Занятие № 1

Тема: **Геометрическая оптика. Элементы фотометрии**

Краткая теория

В волновой оптике свет рассматривается как электромагнитные волны. Согласно теории Максвелла, в электромагнитной волне синхронно колеблются векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$, где $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\vec{H}$ – вектор напряженности магнитного поля. Так как векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны направлению распространения волны и образуют с направлением распространения правовинтовую систему, то электромагнитные волны являются *поперечными* (рис. 1.1).

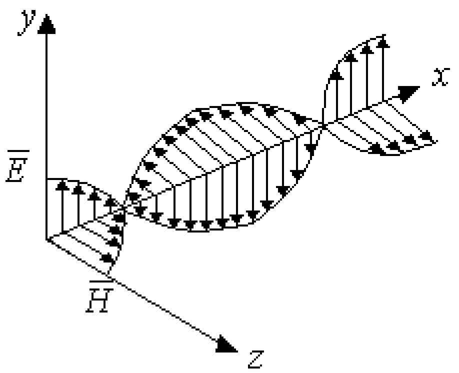


Рис. 1.1

Поскольку основные действия света (физиологические, фотоэлектрические и т.д.) вызываются колебаниями электрического (его называют также световым) вектора, то обычно рассматривают только колебания вектора напряженности электрического поля.

Из уравнений Максвелла следует, что изменение светового вектора описывается уравнением волны

$$E = E_m \cos(\omega t - kr + \alpha) = E_m \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right) + \alpha\right],$$

где ω – циклическая частота, α – начальная фаза колебаний, r – расстояние вдоль направления распространения световой волны, k – волновое число, λ – длина волны, υ – фазовая скорость распространения волны в данной среде

$$k = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} = \frac{c\upsilon}{\nu c} = \lambda_0 \frac{\upsilon}{c} = \frac{\lambda_0}{n},$$

где ν – частота падающего света, n – показатель преломления, характеризующий оптические свойства среды. Если n среды везде одинаков, то среда называется *оптически однородной*. Если световая волна имеет одну строго постоянную частоту, она называется *монохроматической*.

Геометрическая оптика – раздел физики в котором рассматривается взаимодействие света с телами, линейные размеры которых несоизмеримо больше длин волн видимого света. Поэтому при таком взаимодействии волновая природа света не проявляется. Законы распространения света рассматриваются на основе представления о световых лучах.

Световые лучи – нормальные к волновым поверхностям линии, вдоль которых распространяется поток световой энергии.

Волновая поверхность – поверхность одинаковой фазы. За направление светового луча принимают направление распространения света. Луч распространяется вдоль линии, перпендикулярной волновому фронту.

Принцип Гюйгенса. Каждая точка поверхности, которой достигла в данный момент волна, является точечным источником вторичных волн. Совокупность точек, до которых дошел процесс распространения волны, называется *волновым фронтом*.

В основе геометрической оптики лежат следующие законы:

Закон прямолинейного распространения света. Свет в оптически однородной среде распространяется прямолинейно.

Закон отражения света. Луч падающий, луч отраженный и перпендикуляр, восстановленный из точки падения к границе раздела сред, лежат в одной плоскости. Угол падения α равен углу отражения β (рис. 1.2).

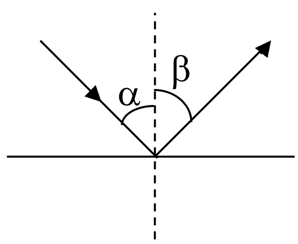


Рис. 1.2

Закон преломления света. Луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр к поверхности раздела сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости (рис. 1.3). Отношение синуса угла падения α к синусу угла преломления γ есть величина постоянная для данных сред, равная отношению абсолютных показателей преломления второй среды n_2 к первой n_1

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

где n_{21} – относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

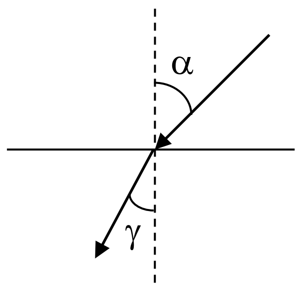


Рис. 1.3

Абсолютный показатель преломления n показывает, во сколько раз скорость света в среде меньше, чем в вакууме

$$n_1 = \frac{c}{\upsilon_1}, \; n_2 = \frac{c}{\upsilon_2},$$

где c – скорость света в вакууме, υ_1 и υ_2 – скорости света в соответствующих средах.

Явление полного внутреннего отражения. Если луч света падает из оптически более плотной среды с показателем преломления n_2, на границу раздела с оптически менее плотной средой с показателем преломления n_1 ($n_2 > n_1$), то при углах падения $\alpha > \alpha_0$ наблюдается полное внутреннее отражение, когда луч полностью отражается от границы раздела сред (как от идеального зеркала) (рис. 1.4). Предельный угол полного внутреннего отражения α_0 находится из условия

$$n_2 \sin\alpha_0 = n_1 \sin 90^\circ, \; \sin\alpha_0 = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}.$$

Если $n_1 = 1$ (среда – воздух), то $\sin\alpha_0 = \dfrac{1}{n_2}$.

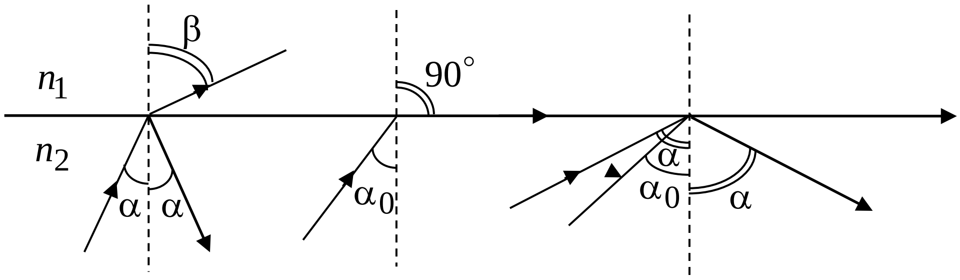


Рис. 1.4

Плоским зеркалом называется поверхность, при отражении от которой падающие на нее параллельные лучи остаются параллельными и после отражения.

Изображение точечного источника S в плоском зеркале строится так: надо выбрать любые два луча 1 и 2, падающие от источника на зеркало, построить отраженные лучи и провести продолжения этих лучей до их пересечения в точке S'. В этой точке на расстоянии $OS' = OS$ от зеркала мы получим мнимое изображение источника S (рис. 1.5). На рисунке 3 – плоское зеркало.

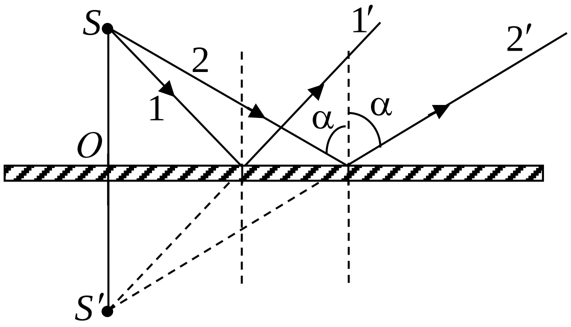


Рис. 1.5

Изображение предмета: плоское зеркало отражает свет, приходящий из точек A и B. Выбираем 2 произвольные пары отраженных лучей от точек A и B и продолжаем их до пересечения за зеркалом в точках A' и B'. Мы получим мнимое изображение $A'B'$. Его размеры такие же, как у предмета AB (рис. 1.6), где 3 – плоское зеркало.

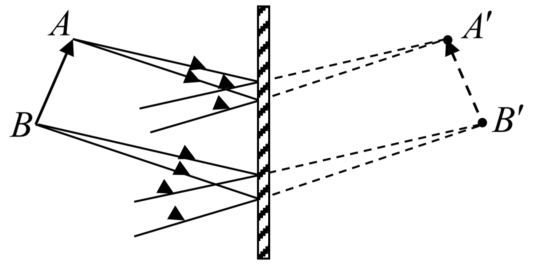


Рис. 1.6

Линзы

Важнейшим элементом оптических приборов и систем (очки, телескопы и т.д.) является линза.

Линзой называется прозрачное тело, ограниченное двумя поверхностями (одна из них обычно сферическая, а вторая – сферическая или плоская). По своим оптическим свойствам линзы делятся на собирающие и рассеивающие.

Тонкая линза – линза, если ее толщина (расстояние между ограничивающими поверхностями) значительно меньше радиусов поверхностей, ограничивающих линзу.

Главная оптическая ось линзы – прямая O_1O_2, проходящая через центры кривизны поверхностей линзы (рис. 1.7).

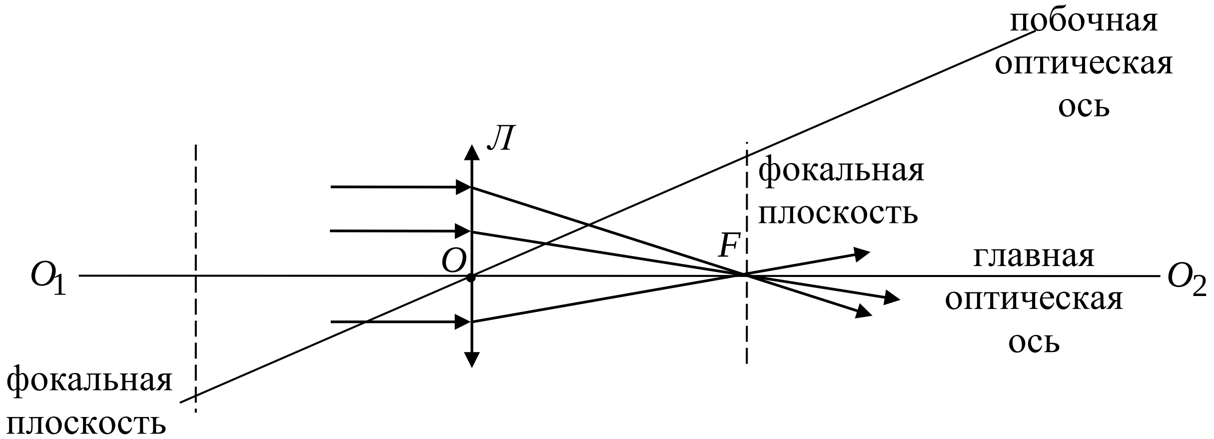


Рис. 1.7

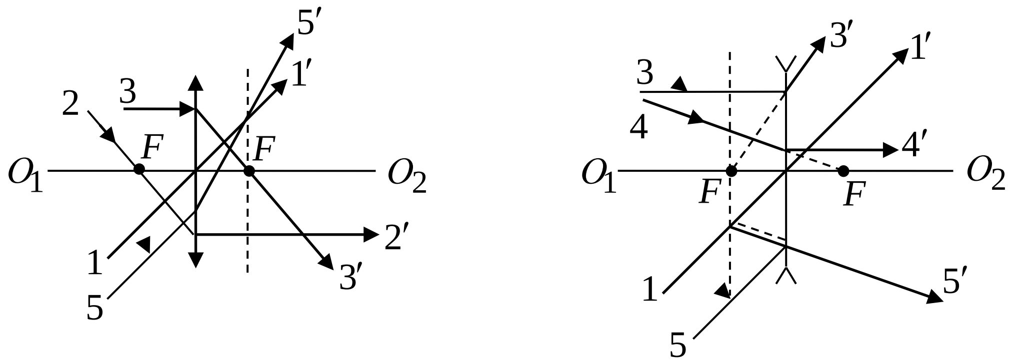
Оптический центр линзы – точка *O*, лежащая в центре линзы на главной оптической оси.

Побочная оптическая ось линзы – любая прямая, проходящая через оптический центр линзы, кроме главной оптической оси. Лучи проходят сквозь точку *O* не преломляясь.

Линза называется *собирающей*, если она преломляет лучи, падающие на нее в направлении главной оптической оси (рис. 1.8а).

Главный фокус линзы – точка *F*, в которой пересекаются после преломления в собирающей линзе лучи, падающие на линзу параллельно главной оптической оси. *Фокусное расстояние* *F* – расстояние от оптического центра линзы до главного фокуса. *Фокальная плоскость* – плоскость, проходящая через главный фокус перпендикулярно главной оптической оси.

Линза называется *рассеивающей*, если она преломляет лучи, падающие на нее, в направлении от главной оптической оси (рис. 1.8,б).



а) собирающая линза   б) рассеивающая линза

Рис. 1.8

При построении изображений в тонких линзах необходимо пользоваться следующими свойствами лучей:

1) световой луч, проходящий через оптический центр линзы, не преломляется (луч 1-1′ на рис. 1.8а,б);

2) световой луч, проходящий через главный фокус собирающей линзы, выходит из нее параллельно главной оптической оси (луч 2-2′ на рис. 1.8а);

3) световой луч, параллельный главной оптической оси собирающей линзы, после преломления пересекает эту ось в главном фокусе за линзой (для рассеивающей линзы луч пересекает ось своим мнимым продолжением в главном фокусе перед линзой) (луч 3-3′ на рис. 1.8а,б);

4) световой луч, направленный на главный фокус за рассеивающей линзой, выходит из нее параллельно главной оптической оси (луч 4-4′ на рис. 1.8б);

5) световой луч, параллельный побочной оси, пересекается с ней в фокальной плоскости. Точка пересечения лучей называется *побочным фокусом*.

Для построения изображения точки необходимо построить ход любых двух характерных лучей, проходящих через эту точку. Построение изображения любого предмета сводится к построению изображений отдельных его точек. Для получения изображения прямой достаточно построить изображение двух ее точек.

