1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Закон Био-Савара-Лапласа

$$d\overline{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\bar{l},\bar{r}]}{r^3},$$

где $d\overline{B}$ – магнитная индукция, создаваемая элементом длины dl проводника с током I, находящимся на расстоянии r от рассматриваемой точки.

Принцип суперпозиции магнитных полей

$$\overline{B} = \sum \overline{B}_i .$$

Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током и круговым током

$$B = \frac{\mu_0\mu I}{2\pi a}, \quad B = \frac{\mu_0\mu I}{2R},$$

где a – расстояние от прямого тока до точки, R – радиус кругового тока.

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i .$$

Магнитное поле внутри соленоида и тороида

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 \frac{n}{I} I,$$

где $n = N/l$ – плотность числа витков, N – полное число витков, l – длина соленоида и тороида.

Сила Ампера, действующая на ток в магнитном поле

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}]$$

и сила Лоренца, действующая на заряд, движущийся со скоростью и в магнитном поле

$$\overline{F} = q[\overline{\upsilon}, \overline{B}].$$

Если на частицу также действует и электрическое поле

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \cdot \vec{B}].$$

Поперечная разность потенциалов в эффекте Холла

$$\Delta\varphi = \frac{RIB}{d},$$

где B – магнитная индукция, I – сила тока, d – толщина пластинки, $R = 1/en$ – постоянная Холла (n – концентрация электронов).

Поток вектора магнитной индукции сквозь произвольную поверхность S

$$\Phi_B = \int_S \overline{B} d\overline{S};$$

причем, если поверхность S замкнутая, полный поток вектора $\overline{B}$ сквозь нее равен нулю (теорема Гаусса).

Работа по перемещению проводника с током и контура с током в магнитном поле

$$dA = Id\Phi.$$

Примеры решения задач

Задача 1-1. По проволочной рамке, имеющей форму правильного шестиугольника, идет ток $I = 2\,A$. При этом в центре рамки образуется магнитное поле с индукцией $B = 4{,}15\ 10^{-5}$ Тл. Найти длину l проволоки, из которой сделана рамка.

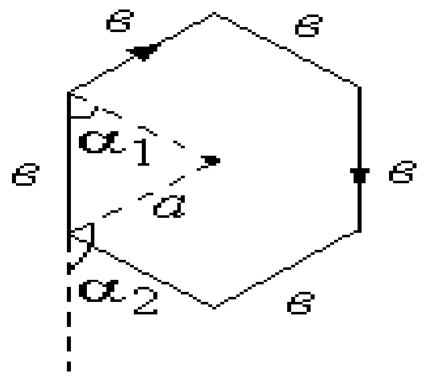

Рис. 1.1. К задаче 1-1

Решение. Шестиугольник (рис. 1.1) может быть разбит на 6 прямолинейных проводников длиной $в = \frac{l}{6}$. Длина перпендикуляра a, опущенного из центра на любую из его сторон, может быть рассчитана по теореме Пифагора $a^2 = в^2 - \frac{в^2}{4} = \frac{3}{4}в^2$. Следовательно, через длину проволоки она может быть выражена, как $a = \frac{в\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{12}$. Каждый из 6 проводников создает в центре шестиугольника магнитное поле с индукцией:

$$B_0 = \frac{\mu_O I}{4\pi\alpha}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2),$$

где $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 120°$.

Магнитное поле, создаваемое каждой из шести сторон шестиугольника, направлено от нас за чертеж, поэтому результирующий вектор индукции магнитного поля $B = 6\ B_0$ также направлен от нас за чертеж и равен

$$B_0 = \frac{B}{6} = \frac{\mu_O I \cdot 12}{4\pi l\sqrt{3}}(\cos 60^\circ - \cos 120^\circ).$$

Из этого соотношения может быть найдена искомая величина:

$$l = \frac{\mu_O I \cdot 12 \cdot 6 \cdot (\cos 60^\circ - \cos 120^\circ)}{4\pi\sqrt{3}B};$$

Численный расчет дает величину $l = 0{,}2$ м.

Задача 1-2. По двум прямолинейным бесконечно длинным проводникам, находящимся в воздухе на расстоянии $r = 0{,}7$ м, текут токи $I_1 = 10$ А и $I_2 = 4$ А, направленные перпендикулярно плоскости чертежа к нам (рис. 1.2). В какой точке между этими проводниками индукция результирующего магнитного поля этих токов равно нулю?

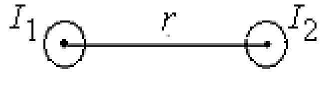

Рис. 1.2. К задаче 1-2

Решение. Картина силовых линий, создаваемых токами, изображена на рис. 1.3. Искомое расстояние между точкой M, в которой индукция магнитного поля этих токов равна нулю, и проводником I_1 обозначим как r_1.

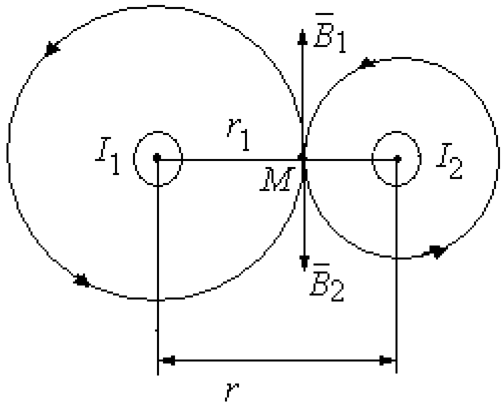

Рис. 1.3. Силовые линии магнитного поля. К задаче 1-2

Ток силой I_1 создает в точке M магнитное поле, вектор индукции которого $\vec{B}_1$, согласно правилу буравчика, направлен вверх. Вектор индукции $\vec{B}_2$ магнитного поля тока I_2 в той же точке M направлен вниз. Так как индукция результирующего магнитного поля в точке M равна нулю, то векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ антипараллельны и модули их равны. Их значения могут быть найдены по формулам

$$B_1 = \mu_0 \mu \frac{I_1}{2\pi r_1},$$

$$B_2 = \mu_0 \mu \frac{I_2}{2\pi (r - r_1)}.$$

Учитывая, что $B_1 = B_2$, имеем

$$\mu_0 \mu \frac{I_1}{2\pi r_1} = \mu_0 \mu \frac{I_2}{2\pi (r - r_1)},$$

откуда соотношение для нахождения искомого расстояния принимает вид

$$r_1 = \frac{I_1 r}{I_1 + I_2}.$$

Подставляя численные значения, находим, что $r_1 = 0{,}5$ м.

Задача 1-3. Два параллельных бесконечно длинных провода, по которым токи силой $I = 60$ А текут в одном направлении, расположены на расстоянии

d = 10 см друг от друга. Определить магнитную индукцию в точке, отстоящей на расстоянии a_1 = 5 см от одного проводника и a_2 = 12 см от другого.

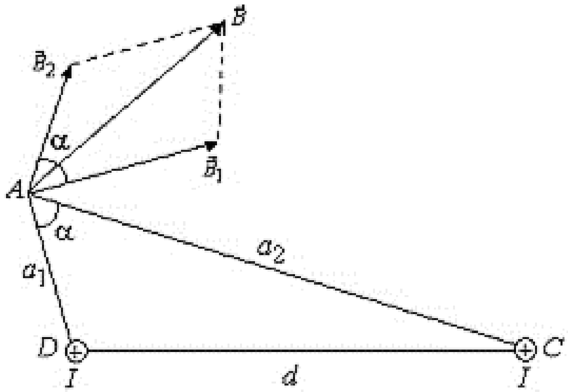

Рис. 1.4. К задаче 1.3

Решение. Магнитное поле в заданной точке *A* (рис. 1.4) создается обоими токами *I*. Согласно принципу суперпозиции полей магнитная индукция результирующего поля, равна векторной сумме магнитных индукций, созданных каждым током в отдельности, т.е.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Векторы $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ связаны с направлением токов в проводниках правилом правого винта и направлены по касательным к силовым линиям магнитных полей, созданных обоими проводниками с токами в искомой точке *A,* причем $\vec{B}_1 \perp AD$; $\vec{B}_2 \perp AC$. Как видно из рис. 1.4, точка *A* и оба параллельных проводника с токами не лежат в одной плоскости. Поэтому векторы $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ не лежат на одной прямой, т.е. не коллинеарны и образуют между собой угол α не равный 0° или 180°. В этом случае абсолютное значение вектора $\vec{B}$ может быть найдено по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos\alpha}.$$

Величины $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ можно найти с помощью закона Био-Савара-Лапласа. Их значения соответственно равны

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a_1};\; B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a_2},$$

где a_1, и a_2 – расстояния от точки *A* до проводников с токами *I*.

Для вычисления $\cos\alpha$, можно использовать теорему косинусов для треугольника *ACD*:

$$d^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos\alpha,$$

позволяющую прийти к соотношению

$$\cos\alpha = \frac{a_1^2 + a_2^2 - d^2}{2a_1a_2}.$$

Рассчитав значения B_1, B_2, а также $\cos\alpha$, для искомой величины найдем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{2}{a_1a_2}\frac{\left(a_1^2 + a_2^2 - d^2\right)}{2a_1a_2}} = \frac{\mu_0 I\sqrt{2\left(a_1^2 + a_2^2\right) - d^2}}{2\pi a_1a_2}.$$

Произведя численные вычисления, получим B = 308 мкТл.

Задача 1-4. Электрон, имющий скорость $\upsilon = 2\cdot10^6$ м/с, влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 30$ мТл под углом $\alpha = 30°$ к направлению линий индукции магнитного поля. Определить радиус R и шаг h винтовой линии, по которой будет двигаться электрон (рис. 1.5).

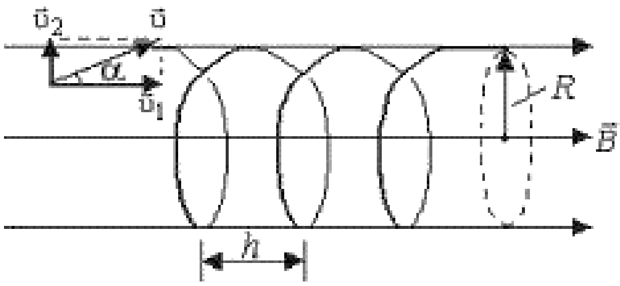

Рис. 1.5. К задаче 1-4

Решение. На электрон, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца

$$\vec{F}_{\text{Л}} = q\left[\vec{\upsilon}\cdot\vec{B}\right],$$

перпендикулярная векторам магнитной индукции $\vec{B}$ и скорости $\vec{\upsilon}$ электрона.

