УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Классификация погрешностей

При нахождении физических величин различают два типа измерений: прямые и косвенные. При *прямом измерении* значение искомой величины определяется непосредственно с помощью измерительного прибора. При *косвенном измерении* значение искомой величины вычисляется по известной зависимости между ней и непосредственно определяемыми величинами.

Каждый результат проведенного измерения некоторой физической величины определяется с некоторой точностью. Точность экспериментальных данных отражает близость результатов к истинному значению измеряемой величины, а их погрешности характеризуют расхождение между истинными и полученными результатами.

Погрешности различаются по характеру проявления. *Грубые погрешности (промахи)* обычно связаны либо с неисправностью измерительной аппаратуры, либо с ошибкой экспериментатора. Результаты измерений, проведенные с грубыми погрешностями, нужно отбрасывать и проводить новые эксперименты.

Систематическими погрешностями называются такие, которые остаются постоянными или меняются по определенному закону при многократных измерениях величин. Они могут быть обусловлены методическими погрешностями, связанными с несовершенством метода измерения, или приборными погрешностями, связанными с несовершенством измерительных приборов или с их неправильной установкой. Использование более точных методов и более совершенных приборов позволяет уменьшить систематические погрешности, но полностью устранить их невозможно.

Случайными погрешностями измерений называются такие, абсолютная величина и знак которых меняются при многократных измерениях физической величины. Они могут быть обусловлены множеством случайных причин, действие которых на каждое измерение различно и не может быть заранее учтено. Случайные погрешности могут быть уменьшены путем многократного повторения экспериментов, из-за чего происходит частичная компенсация случайных отклонений результатов измерений.

Правильная оценка полученного результата включает в себя учет как случайных, так и систематических погрешностей.

Последовательность обработки результатов прямых измерений

При проведении учебных лабораторных экспериментов основной задачей является правильное нахождение величин, входящих в формулу $x = x_0 \pm \sigma$, по результатам ограниченного числа измерений. В математической статистике показано, что за истинное значение x_0 измеряемой n раз величины x можно принять среднее арифметическое значение x_0 всех полученных результатов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а именно $x_0 \approx \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. (4)

Величина $\overline{x}$ является наилучшим приближением к истинному значению x_0, но все же не дает его точного значения. Степень разброса этих результатов относительно среднего значения $\overline{x}$ на практике характеризуется среднеквадратичной (случайной) погрешностью (среднеквадратичным отклонением) среднего арифметического серии измерений $\overline{\Delta x} = \sigma$, которая рассчитывается по формуле $\overline{\Delta x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$. (5)

Среднеквадратичная погрешность среднего арифметического серии измерений дает приближенное значение стандартной ошибки σ.

Из соотношения для $\overline{\Delta x}$ видно, что эта погрешность может быть уменьшена за счет увеличения числа измерений *n*. Обычно при проведении лабораторных работ ограничиваются серией из пяти ($n = 5$) измерений. При $n \to \infty$ приближенные соотношения становятся точными, т.е. $\overline{x} = x_0$, $\overline{\Delta x} = \sigma$.

Для точной оценки результатов измерений учета одних только случайных погрешностей недостаточно. Приборная систематическая погрешность $\Delta x_{\text{пр}}$, обусловленная несовершенством измерительной аппаратуры, связана с точностью измерений прибора Δ соотношением $\Delta x_{\text{пр}} = \Delta/2$. (6)

Как правило, точность измерений прибора Δ указывается в паспорте или на нем самом. При отсутствии паспорта или указаний на приборе обычно считают, что приборная погрешность $\Delta x_{\text{пр}}$ равна половине цены наименьшего деления его шкалы, а если его стрелка перемещается не равномерно, а скачками (как у секундомера), то приборную погрешность считают равной цене наименьшего деления шкалы.