Формула тонкой линзы

$$\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm \frac{1}{F},$$

где d – расстояние от линзы до предмета, f – расстояние от линзы до изображения предмета, F – фокусное расстояние ($F > 0$ для собирающей линзы, $F < 0$ для рассеивающей линзы).

Мнимому изображению в линзах соответствует отрицательное значение f.

Отношение

$$D = \frac{1}{F}$$

есть *оптическая сила линзы* ($D > 0$ для собирающей линзы, $D < 0$ для рассеивающей линзы).

Единица измерения D – диоптрия (1 дптр = 1 м$^{-1}$).

Линейное увеличение

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d},$$

где H – линейный размер изображения, h – линейный размер предмета.

Для собирающей линзы в зависимости от значения d реализуются следующие изображения:

1) $d > 2F$ – изображение действительное, перевернутое, уменьшенное ($\Gamma < 1$);

2) $d = 2F$ – изображение действительное, перевернутое, в натуральную величину ($\Gamma = 1$);

3) $F < d < 2F$ – изображение действительное, перевернутое, увеличенное ($\Gamma > 1$);

4) $d < F$ – изображение мнимое, прямое, увеличенное ($\Gamma > 1$).

Для рассеивающей линзы для всех случаев изображение мнимое, прямое, уменьшенное ($\Gamma < 1$).

Элементы фотометрии

Фотометрия – раздел оптики, занимающийся вопросами измерения интенсивности света и его источников. В фотометрии используются следующие величины:

1. Энергетические величины:

Поток излучения Φ_e равен отношению энергии W излучения ко времени t, за которое излучение произошло

$$\Phi_e = \frac{W}{t}.$$

Единица измерения ватт (Вт).

Энергетическая светимость – отношение потока излучения, испускаемого поверхностью, к площади сечения S, сквозь которое этот поток проходит

$$R_e = \frac{\Phi_e}{S}.$$

Единица измерения Вт/м^2.

Энергетическая сила света – отношение потока излучения источника к телесному углу Ω, в пределах которого это излучение распространяется

$$I_e = \frac{\Phi_e}{\Omega}.$$

Единица измерения Вт/ср.

Ср – стерадиан, единица измерения телесного угла.

Телесный угол – часть пространства, ограниченная некоторой конической поверхностью.

2. Световые величины:

Световой поток Φ – мощность оптического излучения по вызываемому им световому ощущению.

Единица измерения люмен (лм).

Светимость определяется соотношением

$$R = \frac{\Phi}{S}.$$

где S – площадь поверхности, сквозь которую проходит световой поток.

Единица измерения лм/м^2.

Освещенность – отношение светового потока Φ, падающего на поверхность, к площади S этой поверхности

$$E = \frac{\Phi}{S}.$$

Единица измерения люкс (лк).

Сила света задается отношением

$$I = \frac{\Phi}{\Omega},$$

где Ω – телесный угол, внутри которого распространяется световой поток.

Единица измерения кандела (кд).

Яркость B_φ светящейся поверхности в некотором направлении φ есть величина, равная отношению силы света I в этом направлении к площади S проекции светящейся поверхности на плоскость, перпендикулярную данному направлению

$$B_\varphi = \frac{I}{S\cos\varphi}.$$

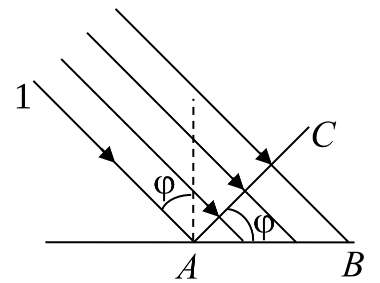


Рис. 1.9

На рис. 1.9 луч 1 падает на площадку AB под углом φ. Площадка AC перпендикулярна лучу 1.

Единица измерения – кд/м^2.

Световая эффективность (светоотдача)

$$L = \frac{\Phi}{P},$$

где P – мощность источника света.

Примеры решения задач

Задача 1.1. На дне озера глубиной $H = 100$ см находится точечный источник света S. Найти радиус светового пятна на поверхности воды, если показатель преломления воды $n = 1{,}3$.

Решение

$H = 100$ см $= 1$ м
$n = 1{,}3$
$R - ?$

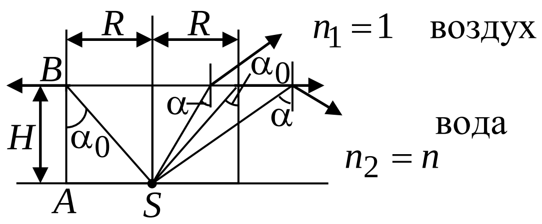


Рис. 1.10

Если лучи падают на границу раздела вода-воздух под углом $\alpha < \alpha_0$, то они выходят в атмосферу. Если $\alpha > \alpha_0$, то луч света испытывает полное внутреннее отражение и возвращается в воду. На поверхности воды будет освещена площадка радиуса R, равная площади основания конуса с вершиной в точке S и боковой поверхностью, образованной лучами, падающими на поверхность озера под углом α_0. Для этих лучей

$$\sin\alpha_0 = \frac{1}{n}.$$

Рассмотрим ΔABS:

$$\sin\alpha_0 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}},$$

следовательно, $\dfrac{1}{n} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}$, откуда $R = \dfrac{H}{\sqrt{n^2 - 1}} = 1{,}2$ м.

Ответ: $R = 1{,}2$ м.

Задача 1.2. На каком расстоянии d от собирающей линзы надо поместить предмет, чтобы расстояние l между ним и его действительным изображением было минимальным? $F = 10$ см.

Решение

$F = 10$ см = 0,1 м l = min d – ?	Расстояние между предметом и изображением $$l = d + f,$$

откуда

$$f = l - d. \quad (1)$$

По формуле линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Учитывая (1)

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{l - d} = \frac{1}{F}. \quad (2)$$

Из (2) найдем d

$$d^2 - dl + FL = 0,$$

$$d = 0{,}5l \pm \sqrt{0{,}25l^2 - Fl}, \quad (3)$$

так как d, l, F – действительные числа, то

$$0{,}25l^2 - Fl \geq 0.$$

Когда расстояние l будет минимальным?

Поскольку изображение по условию действительное, то $F > 0$ и $l > 0$.

При $l = l_{\min}$

$$0{,}25l^2 - Fl = 0,$$

откуда

$$l = 4F. \quad (4)$$

Подставив (4) в (3), получим

$$d = 0{,}5 \cdot 4F \pm \sqrt{0{,}25 \cdot 16F^2 - F \cdot 4F},$$

$$d = 2F = 2 \cdot 10 = 20 \text{ см}.$$

Ответ: d = 20 см = 0,2 м.

Задача 1.3. Высоко над горизонтальной поверхностью расположен точечный источник света с силой света I = 50 кд. Между ним и поверхностью помещается собирающая линза с оптической силой D = 5 дптр так, что источник света находится в ее фокусе. Найти освещенность Е поверхности под линзой.

Решение

I = 50 кд D = 5 дптр $d = F$	Освещенность поверхности – это отношение светового потока, падающего на нее, к освещаемой площади
E – ?	

$$E = \frac{\Phi}{S}. \qquad (1)$$

Так как источник находится в фокусе линзы ($d = F$, где $F = 1/D$), то лучи после линзы пойдут параллельно ее главной оптической оси, образуя светящийся цилиндр (рис. 1.11).

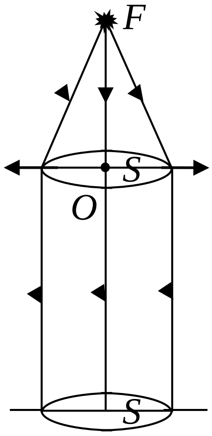


Рис. 1.11

Согласно сказанному

$$d = \frac{1}{D},$$

кроме того $\Phi = I\Omega$, где

$$\Omega = \frac{S}{d^2} = SD^2 \text{ и } \Phi = ISD^2. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$E = \frac{ISD^2}{S} = ID^2 = 50 \cdot 5^2 = 1250 \text{ лк.}$$

Ответ: E = 1250 лк.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. На плоскопараллельную стеклянную пластину (n = 1,5) толщиной d = 5 см падает под углом α = 30° луч света. Определите боковое смещение луча, прошедшего сквозь эту пластинку.

Ответ: x = 9,7 мм.

1.2. Расстояние a от предмета до вогнутого сферического зеркала с R = 20 см равно 15 см. Чему равно увеличение зеркала r?

Ответ: r = 2.

1.3. Двояковыпуклая линза с n = 1,5 имеет одинаковые радиусы кривизны поверхностей, равные 10 см. Изображение предмета с помощью этой линзы оказывается в 5 раз больше предмета. Определить расстояние от предмета до изображения.

Ответ: (a + b) = 0,72 м.

1.4. На какую высоту над чертежной доской необходимо повесить лампочку мощностью P = 300 Вт, чтобы освещенность доски под лампочкой была равна E = 60 лк. Наклон доски составляет 30°, а светоотдача лампочки 15 лм/Вт. Полный световой поток, испускаемый точечным источником света, $\Phi_0 = 4\pi I$.

Ответ: h = 2,27 м.

1.5. Докажите, что в том случае, когда яркость источника не зависит от направления, светимость R и яркость B связаны соотношением $R = \pi B$.

1.6. Величина прямого изображения предмета вдвое больше самого предмета. Расстояние между предметом и изображением равно 20 см. Найти фокусное расстояние линзы. Сделать построение.

Ответ: F = 0,4 м.

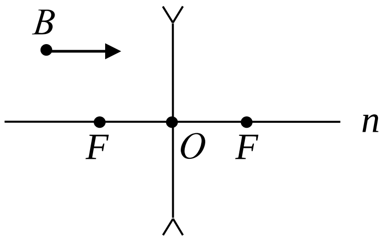
1.7. С какого наибольшего расстояния r можно заметить ночью огонек сигареты, сила света которой $I = 2 \cdot 10^{-3}$ кд, а минимальный световой поток, воспринимаемый глазом, $\Phi = 1 \cdot 10^{-13}$ лм. Диаметр суженного в темноте зрачка $D = 7$ мм?

Ответ: r = 877 м.

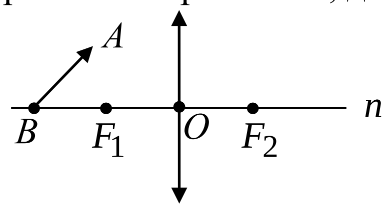
1.8. Высота солнца увеличилась с $\varphi_1 = 30^\circ$ до $\varphi_2 = 45^\circ$. Во сколько раз изменилась освещенность земной поверхности?

Ответ: 1,4.

1.9. Построить изображение стрелки AB, даваемой рассеивающей линзой.



1.10. Построить изображение стрелки AB, даваемой собирающей линзой.



1.11. Над центром круглого стола радиусом R = 1 м висит лампа с силой света I = 100 кд. Построить график зависимости освещенности E края стола от высоты h лампы над столом $E = E(h)$ в интервале от 0,5 до 0,9 м через каждые 0,1 м.

1.12. Спираль электрической лампочки с силой света I = 100 кд заключена в матовую сферическую колбу диаметром: а) d = 5 см; б) d = 10 см. Найти светимость R и яркость B лампы. Потерей света в оболочке колбы пренебречь.

Занятие № 2

Тема: **Интерференция монохроматического света**

Краткая теория

Интерференция света – частный случай общего явления интерференции волн, заключающийся в пространственном перераспределении энергии светового излучения при суперпозиции электромагнитных волн (чередующиеся минимумы и максимумы на интерференционной картине). Необходимым условием интерференции волн является их когерентность. *Когерентность* – согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов.

Строго когерентными могут быть только монохроматические волны – неограниченные в пространстве волны с постоянными во времени частотой, амплитудой и начальной фазой.

Условия наблюдения интерференционных максимумов или минимумов имеют вид:

$\Delta = \pm 2m\dfrac{\lambda_0}{2}$ – максимум m-порядка (светлая полоса), m = 0, 1, 2,…;

$\Delta = \pm(2m+1)\dfrac{\lambda_0}{2}$ – минимум m-порядка (темная полоса), m = 0, 1, 2,…;

$\Delta = n_1 r_1 - n_2 r_2$ – оптическая разность хода, где n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления сред, в которых распространяются лучи, r_1 и r_2 – расстояния от источников S_1 и S_2 до точки A на экране, λ_0 – длины волны в вакууме.

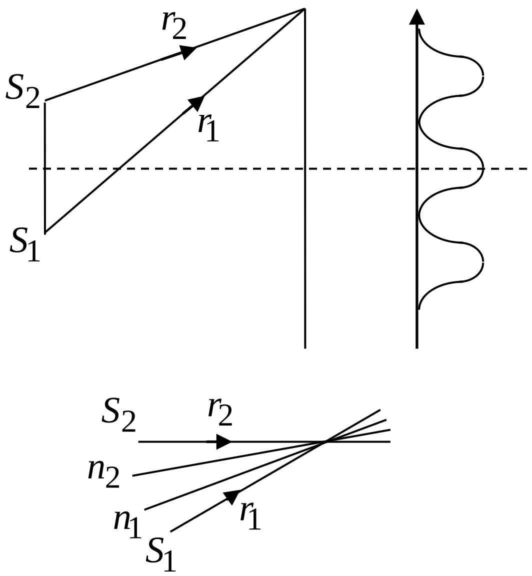


Рис. 2.1

Интерференция света в тонких пленках

Пусть на прозрачную плоскопараллельную пластинку падает плоская монохроматическая волна под углом θ. В результате отражений от обеих поверхностей пластинки исходная волна расщепится на две (лучи 1 и 2 параллельны друг другу). Если оптическая разность хода лучей 1 и 2 мала по сравнению с длиной когерентности (длина когерентности – расстояние, при прохождении которого две или несколько волн утрачивают когерентность) падающей волны, то они когерентны, а интерференционная картина определяется оптической разностью хода между интерферирующими лучами.

$$\Delta = n(AB + BC) - \left(AD \pm \frac{\lambda_0}{2} \right),$$

где θ' – угол преломления, n – показатель преломления пластинки, b – толщина пластинки, n_0 – показатель преломления воздуха.