Для описания траектории электрона удобно представить вектор скорости $\vec{\upsilon}$ как сумму двух составляющих, одна из которых $\vec{\upsilon}_1$ направлена по линиям индукции, вторая, $\vec{\upsilon}_2$ – перпендикулярно им. Тогда выражение для силы Лоренца может быть упрощено

$$\vec{F}_Л = e\left[(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2)\vec{B}\right] = e\left[\vec{\upsilon}_2\vec{B}\right],$$

поскольку первое слагаемое векторного произведения $[\vec{\upsilon}_1\vec{B}] = 0$ за счет того, что векторы $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{B}$ сонаправлены. Во время движения составляющая скорости $\vec{\upsilon}_1$ не изменяется ни по модулю, ни по направлению. Наоборот, составляющая скорости $\vec{\upsilon}_2$ под действием силы Лоренца непрерывно изменяет свое направление, так как сила $\vec{F}_Л$, расположенная в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, сообщает электрону нормальное ускорение. Таким образом, электрон участвует в двух движениях: равномерном и прямолинейном со скоростью υ_1 параллельно линиям индукции и криволинейном с постоянной по модулю скоростью υ_2 в плоскости, перпендикулярной линиям индукции. В результате одновременного участия в движениях по прямой и по окружности электрон будет двигаться по винтовой линии.

Составляющие скорости υ, как видно из рис. 1.5, находятся, как:

$$\upsilon_1 = \upsilon \cdot \cos\alpha, \quad \upsilon_2 = \upsilon \cdot \sin\alpha.$$

Учитывая, что вектор скорости $\vec{\upsilon}_2$ перпендикулярен вектору магнитной индукции $\vec{B}$ и $\upsilon_2 = \upsilon \cdot \sin\alpha$, нормальное ускорение, сообщенное электрону силой Лоренца, рассчитывается по формуле

$$a_n = \upsilon_2^2 / R = \upsilon^2 \sin^2\alpha / R,$$

где R – радиус кривизны траектории.

С учетом этих выражений, второй закон Ньютона для электрона $m_e a_n = F_{\text{Л}}$ примет вид

$$m_e \upsilon^2 \cdot \sin^2\alpha / R = e\upsilon B \sin\alpha,$$

откуда может быть найден радиус винтовой линии, по которой движется электрон

$$R = m_e \upsilon \cdot \sin\alpha / (eB).$$

Шаг винтовой линии определяется как смещение по горизонтали (происходящее со скоростью υ_1) за время T одного оборота

$$h = \upsilon_1 T = \upsilon \cos\alpha \cdot T.$$

За время одного оборота электрон проходит один полный круг (со скоростью υ_2), а поскольку длина окружности равна $2\pi R$, время одного оборота определится, как

$$T = 2\pi R / \upsilon_2 = 2\pi R / (\upsilon \sin\alpha) = 2\pi m_e / (eB).$$

Соответственно, шаг винтовой линии рассчитывается по формуле

$$h = \upsilon \cdot \cos\alpha \cdot 2\pi m_e / (eB).$$

Выполнив вычисления, для искомых величин получим

$$R = 1{,}9 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0{,}19 \text{ мм}; \qquad h = 20{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 2{,}06 \text{ мм}.$$

Задача 1-5. Кольцо радиусом R=10 см находится в однородном магнитном поле напряженностью H=1000 А/м. Плоскость кольца составляет угол α = 45° с линиями напряженности. Вычислить величину магнитного потока, пронизывающего кольцо.

Решение: Магнитный поток, пронизывающий рассматриваемый круговой контур, определяется соотношением:

$$\Phi=B\,S\cos\alpha.$$

Здесь S – площадь кольца, которая может быть найдена по формуле

$$S=\pi R^2,$$

B –индукция магнитного поля в месте его расположения. В вакууме индукция магнитного поля связана с его напряженностью соотношением

$$B=\mu_0 H,$$

где $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная вакуума.

Соответственно, формула для нахождения магнитного потока, пронизывающего рассматриваемый круговой контур, может быть записана в виде

$$\Phi=\mu_0 H\cdot\pi R^2\cdot\cos\alpha.$$

Численное значение магнитного потока равно Φ= $2{,}29\cdot 10^{-5}$ Вб.

Задача 1-6. Рамка с диаметром d = 6 см содержит N = 1000 витков. Плоскость витков совпадает с направлением однородного магнитного поля, напряженность которого равна H = 1500 А/м. Какой вращающий момент действует на рамку при токе в ней I = 10 А?

Решение. На контур с током, находящийся в магнитном поле B, действуют силы, создающие вращающий момент:

$$M=pB\sin\alpha,$$

где p – магнитный момент контура с током, α - угол между направлением поля и нормалью к плоскости контура, в данной задаче равный $\pi/2$. Магнитный момент контура с током определяется произведением тока, текущего по контуру, на площадь контура и зависит от числа витков в контуре

$$p=NIS = N\cdot I\cdot\pi R^2,$$

поэтому окончательное выражение для нахождения искомого вращающего момента примет вид

$$M=I\pi\mu_0 H\,N\cdot R^2\sin\alpha = 0{,}053 \text{ Н·м}.$$

Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения

1.1. Что является источником магнитного поля?

1.2. Какая физическая величина является основной характеристикой магнитного поля? Как вводятся магнитные силовые линии?

1.3. Сформулируйте правило буравчика. Для чего оно применяется?

1.4. Как магнитное поле действует на проводник с электрическим током?

1.5. Как определить направление силы Ампера?

1.6. Как записывается закон Био-Савара-Лапласа?

1.7. Что такое напряженность магнитного поля? Как она связана с индукцией магнитного поля?

1.8. Как рассчитать магнитное поле, создаваемое проводником с током, с помощью закона полного тока?

1.9. Что такое магнитный поток?

1.10. Действует ли магнитное поле на неподвижный электрический заряд?

1.11. Почему с помощью магнитного поля не может быть изменена энергия заряженной частицы?

1.12. В чем заключается эффект Холла? Какие величины могут быть найдены с его помощью?

1.13. В чем состоит явление электромагнитной индукции? Как объяснить знак минус в записи закона электромагнитной индукции?

1.14. Что такое самоиндукция? Как индуктивность характеризует проводник?

1.15. Как определяется объемная плотность энергии магнитного поля?

1.16. Ток силой I = 50А течет по проводнику, изогнутому под прямым углом. Найти напряженность и индукцию магнитного поля в точках, лежащих на биссектрисе этого угла и отстоящих от вершины угла на расстояние a = 20 см.

1.17. По бесконечно длинному прямому проводу, согнутому под углом $\alpha = 120^\circ$, течет ток I = 50 А. Определить напряженность и индукцию магнитного поля в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от вершины угла на расстояние a = 6 см.

1.18. По длинному прямому проводу течет ток I = 60 А. Определить напряженность и индукцию магнитного поля в точке, удаленной от проводника на a =5 см. На сколько изменятся эти величины, если провод согнуть под прямым углом, оставив рассматриваемую точку на внутренней биссектрисе угла на расстоянии a = 5 см от вершины угла.

1.19. По длинному прямому проводу течет ток I = 60 А. Определить напряженность и индукцию магнитного поля в точке, удаленной от проводника на a = 5 см. На сколько изменятся эти величины, если провод согнуть под прямым углом, оставив рассматриваемую точку на внешней биссектрисе угла на расстоянии a = 5 см от вершины угла.

1.20. По кольцу из тонкого провода течет ток I = 0,6 А. Кольцо имеет радиус R = 10 см и содержит N = 80 витков. Определить напряженность и индукцию магнитного поля в центре кольца и в точке, расположенной на перпендикуляре, восстановленном из его центра на расстоянии a = 10 см от плоскости кольца.

1.21. По проводнику, изогнутому в виде окружности, течет ток. Напряженность магнитного поля в центре окружности равна I = 20 А/м. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Определить индукцию и напряженность магнитного поля в точке пересечения диагоналей этого квадрата.

1.22. По проводнику, изогнутому в виде окружности, течет ток. Напряженность магнитного поля в центре окружности равна H = 20 А/м. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму равностороннего треугольника. Определить индукцию и напряженность магнитного поля в центре треугольника.

1.23. По проводнику, изогнутому в виде равностороннего треугольника, течет ток. Напряженность магнитного поля в центре окружности равна H =10 А/м. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму шестиугольника. Определить индукцию и напряженность магнитного поля в центре шестиугольника.

1.24. По проводнику, согнутому в виде прямоугольника со сторонами a = 6 см и b = 10 см, течет ток силой I = 2 А. Определить напряженность и индукцию магнитного поля в точке, лежащей на перпендикуляре, восстановленном из центра прямоугольника и удаленном от его плоскости на расстояние l = 1 м.

1.25. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи силой $I_1 = I_2$ = 20 А в одинаковых направлениях. Расстояние между проводами d = 10 см. Определить напряженность H и магнитную индукцию B в точке, удаленной на $r_1 = r_2$ = 10 см от обоих проводов.

1.26. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи силой $I_1 = I_2$ = 20 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами $d = 10$ см. Определить напряженность H и магнитную индукцию B в точке, удаленной на $r_1 = r_2 = 10$ см от обоих проводов.

1.27. По двум бесконечно длинным параллельным проводам текут токи силой $I_1 = 20$ А и $I_2 = 30$ А в одном направлении. Расстояние между проводами $d = 10$ см. Вычислить напряженность H и магнитную индукцию B в точке, удаленной на $r_1 = 6$ см от первого и на $r_2 = 8$ см от второго провода

1.28. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи силой $I_1 = 20$ А и $I_2 = 50$ А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами $d = 10$ см. Определить напряженность H и магнитную индукцию B в точке, удаленной на $r_1 = 6$ см от первого и на $r_2 = 8$ см от второго провода.

1.29. По двум одинаковым круговым виткам радиусом $R = 6$ см, плоскости которых взаимно перпендикулярны, а центры совпадают, текут одинаковые токи силой $I = 3$ А. Найти напряженность и индукцию магнитного поля в центре витков. .

1.30. По двум одинаковым круговым виткам радиусом $R = 8$ см, плоскости которых расположены под углом $\alpha = 60^\circ$, а центры совпадают, текут одинаковые токи силой $I = 5$ А. Найти напряженность и индукцию магнитного поля в центре витков.

1.31. Прямолинейный проводник расположен перпендикулярно плоскости кругового проводника радиусом $R = 20$ см и проходит на расстоянии половины радиуса от его центра. Прямолинейный ток имеет силу $I_1 = 10$ А, а круговой $I_2 = 2$ А. Определить напряженность и индукцию магнитного поля, создаваемого токами в центре круга.

1.32. Прямолинейный проводник расположен перпендикулярно плоскости кругового проводника радиусом $R = 20$ см и проходит на расстоянии двух радиусов от его центра. Прямолинейный ток имеет силу $I_1 = 10$ А, а круговой $I_2 = 2$ А. Определить напряженность и индукцию магнитного поля, создаваемого токами в центре круга.

1.33. Два бесконечно длинных прямых провода скрещены под прямым углом. Кратчайшее расстояние между ними равно $d = 10$ см. По проводам текут токи силой $I_1 = 80$ А и $I_2 = 60$ А. Определить напряженность H и магнитную индукцию B в точке A, находящейся на середине кратчайшего расстояния между ними.

