ \text{кг}.$$

Ответ: $m = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг.

Задача 9.3. Определить длину волны де-Бройля для электрона, находящегося в атоме водорода на третьей боровской орбите.

Решение

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $n = 3$	Электрон в атоме водорода движется по орбите под действием кулоновской силы взаимодействия с ядром
$\lambda - ?$	

$$\frac{m_e \upsilon^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (1)$$

Орбитальный момент электрона квантуется в соответствии с соотношением:

$$m_e \upsilon r = n\hbar \qquad (2)$$

Совместное рассмотрение выражений (1) и (2) дает

$$\upsilon = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}. \qquad (3)$$

Подставим (3) в формулу де-Бройля

$$\lambda = \frac{h}{m_e \upsilon} = \frac{2h^2 n\varepsilon_0}{m_e e^2} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 6{,}62^2 \cdot 10^{-68} \cdot 3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6^2 \cdot 10^{-38}} = 99{,}89 \cdot 10^{-11} \approx 1 \text{ нм}.$$

Ответ: $\lambda = 1$ нм.

Задача 9.4. Найти длину волны де-Бройля для: а) электрона, движущегося со скоростью $\upsilon = 10^6$ м/с, б) атома водорода, движущегося со средней квадратичной скоростью при температуре $T = 300$ К, в) шарика массой $m = 1$ г, движущегося со скоростью $\upsilon = 1$ см/с.

Решение

а) $\upsilon = 10^6$ м/с $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг	а) В соответствии с формулой де-Бройля

б) $T = 300$ К

$\mu = 1\cdot 10^{-3}$ кг/моль

$N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

$R = 8{,}31$ Дж/(моль · К)

в) $m = 1$ г

$\upsilon = 1$ см/с

$\lambda_1 - ?\ \lambda_2 - ?\ \lambda_3 - ?$

$$\lambda_1 = \frac{h}{m_e \upsilon} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 10^{6}} = 0{,}73\cdot 10^{-9} = 0{,}73 \text{ нм.}$$

б) Средняя квадратичная скорость атома водорода определяется, как

$$\bar{\upsilon}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \tag{1}$$

Масса атома водорода равна

$$m = \frac{\mu}{N_A}. \tag{2}$$

Подставим (1) и (2) в формулу де-Бройля

$$\lambda_2 = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{hN_A}{\mu}\sqrt{\frac{\mu}{3RT}} = \frac{hN_A}{\sqrt{3\mu RT}} \Rightarrow$$

$$\lambda_2 = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}{\sqrt{3\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}31\cdot 300}} 14{,}6\cdot 10^{-11} \text{ м} = 146 \text{ пм.}$$

в) По формуле де-Бройля

$$\lambda_3 = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}}{10^{-3}\cdot 10^{-2}} = 6{,}62\cdot 10^{-29} \text{ м,}$$

Ответ: а) $\lambda_1 = 0{,}73$ нм, б) $\lambda_2 = 146$ пм, в) $\lambda_3 = 6{,}62\cdot 10^{-29}$ м, т.е. волновые свойства шарика обнаружить невозможно.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить импульс и энергию: 1) рентгеновского фотона, 2) электрона, если длина волны того и другого равна 10^{-10} м.

Ответ: 1) $p_\gamma = 6{,}62\cdot 10^{-24}$ кг · м/с, $W_\gamma = 12{,}4$ кэВ, 2) $p_e = 6{,}62\cdot 10^{-24}$ кг · м/с, $W_e = 151$ кэВ.