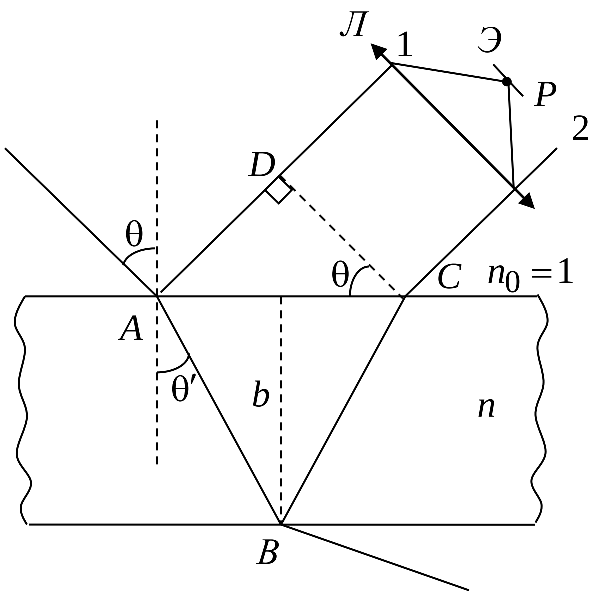


Рис. 2.2

При отражении от верхней поверхности пластинки (от среды, оптически более плотной) происходит скачок фазы на π у отраженной волны, т.е. «потеря» полуволны $\pm\frac{\lambda_0}{2}$. Учитывая, что $\sin\theta = n\sin\theta'$ получим

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2\theta} \pm \frac{\lambda_0}{2}.$$

При $n > n_0$ потеря полуволны в точке A и $\frac{\lambda}{2}$ будет иметь знак минус; при $n < n_0$ – потеря полуволны в точке B и $\frac{\lambda}{2}$ надо брать с плюсом.

Условие интерференционного максимума

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2\theta} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2m\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Условие интерференционного минимума

$$2b\sqrt{n^2-\sin^2\theta} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

где λ_0 – длина волны в вакууме, m – порядок интерференции.

Интерференция может наблюдаться как в проходящем, так и отраженном свете. Максимумам интерференции в отраженном свете соответствуют минимумы в проходящем и наоборот (оптическая разность хода для проходящего и отраженного света отличаются на $\frac{\lambda_0}{2}$).

Интерференционная картина в плоскопараллельных пластинках (пленках) определяется величинами λ_0, b, n и θ. Для данных λ_0, b и n каждому наклону θ лучей соответствует своя интерференционная полоса. Интерференционные полосы, возникающие в результате наложения лучей, падающих на плоскопараллельную пластинку под одинаковыми углами, называются полосами равного наклона.

Интерференция от пластинки переменной толщины. На клин с углом α между боковыми гранями падает плоская монохроматическая волна (лучи 1 и 2 рис. 2.3).

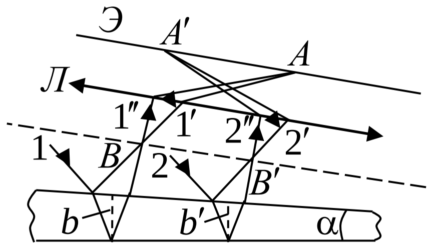


Рис. 2.3

При определенном взаимном положении клина и линзы лучи $1'$ и $1''$, отразившиеся от верхней и нижней поверхности клина, пересекутся в точке A, которая является изображением точки B. В силу когерентности эти лучи будут интерферировать.

Если источник расположен далеко от поверхности клина, а $\alpha \to 0$, то

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2-\sin^2\theta} \pm \frac{\lambda_0}{2},$$

где b – толщина клина в месте падения на него луча.

Лучи $2'$ и $2''$, отразившиеся от верхней и нижней поверхностей клина при падении на него луча 2 в другой точке, собираются линзой в точке A'. В этом случае оптическая разность хода определяется уже толщиной b'. В результате на экране мы видим систему интерференционных полос.

Кольца Ньютона наблюдаются при отражении света от воздушного зазора, образованного плоскополяризованной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой с большим радиусом кривизны R (рис. 2.4). Если параллельный пучок света падает на плоскую поверхность линзы нормально, то полосы равной толщины имеют вид концентрических окружностей.

В отраженном свете

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda_0}{2}.$$

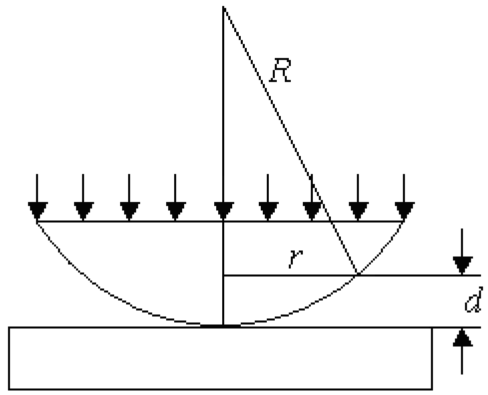


Рис. 2.4

Параллельный пучок света падает нормально на плоскую поверхность линзы и частично отражается от верхней и нижней поверхностей воздушного зазора между линзой и пластиной. При наложении отраженных лучей возникают полосы равной толщины.

Из рис. 2.4 следует, что

$$R^2 = (R-d)^2 + r^2,$$

где r – радиус кривизны окружности, всем точкам которой соответствует одинаковый зазор d.

Так как d мал, то

$$d = \frac{r^2}{2R} \text{ и } \Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}.$$

Следовательно, каждая из полос возникает при отражении от мест пластинки, имеющих одинаковую толщину. Интерференционные полосы, возникающие в результате интерференции от мест одинаковой толщины, называются *полосами равной толщины*.

Так как верхняя и нижняя грани клина не параллельны между собой, то лучи 1′ и 1″ (2′ и 2″) пересекаются вблизи пластинки, т.е. полосы равной толщины локализованы вблизи поверхности клина. Если свет падает на пластинку нормально, то полосы равной толщины локализуются на верхней поверхности клина.

Радиус m-го светлого кольца в отраженном (или темного в проходящем) свете

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda_0 R} \quad (m = 1, 2, 3, ...).$$

Радиус m-го темного кольца в отраженном (или светлого в проходящем) свете

$$r_m^* = \sqrt{m\lambda_0 R} \quad (m = 0, 1, 2, ...),$$

(n = 1 для воздуха).

Примеры решения задач

Задача 2.1. Два когерентных источника S_1 и S_2 испускают монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определить, на каком расстоянии от центра экрана будет расположен первый максимум интерференционной картины, если $L = 4$ м, $h = 1$ мм?

Решение

λ = 600 нм = 6 · 10^{-9} м
L = 4 м
n = 1 мм = 10^{-3} м
x_1 – ?

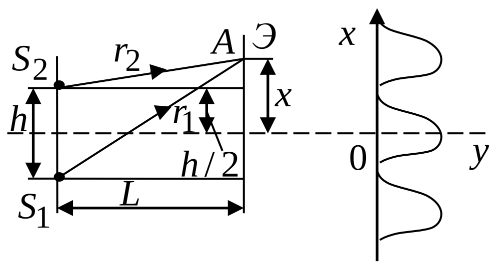


Рис. 2.5

Из рисунка видно, что

$$r_1^2 = L^2 + \left(x + \frac{h}{2}\right)^2,$$

$$r_2^2 = L^2 + \left(x - \frac{h}{2}\right)^2.$$

Вычитывая из первого уравнения второе, имеем:

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 2xh,$$

так как $L >> h$, то $r_1 + r_2 \approx 2L$.

С учетом того, что $\Delta = r_1 - r_2$, имеем:

$$\Delta = \frac{2xh}{2L} = x\frac{h}{L}.$$

Условие максимумов интерференционной картины

$$\Delta = \pm 2m\frac{\lambda_0}{2},$$

где λ_0 – длина волны в вакууме.

Приравнивая правые части двух последних равенств, получим:

$$x_m = \pm\frac{m\lambda_0 L}{h}.$$

Для первого максимума $m = 1$, $x_1 = \pm\frac{\lambda_0 L}{n} = \pm 2{,}4$ мм.

Знаки ± показывают, что максимумы симметрично расположены относительно центра экрана по обе его стороны.

Ответ: $x_1 = \pm 2{,}4$ мм.

Задача 2.2. На экране наблюдается интерференционная картина в результате наложения лучей от двух когерентных источников (λ = 600 нм). Определить, на сколько полос сместится интерференционная картина, если на пути одного из лучей перпендикулярно ему поместить стеклянную пластинку (n = 1,6) толщиной d = 4 мкм.

Решение

λ = 600 нм = $6 \cdot 10^{-7}$ м n = 1,6 d = 4 мкм = $4 \cdot 10^{-6}$ м	Пластинка изменяет оптическую разность хода интерференционных лучей на
m – ?	$$\Delta = nd - d = d(n-1),$$

где d – толщина пластинки, n – показатель преломления пластинки.

При внесении пластинки произойдет смещение интерференционной картины на m полос.

Следовательно,

$$\Delta = m\lambda$$

или

$$d(n-1) = m\lambda,$$

$$m = d(n-1)/\lambda,$$

$$m = 4.$$

Ответ: m = 4.

Задача 2.3. На тонкую прозрачную плоскопараллельную пластинку (n = 1,5) под углом $\alpha = 50^\circ$ падает белый свет. Определить толщину пленки, при которой она в проходящем свете будет казаться красной (λ = 670 нм)?

Решение

$n = 1{,}5$
$\lambda = 670$ нм $= 6{,}7 \cdot 10^{-7}$ м
$\alpha = 50^\circ$
$d_{\min}$ – ?

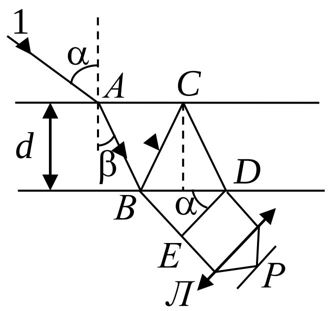


Рис. 2.6

Луч 1, падая на пластинку, частично отражается и частично преломляется в точках A, B, C, D.

Оптическая разность хода между интерферирующими лучами

$$\Delta = 2BC \cdot n - BE$$

(отражение луча в точке C не сопровождается потерей полуволны, а показатель преломления воздуха равен 1). Так как $BC = CD = d/\cos\beta$, $BE = BD\sin\alpha = 2d\,\mathrm{tg}\beta\sin\alpha$, а по закону преломления $\sin\alpha = n\sin\beta$, получим

$$\Delta = 2dn\cos\beta = 2dn\sqrt{1-\sin^2\beta} = 2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha},$$

где d – толщина пластинки, α – угол падения, β – угол преломления.

Условием того, что пленка окрашена (условие максимума) будет $2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} = m\lambda$.

Для минимальной толщины m = 1

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} = 260 \text{ нм.}$$

Ответ: 260 нм.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. На стеклянный клин (n = 1,5) с углом при вершине α=1′ падает под углом $i = 18°$ монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определите расстояние между двумя соседними минимумами при наблюдении интерференции.

Ответ: b = 0,703 мм.

2.2. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиусы двух соседних темных колец равны $r_к = 4{,}0$ мм и $r_{к+1} = 4{,}38$ мм. Радиус кривизны линзы R = 6,4 м. Найти порядковые номера колец и длину волны λ падающего света.

Ответ: $k = 5$, $\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м.

2.3. На пути одного из лучей интерферометра Жамена поместим откачанную трубку длиной $l = 10$ см. При заполнении трубки хлором интерференционная картина для длины волны $\lambda = 590$ нм сместилась на k = 131 полосу. Найти показатель преломления n хлора.

Ответ: $n \approx 1{,}0008$.

2.4. Определите длину отрезка l_1, на котором укладывается столько же длин волн монохроматического света в вакууме, сколько их укладывается на отрезке $l_2 = 5$ мм в стекле. Показатель преломления стекла n = 1,5.

Ответ:

2.5. В опыте Юнга расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Опыт Юнга заключается в следующем. Свет от источника света (щели S) падает на две узкие равноудаленные щели S_1 и S_2, параллельные щели S. При этом S_1

и S_2 являются когерентными источниками. На экране, расположенном на некотором расстоянии параллельно S_1 и S_2 наблюдается явление интерференции. Определите угловое расстояние между соседними светлыми полосами, если третья световая полоса на экране отстоит от центра интерференционной картины на 4,% мм.

Ответ: $\Delta\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$ рад.

2.6. На плоскопараллельную стеклянную пластинку наложена выпуклой стороной плосковыпуклая линза с радиусом кривизны R = 12 м. На плоскую поверхность линзы параллельно ее главной оптической оси падает пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. При этом в отраженном свете на линзе видны чередующиеся темные и светлые кольца, а в центре – темное пятно. Определить радиус третьего темного кольца.