1.34. Два бесконечно длинных прямых провода скрещены под прямым углом. Кратчайшее расстояние между ними равно $d = 10$ см. По проводам текут токи силой $I_1 = I_2 = 60$ А. Определить напряженность H и магнитную индукцию B в точке A, находящейся на середине кратчайшего расстояния между ними. Как изменятся эти значения, если один из токов поменяет свое направление?

1.35. Длинный прямой соленоид из проволоки диаметром d = 0,25 мм намотан так, что витки плотно прилегают друг к другу. Какова индукция и напряженность магнитного поля внутри соленоида при силе тока I = 5 А?

1.36. В однородное магнитное поле напряженностью H = 1000 А/м помещен прямой проводник длиной l = 20 см (подводящие провода находятся вне поля). Определить силу, действующую на проводник, если по нему течет ток I = 50 А, а угол между направлением тока и вектором напряженности $\alpha = 30^\circ$.

1.37. Прямой провод длиной l = 10 см, по которому течет ток силой I = 20 А, находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл. Найти угол α между направлениями вектора магнитной индукции и тока, если на провод действует сила F = 10 мН.

1.38. Квадратная проволочная рамка со сторонами a = 6 см расположена в однородном магнитном поле с индукцией , силовые линии которого расположены под углом $\alpha = 60^\circ$к плоскости рамки. По рамке течет ток силой I =10 А. Определить силу, действующую на каждую из сторон рамки.

1.39. Квадратная проволочная рамка со стороной a = 5 см расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи силой I = 100 А. Определить силу, действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии, равном ее длине.

1.40. Протон влетел в магнитное поле перпендикулярно линиям напряженности и описал дугу радиусом R = 10 см. Определить скорость протона, если напряженность магнитного поля I = 10 А/м.

1.41. Определить частоту обращения электрона по круговой орбите в магнитном поле напряженностью I =10 А/м.

1.42. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл перпендикулярно линиям индукции. Определить силу F, действующую на электрон со стороны поля, если радиус кривизны траектории равен R = 0,5 см.

1.43. Заряженная частица движется в магнитном поле по окружности радиусом R = 3 см со скоростью υ = 10 м/с. Индукция магнитного поля B = 0,3 Тл. Найти заряд частицы, если известно, что ее энергия равна T = 12 кэВ.

1.44. Электрон движется в магнитном поле с индукцией B = 0,02 Тл по окружности радиусом R = 1 см. Определить кинетическую энергию T электрона (в джоулях и электрон-вольтах).

1.45. Протон и электрон, двигаясь с одинаковой скоростью, влетают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона больше радиуса кривизны траектории электрона ?

1.46. Заряженная частица с кинетической энергией $T = 1$ кэВ движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом $R = 1$ мм. Найти силу F, действующую на частицу со стороны поля.

1.47. Кинетическая энергия α-частицы равна $T = 500$ МэВ. Частица движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом $R = 80$ см. Определить магнитную индукцию B поля.

1.48. Электрон с энергией $E = 300$ эВ движется перпендикулярно линиям индукции магнитного поля напряженностью $H = 465$ А/м. Определить силу Лоренца, скорость и радиус траектории электрона.

1.49. Заряженная частица, обладающая скоростью $\upsilon = 2 \cdot 10^6$ м/с, влетела в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}52$ Тл. Найти отношение q/m заряда частицы к ее массе, если частица в поле описала дугу окружности радиусом $R = 4$ см. По этому отношению определить, какая это частица.

1.50. Протон с кинетической энергией $T = 1$ МэВ влетел в однородное магнитное поле $B = 1$ Тл перпендикулярно линиям индукции. Какова должна быть минимальная протяженность l поля в направлении, по которому летел протон, когда он находился вне поля, чтобы оно изменило направление движения протона на противоположное?

1.51. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $\Delta U = 1$ кВ, влетает в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению его движения. Индукция магнитного поля $B = 1{,}19$ мТл. Найти радиус окружности, по которой движется электрон, период обращения и момент импульса электрона.

1.52. Электрон движется в однородном магнитном поле по круговой орбите радиусом $R = 6\ 10^{-4}$ м. Значение импульса электрона $p = 4{,}8\ 10^{-24}$ кг$\cdot$ м/с. Чему равна индукция B магнитного поля?

1.53. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $\Delta U = 300$ В, движется параллельно прямолинейному длинному проводу на расстоянии $a = 4$ мм от него. Какая сила действует на электрон, если по проводнику пустить ток $I = 5$ А?

1.54. Поток альфа-частиц (ядер атома гелия), ускоренный разностью потенциалов $\Delta U = 1$ МВ, влетает в однородное магнитное поле напряженностью $E = 1200$ А/м. Скорость каждой частицы направлена перпендикулярно к направлению магнитного поля. Найти силу, действующую на каждую частицу.

1.55. Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона больше радиуса кривизны траектории электрона?

1.56. Протон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 600$ В, влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}3$ Тл и начал двигаться по окружности. Вычислить ее радиус R.

1.57. Заряженная частица, прошедшая ускоряющую разность потенциалов $U = 2$ кВ, движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 15{,}1$ мТл по окружности радиусом $R = 1$ см. Определить отношение $|e|/m$ заряда частицы к ее массе и скорость υ частицы.

1.58. Два иона, имеющие одинаковый заряд, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле. Первый ион начал двигаться по окружности радиусом $R_1 = 5$ см, второй ион – по окружности радиусом $R_2 = 2{,}5$ см. Найти отношение m_1/m_2 масс ионов, если они прошли одинаковую разность потенциалов.

1.59. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 100$ мкТл движется электрон по винтовой линии. Определить скорость электрона, если шаг винтовой линии равен $h = 20$ см, а радиус $R = 5$ см.

1.60. Электрон в однородном магнитном поле движется по винтовой линии радиусом $R = 5$ см и шагом $h =20$ см. Определить скорость электрона, если индукция магнитного поля 10 Тл.

1.61. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл движется протон. Траектория его движения представляет собой винтовую линию с радиусом $R = 10$ см и шагом $h = 60$ см. Определить кинетическую энергию T протона.

1.62. Вычислить скорость υ и кинетическую энергию T α-частиц, выходящих из циклотрона, если, подходя к выходному окну, ионы движутся по окружности радиусом $R = 50$ см. Индукция B магнитного поля циклотрона равна 1,7 Тл.

1.63. Перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B = 0{,}1$ Тл включено электрическое поле напряженностью $E = 100$ кВ/м. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость υ частицы.

1.64. Перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B = 0{,}08$ Тл включено электрическое поле напряженностью $E = 50$ кВ/м. Не отклоняясь от прямолинейной траектории перпендикулярно обоим полям движется протон. Вычислить кинетическую энергию протона и его импульс.

1.65. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов $U = 104$ В и влетела в расположенные под прямым углом электрическое, $E = 10$ кВ/м, и магнитное, $B = 0{,}1$ Тл, поля. Найти отношение q/m заряда частицы к ее массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не отклоняется от прямолинейной траектории.

1.66. Рамка с током I = 5 А содержит N = 20 витков тонкого провода. Определить магнитный момент рамки с током, если ее площадь S = 10 см^2.

1.67. По витку радиусом R = 10 см течет ток I = 50 А. Виток помещен в однородное магнитное поле напряженностью H = 100 А/м. Определить вращающий (механический) момент, действующий на виток, если плоскость витка составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с линиями напряженности.

1.68. Кольцо радиусом R = 10 см находится в однородном магнитном поле напряженностью H = 1000 А/м. Плоскость кольца составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с линиями напряженности. Вычислить величину магнитного потока, пронизывающего кольцо.

1.69. В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток силой I = 50 А, расположена прямоугольная рамка так, что две большие стороны ее длиной a = 65 см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно ее ширине. Определить магнитный поток, пронизывающий рамку.

1.70. Короткая катушка площадью поперечного сечения S =150 см^2, содержащая N = 200 витков провода, по которому течет ток силой I = 4 А, помещена в однородное магнитное поле напряженностью H = 8000 А/м. Определить магнитный момент катушки, а также вращающий момент, действующий на нее со стороны поля, если ось катушки составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с линиями поля.

1.71. Виток диаметром d = 20 см, может вращаться около вертикальной оси, совпадающей с одним из диаметров витка. Виток установили в плоскости магнитного меридиана и пустили по нему ток силой I =10 А. Какой вращающий момент нужно приложить к витку, чтобы удержать его в начальном положении?

1.72. Рамка диаметром d = 6 см содержит N = 100 витков. Плоскость витков совпадает с направлением напряженности однородного магнитного поля, равной H = 15 А/м. Какой вращающий момент действует на рамку при токе в ней I = 10 А?

1.73. Нормаль к плоскости рамки составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с направлением однородного магнитного поля. Под каким углом установилась рамка по отношению к полю, если вращающий момент, действующий на рамку, уменьшился в 10 раз? Решение пояснить рисунком.

1.74. По плоской круглой рамке, имеющей $N = 20$ витков радиусом R =2 см, течет ток $I = 1$ А. Нормаль к плоскости рамки составляет угол $\alpha = 90°$ с направлением магнитного поля напряженностью $H = 30$ А/м. Найти изменение вращающего момента, действующего на рамку, если из $N = 20$ витков рамки сделать один круглый виток.

1.75. Плоская круговая рамка диаметром $d = 10$ см находится в однородном магнитном поле. По рамке протекает ток силой $I = 15$ А. На сколько изменится вращающий момент, действующий на рамку, при повороте плоскости рамки на угол $\alpha = 60°$? (До поворота плоскость рамки совпадала с направлением поля). Напряженность поля $H = 20$ А/м, среда - воздух.

1.76. Виток радиусом $R = 10$ см, по которому течет ток силой $I = 20$ А, свободно установился в однородном магнитном поле напряженностью $H = 1000$ А/м. Виток повернули относительно диаметра на угол $\alpha = 60°$. Определить величину совершенной работы.

1.77. Плоский контур, площадь которого $S = 300$ см^2, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл. Плоскость контура перпендикулярна линиям индукции. В контуре поддерживается неизменный ток силой $I = 10$ А. Определить работу A внешних сил по перемещению контура с током в область пространства, магнитное поле в которой отсутствует.

1.78. Виток, по которому течет ток силой $I = 20$ А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}016$ Тл. Диаметр витка $d = 10$ см. Определить работу A, которую нужно совершить, чтобы повернуть виток на угол $\alpha = \pi/2$ относительно оси, совпадающей с диаметром.

1.79. Виток, по которому течет ток силой $I = 20$ А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}016$ Тл. Диаметр витка $d = 10$ см. Определить работу A, которую нужно совершить, чтобы повернуть виток на угол $\alpha = 2\pi$ относительно оси, совпадающей с диаметром.

1.80. Рамка площадью $S = 100$ см содержит $N = 1000$ витков провода сопротивлением $R = 12$ Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление $U = 20$ Ом. Определить максимальную мощность, необходимую для того, чтобы равномерно с частотой $\nu = 8$ с$^{-1}$ вращать рамку в магнитном поле, индукция которого равна $B = 0{,}1$ Тл.