Полная абсолютная погрешность прямого измерения вычисляется по формуле $\Delta x_{\text{полн}} = \sqrt{\left(\overline{\Delta x}\right)^2 + \left(\Delta x_{\text{пр}}\right)^2}$ (7)

Относительная погрешность прямого измерения, характеризующая его качество и обычно выражающаяся в процентах, рассчитывается следующим образом: $\varepsilon_x = (\Delta x_{\text{полн}}/\overline{x}) \cdot 100\%$. (8)

Окончательный результат прямого измерения представляется в виде $x = \overline{x} \pm \Delta x_{\text{полн}}$. (9)

Последовательность обработки результатов косвенных измерений

При косвенном измерении значение искомой величины вычисляется по известной зависимости $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ между ней и непосредственно измеряемыми величинами x_1, $x_2, \ldots, x_n$. В этом случае сначала по формулам (4)–(9) обрабатываются результаты прямых измерений каждой величины x_i и представляются в виде $x_i = \overline{x}_i \pm \Delta x_{i\,\text{полн}}$.

Далее рассчитывается истинное значение величины *f*: $\overline{f} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$

где $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ средние значения измеренных величин x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Абсолютная погрешность Δf величины *f* связана с полными абсолютными погрешностями ($\Delta x_{i\,\text{полн}}$) прямых измерений и с видом самой функции *f*. В общем случае она вычисляется по формуле $\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \Delta x_{1\,\text{полн}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \Delta x_{2\,\text{полн}}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \Delta x_{n\,\text{полн}}^2}$, (10)

где $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ - частные производные функции *f* по независимым переменным x_1, $x_2, \ldots, x_n$, взятые при средних значениях аргументов.

Относительная погрешность косвенного измерения величины *f* определяется по формуле $\varepsilon_f = \left(\Delta f/\overline{f}\right) \cdot 100\%$.. (11)

В некоторых случаях, используя готовые формулы, проще сначала найти относительную погрешность ε_f, а уже потом рассчитать абсолютную: $\Delta f = \varepsilon_f \overline{f}$. (12)

В любом случае окончательный результат должен быть представлен в виде $f = \overline{f} \pm \Delta f$. (13)

Формулы, позволяющие рассчитать абсолютные и относительные погрешности в случае некоторых простых функциональных зависимостей, приведены в табл. 2. Заметим, что в этих случаях формулы для расчета относительной погрешности имеют более простой вид.

В табл. 2 x и y – непосредственно измеряемые физические величины; C, α, β – численные коэффициенты; f – косвенно измеряемая величина; $\Delta x, \Delta y$ – полные абсолютные погрешности прямых измерений.

Таблица 1

Вид функции f	Абсолютная погрешность Δf	Относительная погрешность ε_f
$f = C(x \pm y)$	$\Delta f = C\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$	$\varepsilon_f = \dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{x \pm y}$
$f = Cxy$	$\Delta f = C\sqrt{y^2(\Delta x)^2 + x^2(\Delta y)^2}$	$\varepsilon_f = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$
$f = \dfrac{Cx}{y}$	$\Delta f = C\dfrac{x}{y}\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$	$\varepsilon_f = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$
$f = Cx^{\alpha}y^{\beta}$	$\Delta f = Cx^{\alpha}y^{\beta}\sqrt{\alpha^2\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \beta^2\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$	$\varepsilon_f = \sqrt{\alpha^2\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \beta^2\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$

Округление результатов прямых измерений

Для округления результатов прямых измерений приняты следующие правила:

• при записи погрешности Δx ее необходимо округлить до двух значащих цифр, если первая из них является единицей, и до одной значащей цифры – в остальных случаях (значащими называются все цифры числа, кроме нулей, расположенных левее первой его цифры, отличной от нуля);

• округление чисел производится в соответствии со следующими правилами:

– если первая отбрасываемая справа цифра меньше 5, то стоящая перед ней цифра остается неизменной;

– если первая отбрасываемая справа цифра больше 5, то стоящая перед ней цифра возрастает на единицу;

– в случае, когда отбрасываемая цифра равна 5 и после нее следуют цифры больше нуля, стоящая перед ней цифра увеличивается на единицу;

• при записи среднего значения $\overline{x}$ последней дается цифра того десятичного разряда, который используется при указании погрешности.

При этом общий множитель, соответствующий порядку величины, выносится за скобки.

Например, правильная запись может иметь вид: $(1{,}63 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-19}$Кл.

Необходимая точность промежуточных результатов определяется тем, что расчет не должен вносить в окончательный итог дополнительной погрешности, поэтому в промежуточных вычислениях следует сохранить один лишний знак, который при записи окончательного варианта отбрасывается.

Точность обработки результатов измерений должна согласовываться с точностью самих измерений. Все лишние цифры нужно отбросить.