Ответ: $r = 4{,}65 \cdot 10^{-3}$ м.

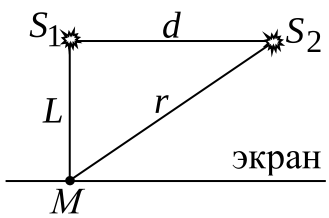
2.7. На мыльную пленку падает белый свет под углом $\alpha = 45°$ к поверхности пленки. При какой наименьшей толщине d пленки отраженные лучи будут окрашены в желтый цвет (λ = 600 нм)? (n = 1,33).

Ответ: d = 0,13 мкм.

2.8. Падая на две щели, расположенные на расстоянии 0,0026 мм друг друга,отмонохроматический свет образует полосу четвертого порядка под углом $\varphi = 6{,}4''$. Чему равна длина волны падающего света?

Ответ: $\lambda = 7{,}15 \cdot 10^{-7}$ м.

2.9. Два когерентных источника света S_1 и S_2 с длиной световой волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м находятся на расстоянии $d = 30$ мм друг от друга. Экран расположен на расстоянии $L = 4$ см от каждого источника, что будет наблюдаться на экране в точке M, расположенной напротив источника S_1?



Ответ: максимум.

2.10. Как изменится расстояние Δx между соседними максимумами освещенности на экране, если:

1) не изменяя расстояния d между когерентными источниками света S_1 и S_2, удалять их от экрана;

2) не изменяя расстояния до экрана L, сближать источники света;

3) уменьшить длину волны света λ, испускаемого источниками?

Ответ: 1) увеличивается, 2) увеличивается, 3) уменьшается.

Занятие № 3

Тема: **Дифракция света**

Краткая теория

Дифракция света – это совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света сквозь малые отверстия, вблизи границ непрозрачных тел и обусловленных волновой природой света. Под дифракцией света обычно понимают отклонения от законов распространения света, описываемых геометрической оптикой.

Для света явление дифракции имеет особенности: длина волны λ много меньше размеров d преград (или отверстий). Поэтому наблюдать дифракцию можно только на достаточно больших расстояниях l от преграды. $\left(l \geq \dfrac{d^2}{\lambda}\right)$.

Метод зон Френеля. Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, действие источника S заменяют действием воображаемых источников, расположенных на волновой поверхности $Ф$. Амплитуда световой волны определяется в точке M (рис. 3.1).

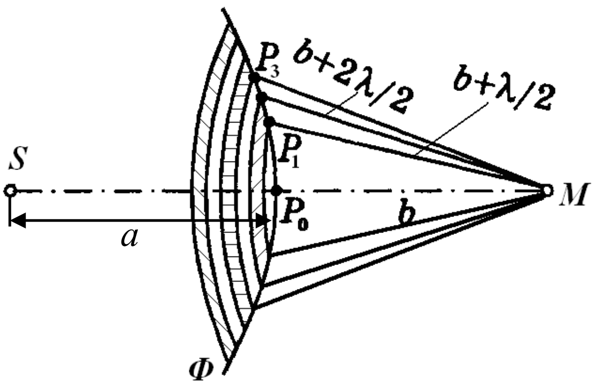


Рис. 3.1

Волновую поверхность $Ф$ Френель разбил на кольцевые зоны такого размера, чтобы расстояния от краев зоны до точки M отличались на $\dfrac{\lambda}{2}$

$$P_1M - P_0M = P_2M - P_1M = \ldots = \frac{\lambda}{2}.$$

Колебания от соседних зон проходят до точки M расстояния, отличающиеся на $\frac{\lambda}{2}$, поэтому в точку M они приходят в противоположной фазе и при наложении эти колебания будут взаимно ослаблять друг друга. Амплитуда результирующего светового колебания в точке M

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + ...,$$

где $A_1, A_2, \ldots$ – амплитуды колебаний, возбуждаемых 1, 2, … зонами.

Амплитуда результирующих колебаний в точке M

$$A \approx \frac{A_1}{2}.$$

Площадь m-ой зоны Френеля

$$\Delta\sigma_m = \frac{\pi ab\lambda}{a+b},$$

где a – расстояние от точечного источника света до волновой поверхности.

Радиус внешней границы m-ой зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{maa}{a+b}\lambda}, \quad r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}. \tag{3.1}$$

Зонные пластинки. В простейшем случае это стеклянные пластинки, на поверхность которых нанесены по принципу расположения зон Френеля чередующиеся прозрачные и непрозрачные кольца с радиусами r_m зон Френеля, определенными для заданных значений a, b, λ выражением (3.1)

m = 0, 2, 4, … для прозрачных колец;

m = 1, 3, 5, … для непрозрачных.

Если поместить зонную пластинку в строго определенном месте (на расстоянии a от точечного источника и на расстоянии b от точки наблюдения на линии, соединяющей эти две точки), то для света длиной волны λ она перекроет четные зоны и оставит свободными нечетные. В результате результирующая амплитуда $A = A_1 + A_3 + A_5 + ...$ будет больше, чем при полностью открытом волновом фронте.

Зонная пластинка действует подобно собирающей линзе, увеличивая освещенность.

Дифракция Фраунгофера на щели. *Дифракция Фраунгофера* наблюдается, когда на щель или отверстие направляется параллельный пучок света (плоская волна), а дифракционная картина наблюдается на достаточно большом расстоянии (практически в параллельных лучах).

Плоская монохроматическая волна падает нормально на щель *MN* шириной *a*. Параллельные пучки лучей, выходящие из щели в произвольном направлении φ (φ – угол дифракции), собираются линзой в точке *B* (рис. 3.2).

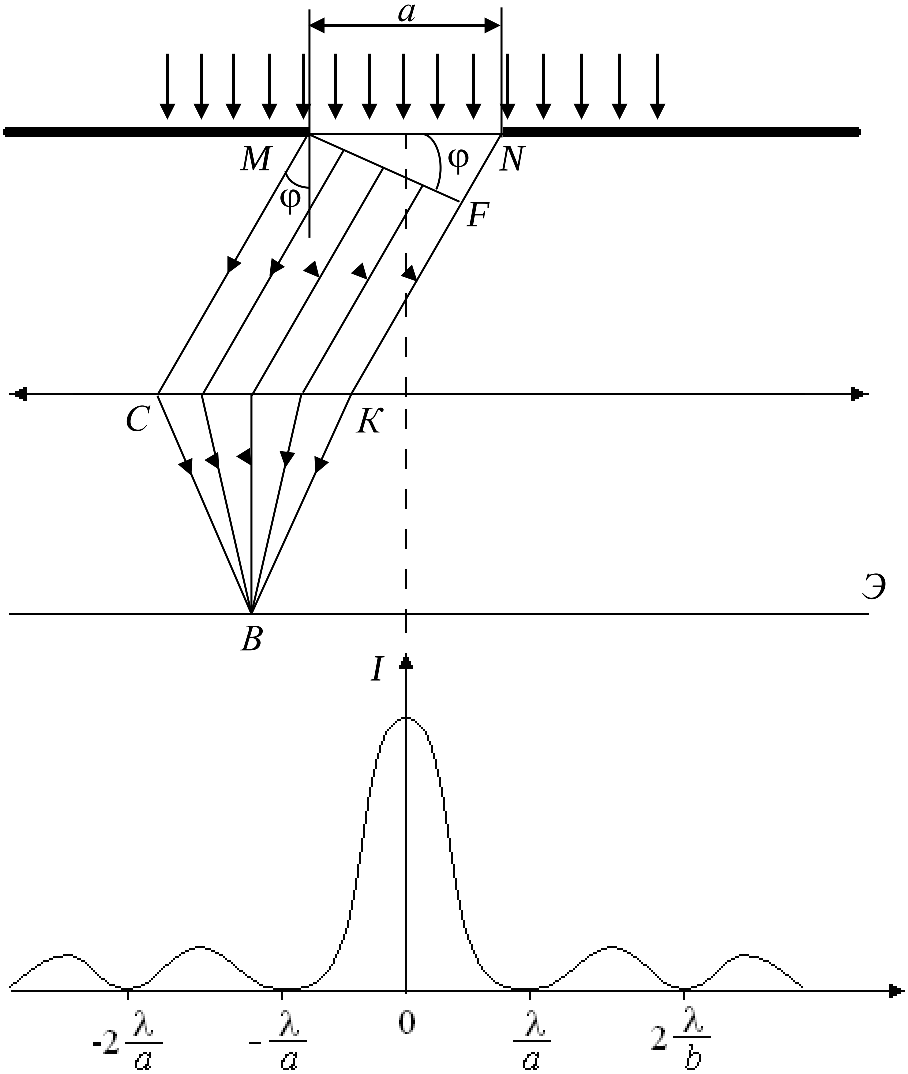


Рис. 3.2

Открытую часть волновой поверхности *MN* разобьем на зоны Френеля, которые имеют вид полос, параллельных ребру *M* и проведенные так, чтобы разность хода от их соответственных точек равнялось $\frac{\lambda}{2}$. Тогда оптическая разность хода между крайними лучами *MC* и *NK*

$$\Delta = NF = a\sin\varphi .$$

Число зон Френеля, умещающихся на ширине щели,

$$\frac{\Delta}{\lambda/2} = \frac{a\sin\varphi}{\lambda/2}.$$

Условие дифракционного максимума в точке *B* (число зон Френеля нечетное)

$$a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (m = 1, 2, 3, ...).$$

Условие дифракционного минимума в точке *B* (число зон Френеля четное)

$$a\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}, \quad (m = 1, 2, 3, ...).$$

Дифракционная решетка – спектральный прибор, состоящий из системы параллельных щелей (штрихов) равной толщины, лежащих в одной плоскости и разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками. Она предназначена для разложения света в спектр и измерения длин волн.

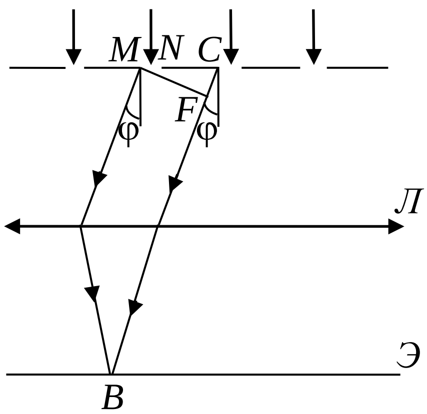


Рис. 3.3

$MN = a$ – ширина щели;

$NC = b$ – расстояние между щелями;

$d = a + b$ – период решетки.

При освещении решетки монохроматическим светом световые волны от всех щелей интерферируют друг с другом, а на экране наблюдается система достаточно узких максимумов.

Если плоская монохроматическая световая волна падает нормально на непрозрачный экран с двумя щелями шириной *a*, то минимумы будут на тех же местах, как и в случае одной щели, так как те направления, в которых ни одна из щелей не пропускала света, не пропускает его и при двух щелях.

Таким образом, условие главных минимумов

$$a\sin\varphi = \pm m\lambda, \quad (m = 1, 2, 3,...).$$

Из-за взаимной интерференции световых лучей от двух щелей, в некоторых направлениях они будут гасить друг друга, т.е. возникнут дополнительные минимумы. Этим направлениям будет соответствовать разность хода лучей $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{3\lambda}{2}$, …, посылаемых от соответственных точек обеих щелей (например, точек M и C).

Условие дополнительных минимумов

$$d\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (m = 0, 1, 2,...).$$

Условие главных максимумов

$$d\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}, \quad (n = 0, 1, 2,...),$$

так как в этих направлениях действия щелей усиливают друг друга.

Между двумя главными максимумами располагается дополнительный минимум, а максимумы становятся более узкими, чем в случае одной щели.

В случае N щелей между двумя главными максимумами располагаются $(N-1)$ дополнительных минимумов, отвечающих условию

$$d\sin\varphi = \pm m'\frac{\lambda}{N}, \quad (m' = 0, N, 2N,...).$$

Имеется также $(N-2)$ дополнительных максимумов, но их интенсивность ничтожна по сравнению с главными максимумами.

Дифракционная решетка является спектральным прибором и характеризуется угловой дисперсией и разрешающей способностью.

Угловая дисперсия D определяет угловую ширину спектра

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi},$$

т.е. угловая дисперсия тем выше, чем больше порядок спектра и чем меньше постоянная решетки.

С увеличением числа щелей решетки главные дифракционные максимумы становятся уже. *Разрешающая способность* дифракционной решетки R характеризует минимальную разность двух монохроматических волн λ_1 и λ_2 равной интенсивности, которые можно видеть в спектре

$$R = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = mN .$$

Разрешающая способность решетки равна произведению количества щелей на порядок спектра.

Примеры решения задач

Задача 3.1. Определите радиус третьей зоны Френеля, если расстояния от точечного источника света (λ = 600 нм) до волновой поверхности и от волновой поверхности до точки наблюдения равны 1,5 м.

Решение

$m = 3$
λ = 600 нм = $6 \cdot 10^{-7}$ м
$a = b$ = 1,5 м
r_m – ?