2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

Связь орбитального магнитного $\overline{p}_m$ и орбитального механического $\overline{L}_i$ моментов электрона

$$\overline{p}_m = -\gamma \overline{L}_i = -\frac{e}{2m}\overline{L}_i,$$

здесь $\gamma = e/2m$ – гиромагнитное отношение орбитальных моментов.

Намагниченность

$$\overline{J} = \overline{P}_m / V = \sum \overline{p}_m / V,$$

где $\overline{P}_m = \sum \overline{p}_m$ – магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул.

Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля

$$\overline{J} = \chi \overline{H},$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества.

Связь между векторами B, H, J

$$\overline{B} = \mu_0(\overline{H} + \overline{J}), \qquad \overline{B} = \mu\mu_0 \overline{H},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, а $\mu = 1 + \chi$ – магнитная проницаемость вещества.

Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля

$$\oint_L \overline{H} d\overline{l} = I.$$

Для расчета магнитной индукции в ферромагнетике можно пользоваться соотношением

$$B = \mu\mu_0 H,$$

однако следует помнить, что магнитная проницаемость вещества μ у ферромагнетиков не является константой, а зависит от величины напряженности поля. Поэтому для определения B надо знать либо график зависимости $\mu(H)$, либо график зависимости $B(H)$ для данного сорта ферромагнитного материала (возможная зависимость приведена в Приложении 2). В остальном ход решения задач такой же, как для диа- и парамагнетиков.

Знание хода петли гистерезиса и ее характерных точек является важным в технических приложениях ферромагнетизма. Особое внимание следует уделить доменной структуре ферромагнетиков и объяснению петли гистерезиса с точки зрения доменной теории.

Примеры решения задач

Задача 2-1. Обмотка тонкой тороидальной катушки с железным сердечником содержит N = 800 витков. Средний радиус тороида равен R = 15 см. Определить напряженность поля H и магнитную индукцию B внутри сердечника, относительную магнитную проницаемость μ железа и намагниченность J сердечника при двух значениях силы тока в обмотке: 1) $I_1 = 0{,}2$ А; 2) $I_2 = 0{,}6$ А.

Решение. При протекании тока по обмотке соленоида в железном сердечнике тороида возникнет магнитное поле, замкнутые линии индукции и напряженности которого имеют форму окружностей, концентричных самому тору. Магнитная индукция этого поля создается как макротоками, текущими по обмотке, так и микротоками, возникающими в материале сердечника. При нахождении магнитного поля в веществе удобнее сначала искать напряженность магнитного поля, поскольку ее величина не только не зависит от материала сердечника, но и в отсутствие сердечника будет такой же. Для нахождения напряженности магнитного поля внутри тороида можно применить закон полного тока для магнитного поля в веществе:

$$\oint_l \vec{H}d\vec{l} = \sum I$$

где $\sum I = N{\cdot}I$– алгебраическая сумма макротоков, сцепленных с контуром интегрирования L. Контур L выбирается совпадаюшим с одной из линий напряженности, например, со средней линией тороида. Так как тор тонкий, то можно приближенно считать, что в любом его поперечном сечении и во всех точках внутри тора H = const. В этом случае закон полного тока для магнитного поля в веществе можно записать в виде

$$H{\cdot}2\pi{\cdot}R = N{\cdot}I,$$

а значит, для нахождения напряженности магнитного поля внутри тороида можно воспользоваться соотношением

$$\mathrm{H} = N{\cdot}I\ /\ (2\pi{\cdot}R).$$

Численный расчет с использованием данных задачи дает следующие величины:

$$\text{при } I = I_1 = 0{,}2\ \text{А} \qquad H_1 = NI_1\ /\ (2\pi R) = 170\ \text{А/м},$$

при $I = I_2 = 0{,}6$ А $\qquad H_2 = NI_2 / (2\pi R) = 510$ А/м .

Индукция магнитного поля внутри тороида может быть найдена по графику зависимости B от H основной кривой намагничивания железа (см. приложение):

при $H = H_1 \qquad B_1 = 0{,}8$ Тл.

при $H = H_2 \qquad B_2 = 1{,}1$ Тл.

Следует отметить, что для железа и других ферромагнетиков расчетной формулы для определения индукции магнитного поля в сердечнике не существует, поскольку соотношение

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

обычно применяемое для неферромагнитных сред, в данном случае не может быть использовано из-за нелинейной зависимости относительной магнитной проницаемости μ от величины приложенного поля. Тем не менее, из этого соотношения могут быть найдены значения μ, соответствующие указанным рабочим режимам, а именно:

$$\mu_1 = B_1 / (\mu_0 H_1) = 3750, \qquad \mu_2 = B_2 / (\mu_0 H_2) = 1720.$$

Намагниченность сердечника J может быть найдена из соотношения

$$\vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}\,.$$

Численный расчет дает следующие величины намагниченности сердечника:

$$J_1 = B_1 / \mu_0 - H_1 = 0{,}64 \cdot 10^6 \text{ А/м}; \qquad J_2 = B_2 / \mu_0 - H_2 = 0{,}87 \cdot 10^6 \text{ А/м}.$$

Следует отметить, что в отличие от напряженности поля, которая прямо пропорциональна силе тока в обмотке, индукция магнитного поля внутри железного сердечника и его намагниченность току не пропорциональны.

Задача 2-2. В железном сердечнике соленоида, содержащего 10 витков на 1 см длины, индукция магнитного поля равна 1,3 Тл. Железный сердечник заменили стальным. Определить, во сколько раз следует изменить силу тока в обмотке соленоида, чтобы магнитная индукция в сердечнике осталась неизменной.

Решение. Ток I, текущий по обмотке соленоида, создает внутри соленоида магнитное поле, напряженность которого

$$H = I \cdot n$$

не зависит от материала сердечника, а зависит только от величины тока I, протекающего по обмотке и такого параметра обмотки, как число витков n на единицу длины, в нашем случае равного n = 10 см$^{-1}$ = 1000 м$^{-1}$.

С другой стороны, существует еще одна характеристика магнитного поля – индукция магнитного поля. Она связана с напряженностью магнитного поля соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

Однако для ферромагнетиков, к которым относятся и железо, и сталь, это соотношение использовать не очень удобно, поскольку относительная магнитная проницаемость μ зависит от величины напряженности поля. В случае ферромагнетиков для нахождения связи между B и H чаще используют график зависимости B от H основной кривой намагничивания железа, приведенный в приложении. Используя указанный график найдем, что магнитной индукции B = 1,3 Тл в железе соответствует напряженность магнитного поля H = 1000 А/м. Для создания такого поля необходим ток

$$I = H/n = 1 \text{ А/м}.$$

Из этого же графика видно, что для того, чтобы создать такую же индукцию магнитного поля B = 1,3 Тл в стали, необходимо создать магнитное поле с другой напряженностью H_c = 2000 А/м. Это поле должно быть создано другим током, а именно $I_c = H_c / n$ = 2 А/м. Соответственно, для того, чтобы индукция магнитного поля в сердечнике осталась неизменной следует увеличить силу тока в обмотке соленоида в 2 раза, поскольку

$$I_c / I = 2.$$

Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения

2.1. Из чего складывается магнитный момент атома?

2.2. В чем заключаются магнитомеханические явления?

2.3. Как определяется намагниченность вещества?

2.4. Как формулируется закон полного тока для магнитного поля в веществе?

2.5. У каких атомов наблюдается диамагнитный эффект?

2.6. Что происходит с веществом, помещенным в магнитное поле? В чем различие диамагнитного и парамагнитного эффектов?

2.7. Что показывает относительная магнитная проницаемость вещества?

2.8. В чем состоит отличительная особенность ферромагнетиков? Что такое домены?

2.9. Какой вид имеет петля гистерезиса?

2.10. Что такое коэрцитивная сила? Какая температура называется точкой Кюри?

2.11. Что такое антиферромагнетики? Как проявляются их магнитные свойства?

2.12. В чем состоит явление сверхпроводимости?

2.13. Что такое высокотемпературные сверхпроводники?

2.14. Какова особенность магнитных свойств сверхпроводников?

2.15. Где могут быть использованы сверхпроводники?

2.16. В стальном сердечнике соленоида, содержащего n = 10 вит/см, индукция равна B = 1,0 Тл. Стальной сердечник заменили железным. Определить, во сколько раз следует изменить силу тока в обмотке соленоида, чтобы индукция магнитного поля в сердечнике осталась неизменной.

2.17. Диаметр железного кольца по средней линии d = 15 см, его площадь сечения S = 7 см^3. На кольцо навито N = 500 витков провода. Определить силу тока I, при которой магнитный поток в кольце равен Ф = 8,4 · 10^{-4} Вб.

2.18. Железный сердечник находится в однородном магнитном поле напряженностью $H = 1$ кА/м. Определить индукцию B магнитного поля в сердечнике и магнитную проницаемость μ железа.

2.19. На железное кольцо намотано в один слой N = 500 витков провода. Средний диаметр кольца d = 25 см. Определить магнитную индукцию B в железе и магнитную проницаемость μ железа, если сила тока I в обмотке: 1) 0,5 А; 2) 2,5 А.

2.20. Замкнутый соленоид со стальным сердечником имеет n = 10 витков на каждый сантиметр длины. По соленоиду течет ток силой I = 2 А. Вычислить магнитный поток Ф в сердечнике, если его сечение S = 4 см^2.

2.21. Соленоид намотан на чугунное кольцо сечением S = 5 см^2. При силе тока I = 1 А магнитный поток Ф = 250 мкВб. Определить число витков n, приходящихся на единицу длины средней линии кольца.

2.22. В железном сердечнике соленоида индукция B = 1,3 Тл. Железный сердечник заменили стальным. Определить, во сколько раз следует изменить силу тока в обмотке соленоида, чтобы индукция в сердечнике осталась неизменной.

2.23. В соленоид длиной l = 0,2 м, имеющий N = 300 витков, введен железный сердечник. По соленоиду течет ток $I = 1$ А. Найти индукцию магнитного поля H и намагниченность J железа внутри соленоида.

2.24. Железный сердечник длиной l = 20 см ($d \ll l$) содержит N = 200 витков. Определить магнитную проницаемость μ железа при силе тока I = 0,4 А.

2.25. На железное кольцо намотаны в один слой N = 200 витков. Определить энергию индукцию магнитного поля внутри сердечника, если при токе силой I = 2,5 А магнитный поток Φ в железе равен 0,5 мВ.

2.26. На железное кольцо намотано в один слой N = 400 витков провода. Средний диаметр кольца d = 20 см. Определить намагниченность J железа и его магнитную проницаемость μ, если сила тока I в обмотке I = 2,2 А.

2.27. На стальное кольцо намотано в один слой N = 500 витков провода. Средний диаметр кольца d = 25 см. Определить намагниченность J железа и его магнитную проницаемость μ, если сила тока I в обмотке I = 2,5 А

2.28. Обмотка соленоида с железным сердечником содержит N = 600 витков. Длина соленоида l = 15 см. Определить напряженность поля Н и магнитную индукцию B внутри сердечника, относительную магнитную проницаемость μ железа и намагниченность J сердечника при силе тока в обмотке I = 1,2 А.

2.29. Обмотка соленоида со стальным сердечником содержит N = 600 витков. Длина соленоида l = 15 см. Определить напряженность поля H и магнитную индукцию B внутри сердечника, относительную магнитную проницаемость μ железа и намагниченность J сердечника при силе тока в обмотке I = 1,2 А.

2.30. Обмотка соленоида с чугунным сердечником содержит N = 600 витков. Длина соленоида l = 15 см. Определить напряженность поля H и магнитную индукцию B внутри сердечника, относительную магнитную проницаемость μ железа и намагниченность J сердечника при силе тока в обмотке I = 1,2 А.

3. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Закон Фарадея, позволяющий найти ЭДС индукции е,-

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

при этом направление индукционного тока находится по правилу Ленца.

Магнитный поток, создаваемый током I в контуре с индуктивностью L

$$\Phi = LI$$

и поэтому возникающая в контуре ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}.$$

Индуктивность соленоида (тороида)

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l},$$

где N – число витков соленоида, l – его длина.

Энергия магнитного поля, создаваемого током в замкнутом контуре индуктивностью L, по которому течет ток I

$$W = LI^2 / 2.$$

Объемная плотность энергии однородного магнитного поля

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}.$$

Примеры решения задач

Задача 3-1. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}12$ Тл вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 25$ с$^{-1}$ квадратная рамка со стороной $l = 10$ см, содержащая $N = 100$ витков. Ось вращения перпендикулярна линиям индукции и совпадает с одной из сторон рамки. Определить максимальные значения магнитного потока, пронизывающего рамку, и ЭДС индукции, возникающей в ней.

Решение. При вращении рамки в однородном магнитном поле непрерывно изменяется угол между вектором индукции $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к плоскости рамки, следовательно, изменяется и магнитный поток, пронизывающий рамку. Это значит, что в рамке возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt},$$

где N – число витков, пронизываемых магнитным потоком Ф, а $\Psi = N\Phi$ – полный магнитный поток или потокосцепление.

Угловая скорость вращения рамки постоянна, следовательно, угол α между индукцией магнитного поля и нормалью к рамке изменяется со временем по линейному закону. Если принять, что в начальный момент плоскость рамки нормальна к линиям индукции, и положительное направление нормали $\vec{n}$ совпадает с вектором $\vec{B}$, то в любой момент времени t величина этого угла изменяется по закону $\alpha = \omega t$. Так как магнитное поле однородно, то магнитный поток, пронизывающий рамку, содержащую N витков, находится как

$$\Psi = N\Phi = NBS\cos\alpha,$$

Учитывая, что площадь рамки равна $S = l^2$, а угол α зависит от времени по указанному закону, имеем

$$\Psi = NBl^2\cos\omega t.$$

Из уравнения видно, что магнитный поток изменяется со временем по косинусоидальному закону. Поскольку максимальное значение косинуса любого угла равно ±1, максимальное значение магнитного потока определяется соотношением

$$\Psi = \pm NBl^2.$$

Подставив числовые значения, заданные условиями задачи, получим

$$\Psi = \pm\ 0{,}12\ \text{Вб}$$

ЭДС индукции может быть найдена по закону электромагнитной индукции Фарадея

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt},$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}(NBl^2\cos\omega t) = NBl^2\omega\sin\omega t.$$

Из последнего соотношения видно, что ЭДС индукции также изменяется по периодическому (синусоидальному) закону. Однако в те моменты времени, когда $\alpha = \omega t = m\pi\ (m = 0, 1, 2, ...)$ и магнитный поток, пронизывающий рамку, имеет максимальное значение, ЭДС индукции обращается в нуль. Более того, при прохождении рамкой этого положения ЭДС индукции изменяет свой знак.

Наоборот, в те моменты времени, когда $\alpha = \omega t = (2m+1)\frac{\pi}{2}$, ЭДС индукции имеет экстремальное значение, равное

$$\mathcal{E}_i = \pm NBl^2\omega,$$

а магнитный поток обращается в нуль, а при прохождении рамкой этого положения изменяет знак.

Подставив численные значения заданных по условию задачи величин и выполнив вычисления, для максимального значения ЭДС индукции получим $\mathcal{E}_i = \pm 3$ В.

Задача 3-2. Кольцо из проволоки сопротивлением R = 0,002 Ом находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,8 Тл. Плоскость кольца составляет угол $\alpha = 90°$ с линиями индукции. Определить количество электричества, которое протечет по кольцу, если его развернуть на угол β = 180°. Площадь кольца S = 15 см^2.

Решение. При повороте кольца из проволоки меняется пронизывающий его магнитный поток. Более того, разворот на угол β = 180° соответствует изменению магнитного потока на величину,

$$\Delta\Phi = \Phi - (-\Phi) = 2\Phi = 2BS,$$

равную удвоенной величине первоначального потока, пронизывающего рамку. Здесь учтено, что однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости кольца, создает магнитный поток

$$\Phi = BS.$$

Изменение магнитного потока сквозь любой проводящий контур возбуждает ЭДС индукции, в нашем случае равную

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{2\Phi}{\Delta t},$$

и приводит к появлению индукционного тока

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R}.$$

С другой стороны, ток – это заряд Δq (количество электричества), протекающий через поперечное сечение проводника за время Δt, т.е.

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Сопоставляя приведенные соотношения, получим выражение

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = -\frac{2\Phi}{R\,\Delta t} = -\frac{2\,BS}{R\,\Delta t},$$

из которого может быть найдена искомая величина:

$$\Delta q = 2\ BS/R = 1{,}2\ \text{Кл}.$$

Задача 3-3. Найти ЭДС индукции в соленоиде с железным сердечником, содержащем N = 500 витков, и имеющем поперечное сечение S = 0,002 м2, если известно, что за время Δt = 0,025 с напряженность магнитного поля равномерно убывает от H_1 = 1000 А/м до H_2 = 500 А/м.

Решение. ЭДС индукции может быть найдена по закону электромагнитной индукции Фарадея

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt}.$$

Однако, в данном случае мы не можем произвести дифференцирование, поскольку неизвестен закон изменения как магнитного потока Ф, так и индукции магнитного поля B со временем. Поэтому воспользуемся приближенным соотношением

$$\mathcal{E}_i = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Учитывая, что в соленоиде магнитное поле расположено перпендикулярно плоскости витков, магнитный поток может быть найден, как $\Phi = B\,S$, и поэтому

$$\mathcal{E}_i = -N{\cdot}S\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Поскольку соленоид имеет ферромагнитный сердечник, для нахождения изменения индукции магнитного поля $\Delta B = B_2 - B_1$ необходимо воспользоваться графиком зависимости $B(H)$, приведенным в приложении. Из графика видно, что при H_1 = 1000 А/м, магнитная индукция равна B_1 = 1,3 Тл, а при H_2 = 500 А/м, магнитная индукция равна B_2 = 1,1 Тл. Учитывая, что ΔB = – 0,2 Тл, для ЭДС индукции в соленоиде с железным сердечником имеем

$$\mathcal{E}_i = 20\ \text{В}.$$

Задача 3-4. Имеется катушка длиной l = 20 см и диаметром d = 2 см. Обмотка катушки состоит из N = 200 витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой $S = 1$ мм^2. Катушка включена в цепь с некоторой ЭДС. При помощи переключателя ЭДС выключается, и катушка замыкается накоротко. Во сколько раз уменьшится ток в катушке через Δt = 0,0012 с.

Решение. Известно, что в результате отключения источника тока, т.е. ЭДС, сила тока I убывает от начального значения I_0 по экспоненциальному закону

$$I = I_0 \exp(-t/\tau).$$

В этой формуле τ - время релаксации, т.е. время за которое сила тока уменьшается в e раз. Время релаксации, равное $\tau = L/R$, зависит от индуктивности цепи L и ее сопротивления R. Чем больше индуктивность L цепи и меньше ее сопротивление R, тем больше время релаксации, и, следовательно, тем медленнее уменьшается ток в цепи при ее размыкании.

Для нахождения времени релаксации τ необходимо определить индуктивность цепи

$$L = \mu_0 \mu n^2 V,$$

и ее сопротивление $R = \rho L/S$. В этих формулах $n = N/l = 1000$ м$^{-1}$ – это число витков соленоида (катушки) на единицу ее длины, $V = \pi d^2 l$ – объем катушки, а для нахождения сопротивления R необходимо найти длину провода L, из которого изготовлена катушка. Поскольку длина каждого витка равна πd, общая длина провода может быть найдена, как $L = \pi d \cdot N$. Удельное сопротивление меди возьмем из табличных данных, имеющихся в приложении ($1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м). Учитывая все приведенные соотношения, найдем формулу для определения времени релаксации и ее численное значение

$$\tau = \frac{\mu_0 \mu n^2 \pi d^2 l S}{\rho \pi d N} = \frac{\mu_0 \mu n d l S}{\rho} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

Зная время релаксации, можно определить искомую величину:

$$\frac{I_0}{I} = \exp(t/\tau) = \exp(4) = 55.$$

Итак, через время $\Delta t = 0{,}0012$ с после выключения ЭДС ток в катушке уменьшится в 55 раз.

Задача 3-5. По обмотке тороида течет ток силой $I = 5$ А. Витки провода диаметром $d = 0{,}4$ мм плотно прилегают друг к другу. Определить величину энергии магнитного поля и плотности энергии магнитного поля в стальном сердечнике тороида, если площадь сечения его $S = 4$ см^2, а диаметр средней линии $D = 20$ см.

Решение. В отсутствие ферромагнетика или при известной величине относительной магнитной проницаемости μ для решения задачи можно было бы сначала найти индуктивность тороида (соленоида) по формуле

$$L = \mu_0 \mu n^2 V,$$

а затем рассчитать заключенную в нем энергию магнитного поля $W = L \cdot I^2/2$, и плотность энергии магнитного поля $w = W/V$.

В нашем случае при наличии стального ферромагнитного сердечника относительная магнитная проницаемость μ неизвестна. Поэтому удобнее выбрать другой ход решения. Сначала необходимо рассчитать напряженность H магнитного поля внутри тороида. Для этого можно воспользоваться соотношением

$$H = I \cdot n = I / d,$$

где учтено, что витки плотно прилегают друг к другу и поэтому их число на единицу длины n может быть найдено, как $n = 1/d = 250$ вит/м. Следовательно, согласно условиям нашей задачи, $H = 1000$ А/м.

Далее по графику зависимости $B(H)$, приведенному в приложении, ищется величина индукции магнитного поля. В стальном сердечнике при H = 1000 А/м магнитная индукция равна B = 1,17 Тл. Следовательно, плотность энергии магнитного поля, которая может быть рассчитана по формуле

$$w = \frac{\mu_0 \mu \vec{H}^2}{2} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\vec{H}\vec{B}}{2}$$

равна $w = 585$ Дж/м^3. Энергия магнитного поля, заключенного в объеме тороида, может быть найдена, как $W = w \cdot V = w \cdot S \cdot \pi \cdot D = 0{,}15$ Дж.

Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения

3.1. В чем заключается явление электромагнитной индукции?

3.2. Как записывается закон электромагнитной индукции Фарадея?

3.3. Какое правило позволяет определить направление индукционного тока?

3.4. Что такое потокосцепление?

3.5. В чем заключается принцип действия генератора переменного тока?

3.6. К каким эффектам приводит возникновение вихревых токов?

3.7. Что такое явление самоиндукции и каким законом оно описывается?

3.8. Как определяется индуктивность соленоида?

3.9. Как меняются токи при размыкании и замыкании цепи?

3.10. Что такое взаимная индукция?

3.11. Как устроен трансформатор?

3.12. Как находится энергия катушки индуктивности?

3.13. Что такое объемная плотность энергии магнитного поля и как она находится?

3.14. Как записываются уравнения Максвелла для электромагнитного поля? Следствием каких законов они являются?

3.15. Как происходит распространение электромагнитного поля?

3.16. Рамка площадью S = 50 см, содержащая N = 100 витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,04 Тл.

Определить максимальную ЭДС индукции, если ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции, а рамка делает ν = 960 об/мин.

3.17. Квадратная рамка со стороной a = 0,2 м помещена в однородное магнитное поле. Нормаль к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол α = 30º. Определить индукцию магнитного поля, если среднее значение ЭДС индукции, возникающей в рамке при выключении поля в течение времени Δt = 0,01 с, равно $\mathcal{E}$ = 0,08 В.

3.18. Прямой проводник длиной l = 20 см находится в однородном магнитном поле, индукция которого B = 1 Тл. Концы проводника замкнуты проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи R = 0,1 Ом. Определить силу, которую нужно приложить к проводнику, чтобы перемещать его перпендикулярно линиям индукции со скоростью υ = 2,5 м/сек.

3.19. На соленоид длиной l = 20 см и площадью поперечного сечения S = 30 см^2 надет проволочный виток. Обмотка соленоида имеет N = 320 витков, и по нему идет ток I = 3 А. Какая средняя ЭДС индуцируется в надетом на соленоид витке, когда ток в соленоиде выключается в течение времени Δt = 1 мс.

3.20. Найти ЭДС индукции в соленоиде, содержащем N =500 витков, если известно, что за время Δt = 0,002 с магнитный поток равномерно убывает от Φ_1 = 12 до Φ_2 = 8 мВб.

3.21. На соленоид длиной l = 144 с и диаметром d = 5 см надет проволочный виток. Обмотка соленоида имеет N = 2000 витков, и по ней течет ток I = 2 А. Соленоид имеет железный сердечник. Какая средняя ЭДС индуцируется в надетом на соленоид витке, когда ток в соленоиде выключается в течение времени Δt = 2 мс?

3.22. В однородном магнитном поле, индукция которого B = 0,1 Тл, вращается катушка, состоящая из N = 200 витков. Ось вращения катушки перпендикулярная к ее оси и к направлению магнитного поля. Период обращения катушки T = 0,2 с; площадь поперечного сечения S = 4 см^2. Найти максимальную ЭДС индукции во вращающейся катушке.

3.23. В однородном магнитном поле, напряженностью H = 2000 А/м равномерно с частотой ν = 10 с$^{-1}$ вращается стержень длиной l = 20 см так, что плоскость его вращения перпендикулярна линиям индукции, а ось вращения проходит через один из его концов. Определить индуцируемую на концах стержня разность потенциалов.

3.24. Рамка, содержащая N = 1500 витков площадью S = 50 см^2, равномерно вращается в магнитном поле с напряженностью Н = 810 А/м, делая v = 480 об/мин. Ось вращения лежит в плоскости и перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальную ЭДС индукции, возникающую в рамке.

3.25. В магнитном поле, индукция которого B = 0,05 Тл, вращается стержень длиной l = 1 м с угловой скоростью ω = 20 рад/с. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна магнитному полю. Найти ЭДС индукции, возникающую на концах стержня.

3.26. Круговой проволочный виток площадью S = 0,01 м находится в однородном магнитном поле, индукция которого равна B = 1 Тл. Плоскость витка перпендикулярна к направлению магнитного поля. Найти среднюю ЭДС индукции, возникающую в витке при выключении поля в течение времени Δt = 10 мс.

3.27. Кольцо из проволоки сопротивлением R = 0,001 Ом находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,4 Тл. Плоскость кольца составляет угол α = 90° с линиями индукции. Определить количество электричества, которое протечет по кольцу, если его выдернуть из поля. Площадь кольца S = 10 см^2.

3.28. Проволочный виток радиусом r = 4 см и сопротивлением R = 0,01 Ом находится в однородном магнитном поле с напряженностью H = 5000 А/м. Плоскость рамки составляет угол α = 30° с линиями поля. Какое количество электричества протечет по витку, если магнитное поле выключить ?

3.29. Рамка из провода сопротивлением R = 0,01 Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,05 Тл. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки S = 100 см^2. Определить, какое количество электричества протечет через рамку за время поворота ее на угол α = 30° в случаях поворота: 1) от 0° до 30°, 2) от 30° до 60°, 3) от 60° до 90°.

3.30. Катушка сопротивлением R = 0,5 Ом с индуктивностью L = 4 мГн параллельно соединена с проводником сопротивлением R = 2,5 Ом, по которому течет постоянный ток силой I = 0,1 А. Определить количество электричества, которое будет индуцировано в катушке при размыкании цепи.

3.31. Соленоид содержит N = 4000 витков провода, по которому течет ток I = 20 А. Определить магнитный поток и потокосцепление, если индуктивность L = 0,4 Гн.

3.32. Соленоид сечением S = 5 см содержит N = 1200 витков. Индукция магнитного поля внутри соленоида при токе I = 2А равна B = 0,01 Тл. Определить индуктивность соленоида.

3.33. Обмотка соленоида состоит из витков медной проволоки, поперечное сечение которой S = 1 мм^2. Длина соленоида l = 25 см; его сопротивление R =0,2 Ом. Найти индуктивность соленоида.

3.34. На картонный каркас длиной L = 0,8 м и диаметром D = 4 см намотан в один слой провод диаметром d =0,25 мм так, что витки плотно прилегают друг к другу. Вычислить индуктивность полученного соленоида.

3.35. Катушка, намотанная на немагнитный цилиндрический каркас, имеет N = 250 витков и индуктивность L_1 = 36 мГн. Чтобы увеличить индуктивность катушки до L_2 = 100 мГн, обмотку катушки сняли и заменили обмоткой из более тонкой проволоки с таким расчетом, чтобы длина катушки осталась прежней. Сколько витков оказалось в катушке после перемотки ?

3.36. Соленоид содержит N = 600 витков. При силе тока I = 10 А магнитный поток равен Ф =80 мкВб. Определить индуктивность соленоида.

3.37. Катушка длиной l =20 см и диаметром d =3 см имеет N = 400 витков. По катушке идет ток I = 2 А. Найти индуктивность катушки и магнитный поток, пронизывающий площадь ее поперечного сечения.

3.38. Площадь поперечного сечения соленоида с железным сердечником S = 10 см^2; длина соленоида l = 1 м. Магнитный поток, пронизывающий поперечное сечение соленоида Ф =1,4 мВб. Какому току, текущему через соленоид, соответствует этот магнитный поток, если известно, что индуктивность соленоида при этих условиях L = 0,44 Гн?

3.39. Соленоид содержит N = 800 витков. Сечение сердечника (из немагнитного материала) равно S = 10 см. По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией B = 8 мТл. Определить среднее значение ЭДС самоиндукции, которая возникает на зажимах соленоида, если сила тока уменьшается до нуля за время Δt = 0,8 мс.

3.40. Соленоид содержит N = 1000 витков. Сечение сердечника S = 10 см. По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией B = 1,5 Тл. Найти среднее значение ЭДС, которая возникает на зажимах соленоида, если ток уменьшится до нуля за Δt = 510 с.

3.41. Обмотка соленоида с железным сердечником содержит N = 600 витков. Длина сердечника l = 40 см. Как и во сколько раз изменится индуктивность соленоида, если сила тока, протекающего по обмотке, возрастает от I_1 = 0,2 А до I_2 = 1 А?

3.42. Цепь состоит из катушки индуктивностью L = 0,1 Гн и источника тока. Источник тока отключили, не разрывая цепь. Время, через которое сила тока уменьшается до 0,001 первоначального значения, равно Δt = 0,07 с. Определить сопротивление катушки.

3.43. Источник тока замкнули на катушку сопротивлением R = 20 Ом.

Через время $\Delta t = 0{,}1$ с сила тока замыкания достигла 0,95 предельного значения. Определить индуктивность катушки.

3.44. Определить силу тока в цепи через Δt = 0,01 с после ее размыкания. Сопротивление цепи R = 20 Ом и индуктивность L = 0,1 Гн. Сила тока до размыкания цепи I = 50 А.

3.45. К источнику тока с внутренним сопротивлением r = 0,2 Ом присоединена катушка сопротивлением R = 0,8 Ом и индуктивностью L = 0,5 Гн. Определить, через какой промежуток времени с момента замыкания цепи ток достигнет значения, отличающегося от максимального на 1 %.

3.46. Электрическая лампочка, сопротивление которой в горячем состоянии R = 10 Ом, подключается через дроссель к 12-вольтовому аккумулятору. Индуктивность дросселя L = 2 Гн, сопротивление r =1 Ом. Через какое время после включения лампочка загорится, если она начинает заметно светиться при напряжении на ней U = 6 В ?

3.47. Имеется катушка длиной l = 20 см и диаметром d = 2 см. Обмотка катушки состоит из N = 200 витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой S = 1 мм^2. Катушка включена в цепь с некоторой ЭДС. При помощи переключателя ЭДС выключается, и катушка замыкается накоротко. Через какое время после выключения ЭДС ток в цепи уменьшится в 2 раза?

3.48. Катушка имеет индуктивность L = 0,2 Гн и сопротивление R = 1,64 Ом. Во сколько раз уменьшится ток в катушке через время Δt = 0,005 с после того, как ЭДС выключена и катушка замкнута накоротко?

3.49. Катушка имеет индуктивность L = 0,144 Гн и сопротивление R = 10 Ом. Через какое время Δt после включения в катушке потечет ток, равный половине установившегося?

3.50. Определить объемную плотность энергии магнитного поля w в стальном сердечнике, если индукция магнитного поля B = 0,5 Тл.

3.51. По обмотке соленоида индуктивностью L = 0,2 Гн течет ток I =10 А. Определить энергию магнитного поля соленоида и объемную плотность энергии, если длина соленоида l = 20 см, а его диаметр d = 2 см.

3.52. Напряженность магнитного поля тороида со стальным сердечником возросла от H_1 = 100 А/м до H_2 = 800 А/м. Определить, во сколько раз изменилась объемная плотность энергии магнитного поля.