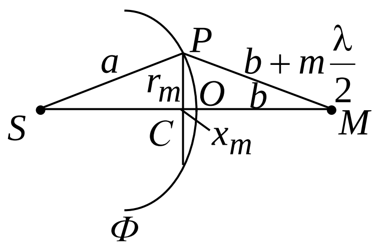


Рис. 3.4

S – точечный источник;
M – точка наблюдения;
Φ – волновая поверхность.
По условию задачи

$$SO = OM = b,$$

$$MP = b + m\frac{\lambda}{2},$$

Радиус границы третьей зоны Френеля

$$CP = r_m$$

$$CO = x_m .$$

Из рис. 3.4 видно, что

$$r_m^2 = a^2 - (a - x_m)^2 = \left(b - m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + x_m)^2 . \qquad (1)$$

Так как $\lambda << a$ и $\lambda << b$, то членом $\left(m^2\lambda^2 / 4\right)$ можно пренебречь, тогда

$$x_m = \frac{mb\lambda}{2(a+b)} . \qquad (2)$$

Из уравнения (1) находим

$$r_m^2 = 2ax_m - x_m^2 .$$

При $x_m << a$

$$r_m^2 = 2ax_m .$$

Подставив (2) в (3) получим

$$r_m = \sqrt{\frac{abm\lambda}{a+b}} = 1{,}16 \text{ мм}.$$

Ответ: 1,16 мм.

Задача 3.2. На щель шириной $a = 0{,}1$ мм падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Экран, на котором наблюдается дифракционная картина, расположен параллельно щели на расстоянии $L = 1{,}1$ м. Определите расстояние b между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны центрального фраунгоферова максимума.

Решение

a = 0,1 мм = $1 \cdot 10^{-4}$ м
λ = 550 нм = $5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м
L = 1,1 м

$b - ?$

Условие дифракционных минимумов от щели

$$a\sin\varphi = \pm m\lambda, \quad (m = 1, 2, ...),$$

где m = 1.

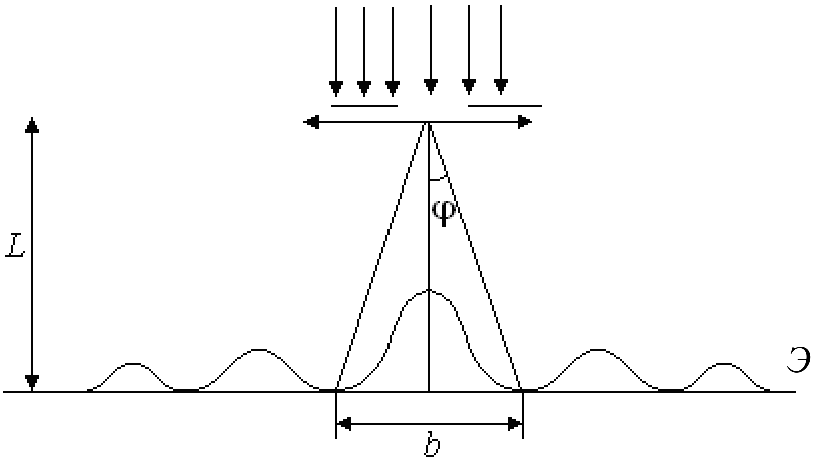


Рис. 3.5

Из рис. 3.5 видно, что

$$b = 2L\mathrm{tg}\varphi, \qquad (1)$$

так как $\frac{b}{2} << L$, то $\mathrm{tg}\varphi \approx \sin\varphi$ и $b = 2L\sin\varphi$, откуда

$$\sin\varphi = \frac{b}{2L}.$$

Подставив в (1), получим

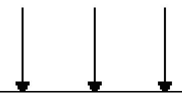
$$b = \frac{2L\lambda}{a} = 1{,}21 \text{ см.}$$

Ответ: 1,21 см.

Задача 3.3. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает монохроматический свет (λ = 550 нм). На экран, находящийся от решетки на расстоянии L = 1 м, с помощью линзы, расположенной вблизи решетки проецируется дифракционная картина, причем первый главный максимум находится на расстоянии l = 10 см от центрального. Определите: 1) период дифракционной решетки, 2) число штрихов на 1 см ее длины, 3) общее число максимумов, даваемое решеткой, 4) угол дифракции, соответствующий последнему максимуму.

Решение

L = 1 м
λ = 550 нм = $5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м



$m = 1$ $l = 10$ см $= 0{,}1$ м $l' = 1$ см $= 0{,}01$ м	Рис. 3.6
$d - ?$ $n - ?$ $N - ?$ $\varphi_{max} - ?$	

Из условия главного максимума находим период дифракционной решетки

$$d \sin\varphi = m\lambda = 5 \text{ мкм}, \qquad (1)$$

где m – порядок спектра ($m = 1$).

Из рис. 3.6 видно, что

$$\text{tg}\varphi = \frac{l}{L},$$

так как $l << L$, то $\text{tg}\varphi \approx \sin\varphi$ и $\frac{ld}{L} = m\lambda$, откуда

$$d = \frac{m\lambda L}{l}.$$

Число штрихов на $l' = 1$ см

$$n = \frac{l'}{d} = 2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}.$$

Наибольший угол отклонения лучей решетки не может быть больше $\pi / 2$, следовательно, из (1):

$$m_{max} \le \frac{d}{\lambda}, \quad (\sin\varphi_{max} = 1).$$

Общее число максимумов

$$N = 2m_{max} + 1 = 19,$$

так как максимумы наблюдаются с обеих сторон центрального максимума, а единица учитывает центральный максимум.

Угол дифракции, соответствующий последнему максимуму, найдем из (1)

$$d\sin\varphi_{\max} = m_{\max}\lambda,$$

откуда $\varphi_{\max} - \arcsin\left(\dfrac{m_{\max}\lambda}{d}\right) = 81{,}9^\circ$.

Ответ: $d = 5$ мкм, $n = 2\cdot10^3$ см$^{-1}$, $N = 19$, $\varphi_{\max} = 81{,}9^\circ$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Дифракционная картина наблюдается на расстоянии $l = 4$ см от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 500$ нм). Посередине между экраном и источником света помещена диафрагма с круглым отверстием. При каком радиусе R отверстия центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным?

Ответ: $R = 10^{-3}$ м.

3.2. На щель падает нормально параллельный пучок монохроматического света. Дифракционная картина проецируется на экран с помощью линзы с фокусным расстоянием $f = 0{,}5$ м. Определите, как надо изменить ширину щели, чтобы центральная полоса занимала весь экран.

Ответ: $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{20}$, т.е. ширину щели надо уменьшить в 20 раз.

3.3. На узкую щель нормально падает монохроматический свет. Его направление на четвертую темную дифракционную полосу составляет $2°12'$. Определите, сколько длин волн укладывается на ширине щели.

Ответ: 104.

3.4. На дифракционную решетку длиной $l = 15$ мм, содержащую $N = 3000$ штрихов, падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Определите: 1) Число максимумов, наблюдаемых в спектре дифракционной решетки; 2) угол, соответствующий последнему максимуму.

Ответ: $n = 18$, $\varphi_{\max} = 81^\circ 54'$.

3.5. На дифракционную решетку с постоянной $d = 5$ мкм под углом $\varphi = 30^\circ$ падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Определите угол α дифракции для главного максимума третьего порядка.

Ответ: $\varphi = 53^\circ 8'$.

3.6. Каков период решетки d, если при нормальном падении на нее лучей с длиной волны $\lambda = 0{,}75$ мкм на экране, отстоящем от решетки на расстоянии $L = 1$ м, максимумы первого порядка отстоят друг от друга на $x = 30{,}3$ см?

Каково число штрихов N на $l = 1$ см решетки? Какое количество m максимумов дает эта дифракционная решетка? Каков максимальный угол φ_{max} отклонения лучей, соответствующих последнему максимуму?

Ответ: $d = 4{,}95 \cdot 10^{-6}$ м, $\dfrac{N}{l} = 2{,}02 \cdot 10^{3}$ см$^{-1}$, $m = 13$, $\varphi_{max} = 65°$.

3.7. Докажите, что разрешающая способность дифракционной решетки не может превысить значения l / λ, где l – длина решетки, λ – длина волны света.

3.8. Определите максимальную способность (для линии с $\lambda = 590$ нм) двух дифракционных решеток, имеющих одинаковую длину $l = 3$ мм, но разные периоды $d_1 = 3$ мкм и $d_2 = 6$ мкм.

Ответ: $R_1 = 5 \cdot 10^3$, $R_2 = 5 \cdot 10^3$.

3.9. На диафрагму с круглым отверстием радиусом $r = 1$ мм падает нормально параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0{,}05$ мкм. На пути лучей, прошедших через отверстие, помещают экран. Определить максимальное расстояние b_{max} от центра отверстия до экрана, при котором в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно.

Ответ: $b_{max} = 1$ м.

3.10. Свет от монохроматического источника ($\lambda = 600$ нм) падает на диафрагму с диаметром отверстия $d = 6$ мм. За диафрагмой на расстоянии $l = 3$ м от нее находится экран. Какое число k зон Френеля укладывается в отверстие диафрагмы? Каким будет центр дифракционной картины на экране: темным или светлым?

Ответ: $k = 5$, центр дифракционной картины будет светлым.

Занятие № 4

Тема: **Распространение света в веществе. Дисперсия и поглощение света**

Краткая теория

Дисперсия света – зависимость фазовой скорости света в среде от его частоты.

Так как $\upsilon = c / n$ (где c – скорость распространения света в вакууме, n – показатель преломления среды), то показатель преломления среды так же зависит от частоты ν (длины волны λ). Следствием дисперсии является разложение в спектр пучка белого света при прохождении его через призму (рис. 4.1).

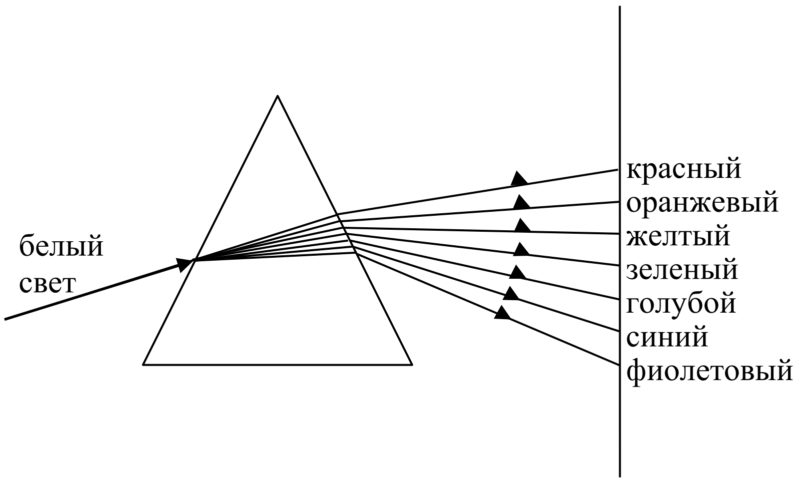


Рис. 4.1

Нормальная дисперсия – когда n увеличивается с уменьшением λ (увеличением ν).

$$\frac{dn}{d\nu} > 0 \left(\frac{dn}{d\lambda} < 0 \right).$$

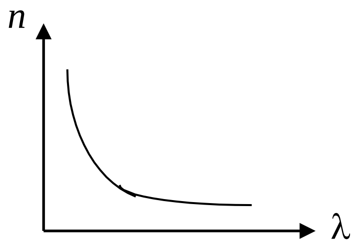


Рис. 4.2

Аномальная дисперсия – когда n уменьшается с уменьшением λ (увеличением ν). Она наблюдается вблизи полос поглощения вещества.

$$\frac{dn}{d\nu} < 0 \left(\frac{dn}{d\lambda} > 0 \right).$$

Количественной характеристикой дисперсии света является физическая величина

$$D_\nu = \frac{dn}{d\nu} \text{ (или } D_\lambda = \frac{dn}{d\lambda}\text{)},$$

называемая *дисперсией показателя преломления* (показывает, как быстро изменяется n с длиной волны λ).

Согласно классической электронной теории *дисперсия света* – результат взаимодействия электромагнитных волн с заряженными частицами вещества, совершающими вынужденные колебания в переменном электромагнитном поле волны.

Показатель преломления зависит от частоты ω внешнего поля

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

где n_0 – концентрация электронов, e – заряд электрона, ε_0 – электрическая постоянная, m – масса электрона, ω_0 – собственная частота колебаний электронов среды (ω_0 = const), ω – частота падающего на вещество света.

Поглощение света – явление уменьшения энергии световой волны при ее распространении в веществе вследствие преобразования энергии волны в другие виды энергии.

Интенсивность света при прохождении однородного вещества уменьшается по экспоненциальному закону. Это:

Закон Бугера-Ламберта

$$I = I_0 e^{-kx},$$

где I_0 и I – интенсивности плоской волны монохроматического света на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной x, k – натуральный показатель поглощения.

Рассеяние света – процесс преобразования света веществом, сопровождающийся изменением направления распространения света и появлением несобственного свечения вещества.

Закон Рэлея: интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна четвертой степени длины волны возбуждающего света.

$$I \sim \frac{1}{\lambda^4}.$$

В результате рассеяния света интенсивность в направлении распространения убывает быстрее, чем в случае одного лишь поглощения. Поэтому

$$I = I_0 - (k - k')x,$$

где коэффициент k' обусловлен рассеянием.

Излучение Вавилова-Черенкова – излучение света заряженными частицами, возникающее при движении в среде с постоянной скоростью V, превышающей фазовую скорость υ света в этой среде, т.е. при условии

$$V > \upsilon = \frac{c}{n},$$

где n – показатель преломления. Наблюдается для всех прозрачных жидкостей, газов и твердых тел.