3.53. По обмотке тороида течет ток силой I = 6 А. Витки провода радиусом r = 0,2 мм плотно прилегают друг к другу. Определить величину энергии магнитного поля в стальном сердечнике тороида, если площадь сечения его S = 4 см^2, а диаметр средней линии D = 30 см.

3.54. По обмотке соленоида течет ток силой I = 6 А. Витки провода диаметром d = 0,2 мм плотно прилегают друг к другу. Определить величину энергии магнитного поля W в железном сердечнике соленоида, если его радиус r = 2 см, а длина l = 30 см.

3.55. Соленоид содержит N = 1000 витков. Сила тока в обмотке соленоида равна I = 1 А, магнитный поток Ф = 0,01 Вб. Определить энергию магнитного поля.

3.56. Обмотка тороида содержит n = 10 витков на каждый сантиметр длины. Сердечник немагнитный. При какой силе тока плотность энергии магнитного поля равна w = 1 Дж/м^3.

3.57. Определить плотность энергии w магнитного поля в железном сердечнике замкнутого соленоида, если напряженность намагничивающего поля равна H = 1200 А/м.

3.58. Определить плотность энергии магнитного поля в центре кольцевого проводника, имеющего радиус R = 25 см и содержащего N = 100 витков. Сила тока в проводнике I = 2 А.

3.59. На железное кольцо намотаны в один слой N = 200 витков. Определить энергию W магнитного поля, если при токе силой I = 2,5 А магнитный поток в железе равен Ф = 0,5 мВб.

3.60. При какой силе тока в прямолинейном бесконечно длинном проводнике плотность энергии магнитного поля на расстоянии a = 1 см от проводника равна w = 0,1 Дж/м^3?

4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Дифференциальное уравнение механических колебаний гармонического осциллятора и его решение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad x = a\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где круговая частота ω_0 связана с коэффициентом упругости k соотношением $k = \omega_0^2 m$, a – амплитуда колебаний, φ – начальная фаза.

Период колебаний пружинного, физического и математического маятников

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}, \quad T = 2\pi\sqrt{I/mgl}, \quad T = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре и его значение

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=0,\quad q=q_m\cos(\omega_0 t+\varphi),\quad T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{LC}\,.$$

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний в контуре и его решение

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0,\quad q=q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t\pm\alpha),\quad \beta=\frac{R}{2L},$$

где $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$, $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$.

Величины, характеризующие затухание:

1. коэффициент затухания $\beta=R/2\pi$ и время релаксации $t=1/\beta$;
2. логарифмический коэффициент затухания $\lambda=\beta T$;
3. добротность колебательного контура $Q=\pi/\lambda=\frac{\omega}{2\beta}$, $Q\approx\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Полное сопротивление Z цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C, на концы которой подается переменное напряжение $U=U_m\cos\omega t$

$$Z=\sqrt{R^2+\left[\omega L-\frac{1}{\omega C}\right]^2}=\sqrt{R^2+(R_L-R_C)^2}\,,$$

где $R_L=\omega L$ – реактивное индуктивное сопротивление, $R_C=1/\omega C$ – реактивное емкостное сопротивление.

Сдвиг фаз между напряжением и силой тока

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{\omega L-1/(\omega C)}{R}.$$

Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x

$$\xi(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)\,,$$

где $\xi(x,t)$ – смещение точек среды с координатой x в момент времени t; A – амплитуда волны, ω – циклическая (круговая) частота, k – волновое число, λ –

длина волны, υ – фазовая скорость, T – период колебаний, φ_0 – начальная фаза колебаний, причем

$$\lambda = \upsilon T, \quad \upsilon = \lambda\nu, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\upsilon}.$$

Распространение волн в однородной изотопной среде в общем случае описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{dt^2}.$$

Уравнение плоской электромагнитной волны

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx + \alpha),$$
$$\vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kx + \alpha).$$

ее фазовая скорость распространения

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$\omega = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2 + \mu\mu_0 H^2/2.$$

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Умова-Пойнтинга

$$\bar{S} = [\bar{E}\,\bar{H}].$$

Примеры решения задач

Задача 4-1. Известно, что напряжение на обкладках конденсатора, измеренное в вольтах, в колебательном контуре меняется в зависимости от времени по закону $U = 12\cos(20\pi \cdot t)$. Емкость конденсатора равна C = 5 мкФ. Найти: а) период колебаний, угловую и циклическую частоту колебаний в контуре; б) индуктивность контура; в) закон изменения заряда на обкладках конденсатора и его заряд в момент времени $t = T/6$; г) закон изменения тока в контуре и его величину в момент времени $t = T/6$; д) полную энергию контура; е)максимальную энергию электрического поля и его энергию в момент времени $t = T/6$; ж) максимальную энергию магнитного поля.

Решение. Сравнивая уравнение колебаний в рассматриваемом колебательном контуре

$$U = 12\cos(200\pi \cdot t)$$

с общим уравнением, описывающим изменение напряжения в контуре,

$$U = U_m \cos(\omega t) = U_m \cos(2\pi \nu t)$$

находим амплитудное значение напряжения на конденсаторе U_m = 12 В, циклическую частоту колебаний в контуре ω = 200π = 628 рад/с, угловую частоту колебаний ν = 100 $с^{-1}$, период колебаний $T = 1/\nu$ = 0,01 с.

Далее, учитывая, что период колебаний в колебательном контуре определяется формулой Томсона

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC},$$

найдем индуктивность контура

$$L = T^2/(4\pi^2 C) = 0{,}51 \text{ Гн}.$$

Заряд на обкладках конденсатора изменяется синхронно с напряжением на конденсаторе, и его зависимость от времени может быть записана, как

$$q = C \cdot U = 6 \cdot 10^{-5}\cos(200\pi t) \text{ Кл}.$$

В момент времени $t = T/6$ заряд на обкладках конденсатора равен

$$q = 6 \cdot 10^{-5}\cos(2\pi/6) = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

Для нахождения тока в контуре необходимо найти производную $I = dq/dt$, т.е. использовать соотношение

$$I = \frac{dq}{dt} = -\,6 \cdot 10^{-5} \cdot 200\pi \sin(200\pi t) = -\,37{,}7 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t) =$$

$$= 37{,}7 \cdot 10^{-3} \cos(200\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ А}.$$

В момент времени $t = T/6$ ток, текущий по контуру, равен

$$I = -\,37{,}7 \cdot 10^{-3} \sin(2\pi/6) = 32{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 32{,}6 \text{ мА}.$$

Полная энергия, запасенная в колебательном контуре, может быть найдена либо как максимальная энергия электрического поля (поскольку в момент максимального заряда конденсатора ток в контуре равен нулю), либо как максимальная энергия магнитного поля (поскольку в момент полностью разряженного конденсатора вся энергия переходит в энергию магнитного поля катушки). Для ее нахождения используем равенство

$$W_{полн} = \frac{CU_{cm}^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} = 3{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Энергия электрического поля в момент времени $t = T/6$ будет составлять только часть от полной энергии, которую можно найти по формуле

$$W = C \cdot U^2/2 = C\,[U_m \cos(2\pi/6)]^2/2 = 0{,}9 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Задача 4-2. Конденсатор емкостью $C = 8\cdot$ мкФ, заряженный до разности потенциалов U_m = 15 В, и катушка индуктивности $L = 3$ мГн, имеющая активное сопротивление $R = 1$ Ом, соединены в колебательный контур. Написать уравнение колебаний для заряда на обкладках конденсатора; рассчитать длину волны, на которую настроен контур; найти число колебаний N_e, по прошествии которых амплитуда колебаний в этом контуре уменьшится в e раз; определить добротность контура Q.

Решение. В контуре, обладающем активным сопротивлением, происходят свободные затухающие колебания. Зависимость заряда от времени для такого контура имеет вид

$$q = q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) = CU_m\, e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\varphi_0 = 0$, если отсчет времени начать с момента соединения конденсатора с катушкой индуктивности, а коэффициент затухания β находится, как

$$\beta = R/2L = 1{,}67\cdot 10^5\ \text{с}^{-1}.$$

Максимальный заряд на обкладках может быть найден через параметры конденсатора $q_m = CU_m = 1{,}2\cdot 10^{-4}$ Кл. Циклическая частота колебаний, возбуждаемых в данном колебательном контуре, должна быть рассчитана не по формуле Томсона $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, а по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,,$$

учитывающей наличие активного сопротивления, приводящего к уменьшению частоты колебаний. Однако численный расчет дает $\omega = 6{,}45\cdot 10^3$ рад/с, что практически идентично частоте ω_0. Такой частоте соответствует длина волны $\lambda = c/v = 2\pi c/\omega = 2{,}92\cdot 10^5$ м, на которую рассчитан контур. Подставляя полученные данные в уравнение колебательного контура, можно написать его явный вид

$$q = 1{,}2\cdot 10^{-4}\exp(-\,1{,}67\ 10^5 t)\cdot\cos(6{,}45\cdot 10^3 t)\ \text{Кл}.$$

Для нахождения времени, за которое амплитуда тока в этом контуре уменьшится в e раз, запишем это условие в математической форме:

$$\frac{q_m}{q_m\, e^{-\beta t}} = e$$

Это означает, что амплитуда уменьшается в e раз за время $t = \tau = 1/\beta = 2L/R$. За это время произойдет некоторое число N_e колебаний, которое можно найти из следующих соображений. Период затухающих колебаний определяется из соотношения $T = 2\pi/\omega$, где $\omega = 6{,}45\cdot 10^3$ рад/с уже найдено нами ранее.

Искомое число N_e может быть найдено из соотношения $N_e = \tau/T$, которое может быть приведено к виду

$$N_e = \tau/T = L\omega/R\pi.$$

Численный расчет дает $N_e = 6{,}17$.

Добротность колебательного контура $Q = \pi/\lambda$, обратная логарифмическому декременту затухания $\lambda = \beta T$, при малых значениях логарифмического декремента затухания может быть найдена по формуле

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

позволяющей вычислить численное значение добротности $Q = 19{,}4$.

Задача 4-3. Электрическая цепь состоит из конденсатора емкостью C = 8 мкФ, катушки с индуктивностью L = 3 мГн и резистора сопротивлением R = 1 Ом. Определить реактивное емкостное, реактивное индуктивное и полное сопротивления цепи при частоте тока ν= 1 кГц. Рассчитать сдвиг фаз между напряжением и током в цепи.

Решение. Реактивное емкостное сопротивление цепи находится, как

$$R_C = 1/\omega C = 1/(2\pi\nu C) = 19{,}9 \text{ Ом}.$$

Реактивное индуктивное сопротивление рассчитывается по формуле

$$R_L = \omega L = 2\pi\nu L = 18{,}8 \text{ Ом}.$$

Для нахождения полного сопротивления цепи воспользуемся соотношением

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} = 1{,}49 \text{ Ом}.$$

Сдвиг фаз между напряжением и током в цепи определяется соотношением

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = -1{,}1.$$

Такое значение тангенса соответствует углу $\varphi = -48^{\circ}$, что говорит о том, что напряжение отстает по фазе от тока на указанный угол.