Излучение распространяется лишь по тем направления, которые составляют острый угол θ с траекторией частицы

$$\cos\theta = \frac{\upsilon}{V} = \frac{c}{nV}.$$

Эффект Доплера в акустике объясняется тем, что частота колебаний, воспринимаемых приемником, определяется скоростями движения источников колебаний и приемника относительно среды, в которой происходит распространение звуковых волн. Эффект Доплера наблюдается так же при движении друг относительно друга источника и приемника электромагнитных волн

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}{1 + (\upsilon / c)\cos\theta},$$

где ν_0 и ν – соответственно частоты световых волн, излучаемых источников и воспринимаемых приемником, υ – скорость источника света относительно приемника, θ – угол между вектором скорости $\vec{\upsilon}$ и направлением наблюдения, c – скорость распространения света в вакууме.

Продольный эффект Доплера наблюдается при движении приемника вдоль линии, соединяющей его с источником ($\theta \neq 0$)

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \upsilon / c}}{\sqrt{1 + \upsilon / c}}.$$

При малых относительных скоростях υ ($\upsilon << c$) пренебрегая членами второго порядка малости

$$\nu = \nu_0 (1 - \upsilon / c).$$

Поперечный эффект Доплера наблюдается при движении приемника перпендикулярно линии, соединяющей его с источником ($\theta = \pi / 2$). Этот эффект является *релятивистским эффектом*. Он связан с замедлением течения времени движущегося наблюдателя и проявляется при скоростях υ, сравнимых со скоростью света c.

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \upsilon^2 / c}\ .$$

Примеры решения задач

Задача 4.1 Показатель преломления воздуха при нормальных условиях ($T_1 = 273{,}15$ К, $p_1 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па) для желтой линии натрия ($\lambda = 589{,}3$ нм) вдали от линий поглощения $n_1 = 1{,}0002918$. Определить показатель преломления n_2 воздуха при температуре $T_2 = 300$ К и давлении $p_2 = 1{,}5$ МПа.

Решение

$\lambda = 589{,}3$ нм $= 589{,}3 \cdot 10^{-9}$ м
$T_1 = 273{,}15$ К
$p_1 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па
$n_1 = 1{,}0002918$
$T_2 = 300$ К
$p_2 = 1{,}5$ МПа $= 1{,}5 \cdot 10^6$ Па

E – ?

Показатель преломления

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (1)$$

Уравнение состояния идеального газа для двух его состояний:

$$p_1 = n_{01} kT, \quad p_2 = n_{02} kT\ ,$$

где k – постоянная Больцмана.

Тогда

$$\frac{n_{01}}{n_{02}} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}. \qquad (2)$$

Согласно уравнению (1)

$$n_1^2 = 1 + \frac{n_{01} e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$$n_2^2 = 1 + \frac{n_{02} e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

откуда, учитывая (2), находим

$$\frac{n_1^2-1}{n_2^2-1}=\frac{n_{01}}{n_{02}}=\frac{p_1T_2}{p_2T_1}. \qquad (3)$$

Решив уравнение (3) относительно n_2, получим

$$n_2=\sqrt{\frac{(n_1^2-1)\,p_2T_1}{p_1T_2}+1}\,,$$

$$n_2=\sqrt{\frac{(1{,}0002918^2-1)\cdot 1{,}5\cdot 10^6\cdot 273{,}15}{1{,}013\cdot 10^5\cdot 300}+1}=1{,}0039270.$$

Ответ: n_2 = 1,0039270.

Задача 4.2. Две пластинки одинаковой толщины, но сделанные из разного материала, пропускают соответственно 1/2 и 1/4 падающего потока световой волны. Пренебрегая отражением света, определите отношение коэффициентов поглощения этих пластинок.

Решение

$I_1=\frac{1}{2}I_0$

$I_2=\frac{1}{4}I_0$

$x_1 = x_2$

$k_2/k_1-?$

Так как толщины обеих пластинок одинаковы ($x_1=x_2=x$), закон Бугера-Ламберта для них

$$I_1=I_0e^{-k_1x},$$

$$I_2=I_0e^{-k_2x}.$$

Поделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{e^{-k_1x}}{e^{-k_2x}},$$

так как $\frac{I_1}{I_2}=\frac{4}{2}$, то произведя элементарные преобразования, получим

$$\frac{k_2}{k_1}=\frac{\ln 4}{\ln 2}=2\,.$$

Ответ: $\frac{k_2}{k_1}=2$.

Задача 4.3. Определить минимальную ускоряющую разность потенциалов U_{min}, которую должен пройти электрон, чтобы в среде с показателем преломления n = 1,5 возникло черенковское излучение.

Решение

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг	
$e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл	
$n = 1{,}5$	
$c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с	
U_{min} – ?	

Направление излучения характеризуются углом θ

$$\cos\theta = \frac{c}{n\upsilon},$$

откуда находим

$$\upsilon = \frac{c}{n\cos\theta}.$$

Скорость минимальна при $\theta = 90^\circ$, т.е. $\cos\theta = 1$.

$$\upsilon_{min} = c/n,$$

$$E_{кин} = |e|U_{min}, \qquad (4)$$

$$E_{кин} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_{min}^2}{c^2}}} - 1\right) = mc^2\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right).$$

Подставив последнее выражение в (4), получим

$$U_{min} = \frac{mc^2}{|e|}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right),$$

$$U_{min} = \frac{9{,}11\cdot10^{-31}\cdot 3^2\cdot10^{16}}{1{,}6\cdot10^{-19}}\left(\frac{1{,}5}{\sqrt{1{,}5^2-1}} - 1\right) = 175 \text{ кВ}.$$

Ответ: 175 кВ.

Задачи для самостоятельного решения

4.11. Выведите зависимость угла φ отклонения узкого монохроматического пучка света призмой с показателем преломления n и малым преломляющим углом A.

Ответ: $\varphi = A(n-1)$.

4.12. Показатель преломления вещества для малого интервала длин волн вдали от линий поглощения определяется формулой Коши: $n = A + B/\lambda^2$, где A и B – эмпирические константы. Определить: 1) фазовую скорость, 2) групповую скорость.

Ответ: 1) $\upsilon = \dfrac{c\lambda^2}{A\lambda^2 + B}$, 2) $u = \dfrac{c\lambda^2(A\lambda^2 - B)}{(A\lambda^2 + B)^2}$.

4.13. Луч света выходит из стеклянной призмы под тем же углом, что и входит в нее. Определить угол отклонения φ луча призмой, если ее преломляющий угол A = 60°. Показатель преломления стекла n = 1,5.

Ответ: $\varphi = 37°11'$.

4.14. При прохождении в некотором веществе пути x интенсивность света уменьшилась в 3 раза. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении пути $2x$.

Ответ: $\dfrac{I_0}{I_2} = 9$.

4.15. При какой скорости красный свет (690 нм) будет казаться зеленым (530 нм)?

Ответ: 77,4 мм/с.

4.16. Определить скорость электронов, при которой черенковское излучение происходит в среде с n = 1,54 под углом θ = 30° к направлению их движения. Скорость выразить в долях скорости света.

Ответ: 0,75c.

4.17. Источник монохроматического света с длиной волны λ_0 = 0,5 мкм движется по направлению к наблюдателю со скоростью 0,15c (c – скорость света в вакууме). Определить длину волны, которую зарегистрирует приемник наблюдателя.

Ответ: λ = 430 нм.

4.18. Определить кинетическую энергию протонов, которые в среде с показателем преломления n = 1,6 излучают свет под углом θ = 20° к направлению своего движения.

Ответ: 0,319 ГэВ.

4.19. Определить доплеровское смещение $\Delta\lambda$ для спектральной линии атомарного водорода (λ= 486,1 нм), если ее наблюдать под прямым углом к пучку атомов водорода с кинетической энергией $E_{кин}$ = 100 кэВ.

Ответ: $\Delta\lambda$ = 51,7 нм.

4.20. Плоская монохроматическая световая волна распространяется в некоторой среде. Коэффициент поглощения для данной длины волны a = 1,2 м$^{-1}$. Определить, на сколько процентов уменьшится интенсивность света при прохождении данной волной пути: 1) 10 мм, 2) 1 м.

Ответ: 1) 1,2 %, 2) 70 %.

Занятие № 5

Тема: **Поляризация света**

Краткая теория

Естественный свет – это свет со всевозможными равновероятными направлениями колебаний вектора $\vec{E}$ (и следовательно, $\vec{H}$).

Поляризованный свет – это свет, в котором направления колебаний светового вектора $\vec{E}$ каким-то образом упорядочены.

Плоскополяризованный свет – свет, в котором вектор $\vec{E}$ (и $\vec{H}$) колеблется только в одном направлении, перпендикулярном лучу.

Плоскополяризованный свет получают, пропуская естественный свет через поляризаторы, в качестве которых используются среды, анизотропные в отношении колебаний вектора $\vec{E}$ (например, кристаллы турмалина). Поляризаторы можно использовать и для анализа поляризованного света, тогда их называют *анализаторами*.

Поляризаторы (анализаторы) пропускают колебания, параллельные его главной плоскости и полностью или частично задерживают колебания, перпендикулярные ей.

Если поляризатор и анализатор ориентированы произвольно, то интенсивность последовательно прошедшего через них света будет зависеть от угла α между главными плоскостями анализатора (A) и поляризатора (P).

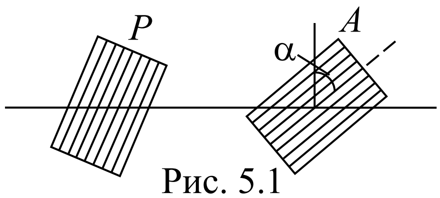


Рис. 5.1

Закон Малюса: интенсивность света, прошедшего последовательно через поляризатор и анализатор, пропорциональна квадрату косинуса угла между их главными плоскостями.

$$I = I_0 \cos^2 \alpha .$$

где I_0 – интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор, I – интенсивность плоскополяризованного света, вышедшего из анализатора.

В случае падения на поляризатор естественного света с интенсивностью I, на выходе получится плоскополяризованный свет с интенсивностью

$$I_0 = \frac{1}{2} I .$$

Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}},$$

где I_{max} и I_{min} – соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

Явление поляризации света – это выделение световых волн с определенными направлениями колебаний электрического (светового) вектора $\vec{E}$. Наблюдается при отражении и преломлении света на границе прозрачных изотропных диэлектриков. Если угол падения света на границу раздела отличен от нуля, то отраженный и преломленный лучи частично поляризованы. В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные плоскости падения (точки на рис. 5.1), а в преломленном луче преобладают колебания, параллельные плоскости падения (стрелки на рис. 5.1). Степень поляризации зависит от угла падения.

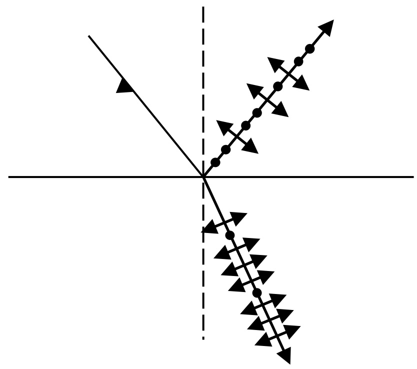


Рис. 5.2

Закон Брюстера. При угле падения естественного света на границу прозрачных изотропных диэлектриков, равном углу Брюстера i_B, определяемого соотношением $\mathrm{tg}\, i_B = n_{21}$, отраженный луч полностью поляризован, преломленный же луч поляризован максимально, но не полностью.

При падении естественного света под углом Брюстера i_B отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны

$$\mathrm{tg}\, i_B = \frac{\sin i_B}{\cos i_B}, \quad n_{21} = \frac{\sin i_B}{\sin i_2}, \quad \cos i_B = \sin i_2,$$

Следовательно

$$i_B + i_2 = \frac{\pi}{2}, \text{ но } i'_B = i_B \text{ (закон отражения)},$$

поэтому

$$i'_B + i_2 = \frac{\pi}{2},$$

где n_{21} – показатель преломления второй среды относительно первой, i_2 – угол преломления.

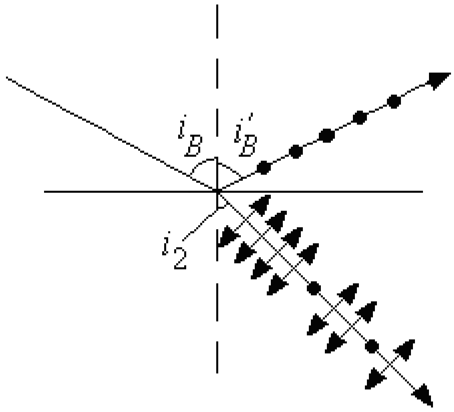


Рис. 5.3

Формула Френеля. При отражении естественного света от диэлектрического зеркала интенсивности световых колебаний в отраженном луче, совершающихся в направлениях, перпендикулярном к плоскости падения света $I_{\perp}$ и параллельном плоскости падения света $I_{\parallel}$ соответственно равны

$$I_{\perp} = 0{,}5\, I_0 \left(\frac{\sin(i-\beta)}{\sin(i+\beta)} \right)^2,$$

$$I_{\parallel} = 0{,}5\, I_0 \left(\frac{\mathrm{tg}(i-\beta)}{\mathrm{tg}(i+\beta)} \right)^2,$$

где I_0 – интенсивность падающего естественного света, i – угол падения света, β – угол преломления света.

Поляризация при двойном лучепреломлении. *Двойное лучепреломление* – способность анизотропных веществ расщеплять падающий световой луч на два луча, распространяющихся в разных направлениях с различной фазовой скоростью и поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. При падении узкого светового пучка на достаточно толстый кристалл из него выходят два пространственно разделенных луча, параллельных друг другу, – обыкновенный (*о*) и необыкновенный (*е*) (рис. 5.4).

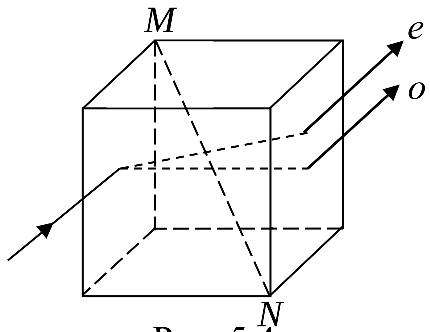


Рис. 5.4

На рис. 5.4 MN – *оптическая ось кристалла* (направление в оптически анизотропном кристалле, по которому распространяется луч света, не испытывая двойного лучепреломления).

Скорости распространения обыкновенного и необыкновенного лучей в двоякопреломляющем кристалле соответственно равны

$$\upsilon_o = \frac{c}{n_o},\ \upsilon_e = \frac{c}{n_e}.$$

Пластинка в четверть или в полволны – одноосного, двоякопреломляющего кристалла, вырезанная параллельно оптической оси, создает сдвиг по фазе между обыкновенным и необыкновенным лучами, проходящими перпендикулярно пластинке, на $\pm\pi/4$ или на $\pm\pi/2$ соответственно.

Толщина d таких пластинок удовлетворяет условию:

$$d = \left[\left(m \pm \frac{1}{4}\right)\lambda_0\right]\left(\left|n_o - n_e\right|\right)$$

или

$$d = \left[\left(m \pm \frac{1}{2}\right)\lambda_0\right]\left(\left|n_o - n_e\right|\right),$$

где m = 0, 1, 2...; λ_0 – длина световой волны в вакууме.

Угол поворота φ плоскости поляризации монохроматического света при прохождении через оптически активное вещество:

а) для твердых тел $\varphi = \varphi_0 l$;

б) для чистых жидкостей $\varphi = \varphi_0 l \rho$;

в) для растворов $\varphi = \varphi_0 l C$, где φ_0 – удельное вращение, l – толщина оптически активного вещества, ρ – плотность жидкости, C – концентрация оптически активного вещества в растворе.

Примеры решения задач

Задача 5.1. Определите во сколько раз ослабится интенсивность света, прошедшего через поляризатор и анализатор, расположенный так, что угол между их главными плоскостями $\alpha = 30^\circ$ и в каждом из них теряется 8 % падающего света.

Решение

$\alpha = 30^\circ$
$k = 0{,}08$

$I_0 / I_2 - ?$

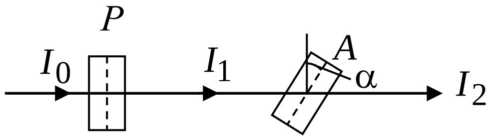


Рис. 5.2

Естественный свет, проходя через поляризатор P превращается в плоскополяризованный и его интенсивность на выходе из поляризатора (с учетом потери интенсивности)

$$I_1 = \frac{1}{2}(1-k)I_0. \qquad (1)$$

По закону Малюса интенсивность света на выходе из анализатора в данном случае

$$I_2 = I_1(1-k)\cos^2\alpha.$$

Подставив в данное выражение (1), получим

$$I_2 = \frac{1}{2}(1-k)^2\cos^2\alpha I_0.$$

Тогда искомое ослабление интенсивности при прохождении света через поляризатор и анализатор

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\alpha} \approx 3.$$

Ответ: в 3 раза.

Задача 5.2. Найти угол i_B полной поляризации при отражении света от стекла (n = 1,57).

Решение

$n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}57$	При отражении света от диэлектрика с относительным показателем преломления $n_{21} = \dfrac{n_2}{n_1}$
$i_B - ?$	

получается световая волна, полностью поляризованная в плоскости падения (электрический вектор колеблется в направлении, перпендикулярном плоскости падения), если угол падения i удовлетворяет условию (закон Брюстера):

$$\mathrm{tg}(i_B) = n_{21},$$

$$i_B = \mathrm{arctg}(n_{21}) = \mathrm{arctg}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 57^\circ.$$

Ответ: 57°.

Задача 5.3. Пучок плоскополяризованного света (λ = 589 нм) падает на пластинку исландского шпата перпендикулярно к его оптической оси. Найти длины волн λ_o и λ_e обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле, если показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей равны $n_o = 1{,}66$ и $n_e = 1{,}49$.

Решение

$\lambda = 589$ нм $= 589 \cdot 10^{-6}$ м $n_o = 1{,}66$ $n_e = 1{,}49$	Скорости распространения обыкновенного и необыкновенного лучей в двоякопреломляющем кристалле соответственно будут равны
$\lambda_o, \lambda_e - ?$	

$$\upsilon_o = \frac{c}{n_o} \text{ и } \upsilon_e = \frac{c}{n_e}.$$

Длины волн соответственно равны

$$\lambda_o = \upsilon_o T = \upsilon_o \frac{\lambda}{c} = \frac{\lambda}{n_o} = 355 \text{ нм},$$

$$\lambda_e = \frac{\lambda}{n_e} = 395 \text{ нм.}$$

Ответ: $\lambda_o = 355$ нм, $\lambda_e = 395$ нм.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора равен 45°. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, выходящего из анализатора, если угол увеличить до 60°?

Ответ: в 2 раза

5.2. При прохождении света через слой 5 %-го сахарного раствора толщиной 15 см плоскость поляризации света повернулась на угол 6,5°. На сколько повернется плоскость поляризации в 13 %-ом растворе с толщиной слоя в 12 см?

Ответ: на 13,5°.

5.3. Луч света последовательно проходит через три николя (николь – призма, используемая в качестве поляризатора, в котором используется явление двойного лучепреломления), плоскости пропускания которых образуют между собой углы $\alpha_{12} = 45^\circ$ и $\alpha_{23} = 30^\circ$. Полагая, что коэффициент поглощения каждого николя k = 0,15, найти, во сколько раз луч, выходящий из третьего николя, ослаблен по сравнению с лучом, падающим на первый николь.

Ответ: в 8,3 раза.

5.4. Луч света проходит через жидкость, налитую в стеклянный сосуд, отражается от дна. Отраженный луч полностью поляризован при падении его на дно сосуда под углом $i_B = 42°37'$. Найти показатель преломления n жидкости. Под каким углом i должен падать на дно сосуда луч света, идущий в этой жидкости, чтобы наступило полное внутреннее отражение?

Ответ: n = 1,63, i = 66,9°.

5.5. Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный от пластины пучок света составляет угол $\varphi = 97^\circ$ с падающим пучком. Определить показатель преломления n_1 жидкости, если отраженный свет полностью поляризован. Какая это жидкость?

Ответ: n = 1,33, жидкость – вода.

5.6. Определить степень поляризации частично поляризованного света, если амплитуда светового вектора, соответствующая максимальной интенсивности света, в 3 раза больше амплитуды, соответствующей его минимальной интенсивности.

Ответ: $P = 0{,}8$.

5.7. Естественный свет интенсивностью I_0 проходит через поляризатор и анализатор, угол между главными плоскостями которых составляет α. После прохождения света через эту систему он падает на зеркало и, отразившись, проходит вновь через нее. Пренебрегая поглощением света, определить интенсивность I света после его обратного прохождения.

Ответ: $I = \frac{1}{2} I_0 \cos^4 \alpha$.

5.8. Пластинка кварца толщиной d_1 = 2 мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации

монохроматического света определенной длины волны на угол $\varphi_1 = 30°$. Определить толщину d_2 кварцевой пластинки, помещенной между параллельными николями, чтобы данный монохроматический свет гасился полностью.

Ответ: d_2 = 6 мм.

5.9. Определить наименьшую толщины кристаллической пластинки в четверть волны для $\lambda = 530$ нм, если разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей для данной длины волны $n_e - n_o = 0{,}01$.

Ответ: d = 13,3 м.

5.10. Определить массовую концентрацию C сахарного раствора, если при прохождении света через трубку длиной $l = 20$ см с этим раствором плоскость поляризации света поворачивается на угол $\varphi = 10°$. Удельное вращение φ_0 сахара равно $1{,}17 \cdot 10^{-2}$ рад · м^2/кг.

Ответ: C = 74,8 кг/м^3.

Занятие № 7

Тема: **Тепловое излучение**

Краткая теория

Электромагнитное излучение, испускаемое веществом и возникающее за счет его внутренней энергии, называется *тепловым излучением*. Тепловое излучение – это путь самопроизвольной передачи энергии в форме теплоты от более нагретого тела к менее нагретому. При этом происходит излучение или поглощение электромагнитных волн телами, участвующими в процессе передачи энергии.

Энергетической светимостью тела называется физическая величина $R_э$, численно равная энергии электромагнитных волн, излучаемых за единицу времени с единицы площади поверхности тела.

Излучательная способность тела (или спектральная плотность энергетической светимости) определяется, как

$$r_\nu = \frac{dW_{\text{изл}}}{d\nu} \text{ или } r_\lambda = \frac{dW_{\text{изл}}}{d\lambda};\ r_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} r_\nu,$$

где $dW_{\text{изл}}$ – энергия электромагнитного излучения, испускаемого за единицу времени с единицы площади поверхности тела в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ (или длин волн в вакууме от λ до $\lambda + d\lambda$).

Энергетическая светимость тела связана с r_ν и r_λ следующим соотношением:

$$R_э = \int_0^\infty r_\nu d\nu = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda.$$

Поглощательная способность тела выражается так:

$$a_\nu = \frac{dW_{\text{погл}}}{dW}.$$

a_ν показывает, какая часть энергии dW падающего в единицу времени на единицу поверхности тела электромагнитного излучения с частотами от ν до $\nu + d\nu$ поглощается телом.

Абсолютно черным телом называется тело, которое полностью поглощает все падающее на него излучение независимо от направления падающего излучения, его спектрального состава и поляризации.

Серым телом называется тело, поглощающая способность которого меньше единицы и не зависит от частоты (длины волны) света, направления его распространения и поляризации

$$a_\nu^{\text{сер}} = a^{\text{сер}}.$$

Закон Кирхгофа утверждает, что отношение излучательной способности тела к его поглощательной способности не зависит от материала тела и равно излучательной способности абсолютно черного тела, которая является функцией только температуры и частоты, т.е.

$$\frac{r_\nu}{a_\nu} = r_\nu^\circ,$$

где r_ν° – излучательная способность абсолютно черного тела.

Закон Стефана-Больцмана определяет зависимость энергетической светимости абсолютно черного тела от его термодинамической температуры

$$R_э^\circ = \sigma T^4,$$

где σ – постоянная Стефана-Больцмана ($\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 · К^4)), T – термодинамическая температура излучающего тела.

Для несерого тела

$$R_э = \alpha R_э^\circ,$$

где α – интегральная степень черноты тела, которая зависит от материала тела, состояния его поверхности и температуры. Для всех тел, кроме абсолютно черного, $\alpha < 1$.

Энергия излучения абсолютно черного тела распределяется неравномерно по его спектру. Тело почти не излучает в области очень малых и очень больших частот. При повышении температуры максимум r_λ° смещается в сторону меньших длин волн (бóльших частот) в соответствии с *первым законом Вина – законом смещения*:

$$\lambda_m = \frac{b_1}{T},$$

где $b_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м · К – постоянная Вина.

Второй закон Вина – максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела возрастает пропорционально пятой степени температуры:

$$r_{\lambda\,\max}^\circ = b_2 \cdot T^5,$$

где $b_2 = 1{,}29 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м^3 · К^5).

Примеры решения задач

Задача 6.1. Какую энергетическую светимость $R_э$ имеет затвердевающий свинец? Отношение энергетических светимостей свинца и абсолютно черного тела для данной температуры (T = 600 К) $\alpha = 0{,}6$.

Решение

$\alpha = 0{,}6$ $T = 600$ К	Для серого тела
$R_э - ?$	

$$R_э = \alpha R_э^\circ \qquad (1)$$

где $R_э^\circ$ – энергетическая светимость абсолютно черного тела.

По закону Стефана-Больцмана:

$$R_э^\circ = \sigma T^4. \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2)

$$R_э = \alpha\sigma T^4 = 0{,}6 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 600^4 = 4{,}6 \text{ кВт/м}^2.$$

Ответ: $R_э = 4{,}6$ кВт/м^2.

Задача 6.2. Какую энергетическую светимость $R_э^\circ$ имеет абсолютно черное тело, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda_m = 484$ нм?

Решение

λ_m = 484 нм $b_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м · К	Энергетическая светимость $R_э^\circ$ абсолютно черного тела определяется в зависимости от его термодинамической температуры T по закону Стефана-Больцмана:
$R_э^\circ - ?$	

$$R_э^\circ = \sigma T^4. \qquad (1)$$

Из закона смещения Вина:

$$T = \frac{b_1}{\lambda_m}. \qquad (2)$$

Совместное решение выражений (1) и (2) дает:

$$R_э^\circ = \sigma\left(\frac{b_1}{\lambda_m}\right)^4 = 5{,}67\cdot 10^{-8}\cdot\left(\frac{2{,}9\cdot 10^{-3}}{484\cdot 10^{-9}}\right)^4 = 73{,}5\ \text{МВт/м}^2.$$

Ответ: $R_э^\circ = 73{,}5$ МВт/м^2.

Задача 6.3. Температура внутренней поверхности муфельной печи при открытом отверстии площадью 30 см^2 равна 1,3 кК. Принимая, что отверстие печи излучает, как черное тело, определить, какая часть мощности рассеивается стенками, если потребляемая печью мощность составляет 1,5 кВт.