Задача 4-4. В однородной и изотропной среде с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2{,}0$ и относительной магнитной проницаемостью $\mu = 1{,}0$ распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитудное значение напряженности электрического поля волны E_m = 8 В/м. Определить: а) амплитудное значение напряженности H_m магнитного поля волны, б) фазовую скорость υ волны, в) среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой световой волной, г) среднюю по времени плотность энергии электромагнитного поля волны.

Решение. Для определения амплитудного значения напряженности магнитного поля волны используем соотношение

$$E_m\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}=H_m\sqrt{\mu\mu_0}\,.$$

Учитывая, что электрическая постоянная равна ε_0 = 8, $85\cdot10^{-12}$ Ф/м, а магнитная постоянная равна μ_0 = $4\pi\cdot10$–7 Гн/м, найдем численное значение амплитуды напряженности магнитного поля волны $H_{\rm m}$ = 30 мА/м.

Фазовая скорость электромагнитных волн определяется выражением

$$\upsilon=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,.$$

Поскольку скорость света в вакууме c = $3\cdot10^8$м/с, в данной среде электромагнитная волна распространяется со скоростью $\upsilon = c/\sqrt{2}$ = 2, $12\cdot10^8$ м/с.

Среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой световой волной, т.е. вектор Умова-Пойнтинга, определяется соотношением

$$\vec{S}=\left[\vec{E}\vec{H}\right]$$

Значение плотности потока энергии S, переносимой световой волной, как и плотность энергии w, различны в разных точках пространства, а в некоторой конкретной точке изменяются со временем по закону квадрата синуса. Поскольку среднее значение квадрата синуса равно 1/2, для искомой величины имеем

$$S = E_{\rm m}\,H_{\rm m}/2 = 0{,}24\ \text{Вт/м}^2.$$

Для нахождения средней по времени плотности энергии электромагнитного поля волны воспользуемся соотношением, связывающим величины S, w и υ:

$$w = S/\upsilon = 1{,}13\ \text{нДж/м}^3.$$

Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения

4.1. Что такое колебательный контур?

4.2. Какие виды энергии преобразуются в процессе колебаний в контуре? Как они выражаются через параметры контура?

4.3. Что такое собственная частота контура?

4.4. Как записывается формула Томсона?

4.5. При каком условии колебания в контуре будут незатухающими? Что при этом можно сказать о полной энергии колебаний в контуре?

4.6. Что такое коэффициент затухания?

4.7. Какова циклическая частота затухающих колебаний?

4.8. Что происходит с энергией колебаний, если они являются затухающими?

4.9. Что такое добротность контура, логарифмический декремент затухания?

4.10. Какой процесс называется апериодическим? Когда он возникает?

4.11. Какой процесс называют волной? Как различаются продольные и поперечные волны?

4.12. Что такое фронт волны, длина волны, фазовая скорость?

4.13. Как происходит распространение электромагнитной волны?

4.14. Какие величины периодически изменяются в электромагнитной волне?

4.15. Что такое вектор Умова-Пойнтинга?

4.16. В колебательном контуре максимальная сила тока I_m = 5 мА, максимальное напряжение на конденсаторе U_m = 12 В. Найти энергию колебательного контура, если период колебаний равен T = 5,5 мкс. Определить частоту колебаний и длину волны, на которую настроен контур.

4.17. Амплитудное значение синусоидального напряжения с частотой ν = 50 Гц равно U_m = 220 В. Начальная фаза равна нулю. Написать зависимость напряжения от времени. Найти напряжение в моменты времени t_1 = 0,001 с, t_2 = 0,002 с, t_3 = 0,003 с, t_4 =3,05 с.

4.18. Напряжение на конденсаторе в колебательном контуре изменяется по закону $U_c = 16\cos(3\cdot10^5 t)$ В. В начальный момент заряд конденсатора был равен $q_0 = 5\cdot10^{-6}$ Кл. Определить: а) емкость конденсатора, б) индуктивность контура, в) период и частоту колебаний в контуре, г) энергию колебательного контура.

4.19. Конденсатор емкостью C = 250 пФ зарядили до напряжения U_m = 6 В, и соединили с катушкой индуктивности L = 45 мкГн. Написать уравнение колебаний для заряда и тока в контуре.

4.20. Конденсатору емкостью C = 250 пФ сообщили заряд $q_m = 10^{-9}$ Кл, и соединили с катушкой индуктивности L = 45 мкГн. Написать уравнение колебаний для заряда и тока в контуре.

4.21. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью C = 120 нФ и катушку с индуктивностью L = 0,8 мГн. Найти максимальное напряжение U_m на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока I_m = 25 мА. Написать уравнение колебаний для напряжения и тока в контуре.

4.22. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью C = 120 нФ и катушку с индуктивностью L = 0,8 мГн. Найти максимальную силу тока I_m в контуре, если напряжение на обкладках конденсатора U_m = 180 В. Написать уравнение колебаний для напряжения и тока в контуре.

4.23. Сила тока в колебательном контуре изменяется по закону $I = 8\sin(5\cdot10^3 t)$ А. Индуктивность контура L = 0,06 Гн. Найти емкость конденсатора, энергию колебательного контура, длину волны, на которую настроен контур. Написать уравнение колебаний для напряжения на конденсаторе.

4.24. Сила тока в колебательном контуре изменяется по закону $I = 8\sin(5\cdot10^3 t)$ А. Емкость конденсатора C = 15 нФ. Найти индуктивность контура, энергию колебательного контура, длину волны, на которую настроен контур. Написать уравнение колебаний для напряжения на конденсаторе.

4.25. Напряжение на конденсаторе емкостью C = 0,8 мкФ, включенном в колебательный контур, изменяется по закону $U_C = 25\cos(5\cdot10^3 t)$ В. Найти индуктивность контура и максимальную силу тока в нем. Написать уравнение колебаний для тока в контуре.

4.26. Напряжение на конденсаторе, включенном в колебательный контур, изменяется по закону $U_C = 25\cos(5\cdot10^3 t)$ В. Индуктивность контура L = 0,09 Гн. Найти емкость конденсатора и его максимальный заряд. Написать уравнение колебаний для заряда на конденсаторе и тока в контуре.

4.27. Конденсатор емкостью C = 0,4 мкФ, заряженный до разности потенциалов U_m = 125 В, и катушка индуктивности L = 12 мГн, имеющая активное сопротивление R = 1,2 Ом, соединены в колебательный контур. Определить добротность контура Q. Написать уравнение затухающих колебаний для заряда на обкладках конденсатора.

4.28. Конденсатор емкостью C = 0,6 мкФ, заряженный до разности потенциалов U_m = 15 В, и катушка индуктивности L = 8 мГн, имеющая активное сопротивление R = 0,2 Ом, соединены в колебательный контур. Определить логарифмический декремент затухания λ. Написать уравнение затухающих колебаний для напряжения на обкладках конденсатора.

4.29. Конденсатор емкостью C = 5 нФ, имеющий заряд $q_m = 10^{-6}$ В, и катушка индуктивности L = 2 мГн, имеющая активное сопротивление R = 0,08 Ом, соединены в колебательный контур. Определить логарифмический декремент затухания λ. Написать уравнение затухающих колебаний для тока в контуре.

4.30. Цепь состоит из катушки индуктивности L = 0,25 Гн, имеющей активное сопротивление R = 80 Ом, и конденсатора с емкостью $C = 2\cdot10^{-6}$ Ф. Определить полное сопротивление цепи и сдвиг фаз между током и напряжением в цепи при частоте ν = 50 Гц.

4.31. Цепь состоит из катушки индуктивности L = 0,25 Гн, имеющей активное сопротивление R = 80 Ом, и конденсатора с емкостью $C = 2\cdot10^{-6}$ Ф. Определить резонансную частоту цепи и ее полное сопротивление при частоте, составляющей 80% от резонансной.

4.32. В цепь переменного тока с частотой ν = 1000 Гц включена катушка с индуктивностью L = 0,1 Гн. Конденсатор какой емкости надо включить в эту цепь, чтобы наступил резонанс?

4.33. В цепь переменного тока с частотой ν = 1000 Гц включен конденсатор емкостью $C = 2\cdot10^{-6}$ Ф. Какую индуктивность надо включить в эту цепь, чтобы наступил резонанс?

4.34. Резонанс в колебательном контуре с конденсатором емкостью $C_1 = 10^{-7}$ Ф наступает при частоте ν_1 = 500 Гц. Когда параллельно конденсатору C_1 подключают второй конденсатор емкостью C_2, то частота резонанса становится равной ν_2 = 100 Гц. Найти емкость второго конденсатора C_2.

4.35. Резонанс в колебательном контуре с конденсатором емкостью $C_1 = 10^{-7}$ Ф наступает при частоте ν_1 = 500 Гц. При какой частоте будет наблюдаться резонанс, если параллельно конденсатору C_1 подключить второй конденсатор емкостью $C_2 = 3\cdot10^{-7}$ Ф. Как изменится частота, если конденсатор C_2 подключить последовательно?

4.36. В однородной и изотропной среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε = 2,6 и относительной магнитной проницаемостью μ = 1,0 распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитудное значение напряженности магнитного поля волны H_m = 0,06 А/м. Определить: а) амплитудное значение напряженности E_m электрического поля волны, б) фазовую скорость υ волны, в) среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой световой волной, г) среднюю по времени плотность энергии электромагнитного поля волны.

4.37. В однородной и изотропной среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε = 2,2 и относительной магнитной проницаемостью μ = 1,0 распространяется плоская электромагнитная волна. Среднее по времени значение плотности энергии электромагнитного поля волны равно w = 1,18 нДж/м^3. Определить: а) амплитудное значение напряженности E_m электрического поля волны, б) фазовую скорость υ волны, в) среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой световой волной.

4.38. В однородной и изотропной среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε = 1,8 и относительной магнитной проницаемостью μ = 1,0 распространяется плоская электромагнитная волна. Среднее по времени значение плотности энергии электромагнитного поля волны равно w = 1,5 нДж/м^3. Определить: а) амплитудное значение напряженности H_m магнитного поля волны, б) фазовую скорость υ волны, в) среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой световой волной.

4.39. В однородной и изотропной среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε = 1,95 и относительной магнитной проницаемостью μ = 1,0 распространяется плоская электромагнитная волна. Среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой световой волной равно S = 0,4 Вт/м^2. Определить: а) амплитудное значение напряженности H_m магнитного поля волны, б) фазовую скорость υ волны, в) среднюю по времени плотность энергии w электромагнитного поля волны.

4.40. В однородной и изотропной среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε = 1,95 и относительной магнитной проницаемостью μ = 1,0 распространяется плоская электромагнитная волна. Среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой световой волной равно S = 0,4 Вт/м^2. Определить: а) амплитудное значение напряженности E_m электрического поля волны, б) фазовую скорость υ волны, в) среднюю по времени плотность энергии w электромагнитного поля волны.