Решение

Мощность излучения муфельной печи через отверстие площадью S равна:

$$P_{\text{изл}} = R_э^\circ \cdot S\,. \qquad (1)$$

По закону Стефана-Больцмана

$$R_э^\circ = \sigma T^4\,. \qquad (2)$$

Рассеиваемая мощность определится, как разность:

$$P_{\text{расс}} = P - P_{\text{изл}}\,. \qquad (3)$$

Искомая величина будет получена из (3) с учетом (1) и (2):

$$\frac{P_{\text{расс}}}{P} = 1 - \frac{P_{\text{изл}}}{P} = 1 - \frac{\sigma T^4 S}{P} = 1 - \frac{5{,}67\cdot 10^{-8}\cdot 1300^4\cdot 3\cdot 10^{-3}}{1500} = 0{,}676\,.$$

Ответ: $\dfrac{P_{\text{расс}}}{P} = 0{,}676\,.$

Задача 6.4. Диаметр спирали в электрической лампочке $d = 0{,}3$ мм, длина спирали $l = 5$ см. При включении лампочки в сеть напряжением $U = 127$ В через лампочку течет ток $I = 0{,}31$ А. Найти температуру спирали. Считать, что при установившемся равновесии все выделяющееся в нити тепло теряется в результате излучения. Отношение энергетической светимости вольфрама и абсолютно черного тела для данной температуры $\alpha = 0{,}31$.

Решение

d = 0,3 мм l = 5 см U = 127 В I = 0,31 А α = 0,31	Мощность теплового излучения спирали определяется, как
T – ?	

$$P_{\text{изл}} = \alpha \cdot R_{\text{э}}^{\circ} \cdot S, \qquad (1)$$

где $R_{\text{э}}^{\circ}$ – энергетическая светимость черного тела, S – площадь излучающей поверхности спирали:

$$S = \pi d l. \qquad (2)$$

По закону Стефана-Больцмана:

$$R_{\text{э}}^{\circ} = \sigma T^4. \qquad (3)$$

Из условия задачи вся мощность излучения равна:

$$P_{\text{изл}} = I \cdot U. \qquad (4)$$

Объединив выражения (1) ÷ (4), получим:

$$IU = \alpha\sigma T^4 \pi d l,$$

откуда

$$T = \sqrt[4]{\frac{IU}{\alpha\sigma\pi d l}} = \sqrt{\frac{0{,}31 \cdot 127}{0{,}31 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}} = 2600 \text{ К}.$$

Ответ: T = 2600 К.

Задача 6.5. Внутри солнечной системы на таком же расстоянии R от Солнца, как и Земля, находится частица сферической формы, обладающая свойствами серого тела. Принимая, что Солнце излучает, как абсолютно черное тело с температурой $T_с$ = 6000 К, определить температуру Т частицы, считая, что она одинакова во всех точках частицы.

Решение

$R = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ м $R_c = 6{,}95 \cdot 10^{8}$ м T_c = 6000 К	Мощность излучения Солнца равна:
T – ?	

$$P_{\text{изл}_\text{с}} = \sigma T_\text{с}^4 \cdot S_\text{с}, \qquad (1)$$

где $S_{с} = 4\pi R_{с}^{2}$ – площадь излучающей поверхности Солнца.

Мощность излучения, которое дойдет до единицы поверхности сферы радиуса *R*, окружающей Солнце

$$P_{изл} = \frac{P_{изл_{с}}}{S}, \qquad (2)$$

где $S = 4\pi R^{2}$.

Совместное рассмотрение (1) и (2) дает:

$$P_{изл} = \sigma T_{с}^{4} \frac{R_{с}^{2}}{R^{2}}, \qquad (3)$$

Мощность излучения Солнца, поглощаемая частицей:

$$P_{1} = a\frac{\pi d^{2}}{4} P_{изл} = a\frac{\pi d^{2}}{4} \sigma T_{с}^{4} \frac{R_{с}^{2}}{R^{2}}. \qquad (4)$$

Мощность излучения частицы по всем направлениям равна:

$$P_{2} = a\pi d^{2} \sigma T^{4}, \qquad (5)$$

где πd^{2} – площадь излучающей поверхности частицы.

При термодинамическом равновесии $P_{1} = P_{2}$, тогда из (4) и (5) получим

$$T = T_{с}\sqrt{\frac{R_{с}}{2R}} = 6000\sqrt{\frac{6{,}95 \cdot 10^{8}}{2 \cdot 1{,}49 \cdot 10^{11}}} = 290 \text{ К}.$$

Ответ: $T = 290$ К.

Задача 6.6. В результате нагревания черного тела длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, сместилась с $\lambda_{1m} = 2{,}7$ мкм до $\lambda_{2m} = 0{,}9$ мкм. Определить, во сколько раз увеличились энергетическая светимость тела $R_{э}^{\circ}$ и максимальная плотность энергетической светимости $r_{\lambda\,\max}^{\circ}$.

Решение

$\lambda_{1m} = 2{,}7$ мкм $\lambda_{2m} = 0{,}9$ мкм	По закону Стефана-Больцмана:

$\dfrac{R^{\circ}_{э_2}}{R^{\circ}_{э_1}}$ - ? $\dfrac{r^{\circ}_{\lambda\,\max_2}}{r^{\circ}_{\lambda\,\max_1}}$ - ?	$$R^{\circ}_{э} = \sigma T^4. \qquad (1)$$ По закону смещения Вина:

$$\lambda_m = \frac{b_1}{T}, \qquad (2)$$

Учитывая (1) и (2), получим

$$\frac{R^{\circ}_{э_2}}{R^{\circ}_{э_1}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \left(\frac{\lambda_{1m}}{\lambda_{2m}}\right)^4 = \left(\frac{2{,}7\cdot 10^{-6}}{0{,}9\cdot 10^{-6}}\right)^4 = 81.$$

Второй закон Вина утверждает, что

$$r^{\circ}_{\lambda\,\max} = b_2 T^5. \qquad (3)$$

Следовательно,

$$\frac{r^{\circ}_{\lambda\,\max_2}}{r^{\circ}_{\lambda\,\max_1}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^5 = \left(\frac{\lambda_{1m}}{\lambda_{2m}}\right)^5 = \left(\frac{2{,}7\cdot 10^{-6}}{0{,}9\cdot 10^{-6}}\right)^5 = 243.$$

Ответ: $\dfrac{R^{\circ}_{э_2}}{R^{\circ}_{э_1}} = 81$, $\dfrac{r^{\circ}_{\lambda\,\max_2}}{r^{\circ}_{\lambda\,\max_1}} = 243$.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Найти температуру T печи, если известно, что излучение из отверстия в ней площадью $S = 6{,}1$ см^2 имеет мощность $P = 34{,}6$ Вт. Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Ответ: $T = 1000$ К.

6.2. Какую мощность излучения Р имеет Солнце? Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела. Температура поверхности Солнца $T = 5800$ К.

Ответ: $P = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт.

6.3. Какую энергетическую светимость $R_э$ имеет затвердевающий свинец? Отношение энергетических светимостей свинца и абсолютно черного тела для данной температуры $\alpha = 0{,}6$.

Ответ: $R_э$ = 4,6 кВт/м^2.

6.4. Мощность излучения абсолютно черного тела P = 34 кВт. Найти температуру Т этого тела, если известно, что его поверхность S = 0,6 м^2.

Ответ: T = 1000 К.

6.5. Мощность излучения раскаленной металлической поверхности P_1 = 0,67 кВт. Температура поверхности T = 2500 К, ее площадь S = 10 см^2. Какую мощность излучения P имела бы эта поверхность, если бы она была абсолютно черной? Найти отношение α энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре.

Ответ: P = 2,22 кВт, α = 0,3.

6.6. Диаметр вольфрамовой спирали в электрической лампочке d = 0,3 мм, длина спирали l = 5 см. При включении лампочки в сеть напряжением U = 127 В через лампочку течет ток I = 0,31 А. Найти температуру T спирали. Считать, что по установлении равновесия все выделяющееся в нити тепло теряется в результате излучения. Отношение энергетических светимостей вольфрама и абсолютно черного тела для данной температуры α = 0,31.

Ответ: T = 2500 К.

6.7. Температура вольфрамовой спирали в 25-ваттной электрической лампочке T = 2450 К. Отношение ее энергетической светимости к энергетической светимости абсолютно черного тела при данной температуре α = 0,3. Найти площадь S излучающей поверхности спирали.

Ответ: S = 0,4 см^2.

6.8. Вольфрамовая нить накаливается в вакууме током I = 1 А до температуры 1000 К. При какой силе тока нить накалится до температуры 3000 К? При расчете пренебречь потерями энергии вследствие теплопроводности подвесов нити и обратным излучением окружающих тел.

Ответ: I_1 = 8 А.

6.9. Вольфрамовая нить диаметром 0,1 мм соединена последовательно с другой вольфрамовой нитью. Нити накаливаются в вакууме током, причем первая нить имеет температуру 2000 К, а вторая – 3000 К. Каков диаметр второй нити?

Ответ: d = 0,063 мм.

6.10. Найти солнечную постоянную K, т.е. количество лучистой энергии, посылаемой Солнцем в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к солнечным лучам и находящуюся на таком же расстоянии от него, как и Земля. Температура поверхности Солнца T = 5800 К. Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Ответ: K = 1,37 кВт/м^2.

6.11. Считая, что атмосфера поглощает 10 % лучистой энергии, посылаемой Солнцем, найти мощность излучения P, получаемую от Солнца горизонтальным участком Земли площадью S = 0,5 га. Высота Солнца над горизонтом $\varphi = 30°$. Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Ответ: P = 3,1 МВт.

6.12. Температура поверхности Солнца 6000 К, отношение диаметра земной орбиты к диаметру Солнца составляет $2{,}14 \cdot 10^2$. Считая, что Земля одинаково излучает по всем направлениям, вычислите ее среднюю температуру.

Ответ: T = 290 К.

6.13. Какую мощность излучения P имеет Солнце? Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела. Температура поверхности Солнца T = 5800 К.

Ответ: $P = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт.

6.14. Какую энергетическую светимость $R_э^\circ$ имеет абсолютно черное тело, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны λ_m = 484 нм?

Ответ: $R_э^\circ$= 73,5 МВт/м^2.

6.15. Длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения абсолютно черного тела, $\lambda_m = 700$ нм. Определить температуру тела, а также максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости $r_{\lambda\,\max}^\circ$ для этой длины волны.

Ответ: T = 4140 К, $r_{\lambda\,\max}^\circ = 1{,}57 \cdot 10^{12}$ Вт/м^2.

6.16. Определить площадь излучающей поверхности абсолютно черного тела, если поток излучения приходится на длину волны $\lambda_m = 500$ нм.

Ответ: $S = 1{,}56 \cdot 10^{-4}$ м^2.

6.17. Мощность излучения абсолютно черного тела P = 10 кВт. Найти площадь S излучающей поверхности тела, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda_m = 700$ нм.

Ответ: S = 6 см^2.

6.18. Зачерненный шарик остывает от температуры T_1 = 300 К до T_2 = 293 К. На сколько изменилась длина волны λ_m, соответствующая максимуму спектральной плотности его энергетической светимости?

Ответ: $\Delta\lambda_m$ = 0,24 мкм.

6.19. При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в два раза длина волны λ_m, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости $r^{\circ}_{\lambda\ \max}$, уменьшилась на $\Delta\lambda_m$ = 400 нм. Определить начальную и конечную температуры T_1 и T_2.

Ответ: T_1 = 3625 К, T_2 = 7250 К.

6.20. Поверхность тела нагрета до температуры T = 1000 К. Затем одна половина этой поверхности нагревается на $\Delta T_1 = 100$ К, другая охлаждается на $\Delta T_2 = 100$ К. Во сколько раз изменится энергетическая светимость $R_э$ поверхности этого тела?

Ответ: Увеличится в 1,06 раз.

Занятие № 8

Тема: **Фотоны. Фотоэффект**

Краткая теория

Свет представляет собой сложное явление, сочетающее в себе свойства электромагнитной волны и потока частиц. Световая частица называется фотоном. Фотон несет квант энергии, определяемый как $\varepsilon_{\phi} = h\nu = h \cdot \dfrac{c}{\lambda}$,

где ν – частота света, c – скорость света в вакууме, h – постоянная Планка (h = 6,63 · 10^{-34} Дж · с), $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, λ – длина волны, $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота.

Фотон – это частица, которая всегда и в любой среде движется со скоростью света c и имеет массу покоя, равную нулю. Масса фотона определяется из соотношения $\varepsilon_0 = m_{\text{ф}} \cdot c^2$, т.е.

$$m_{\text{ф}} = \frac{\varepsilon_0}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}.$$

Фотон обладает импульсом, определяемым как

$$p_{\text{ф}} = m_{\text{ф}} \cdot c = \frac{h}{\lambda} = \hbar k = \frac{\varepsilon_0}{c}.$$

где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

Фотон летит в направлении распространения электромагнитной волны, поэтому направления вектора $\vec{p}_{ф}$ и волнового вектора $\vec{k}$ совпадают, т.е.

$$\vec{p}_{ф} = \hbar\vec{k}\,.$$

Внешним фотоэффектом называется явление испускания электронов твердыми и жидкими телами под действием света. Закономерности фотоэффекта объясняются тем, что свет излучается и поглощается квантами. Часть кванта энергии $h\nu$, воспринимаемого электроном вещества, затрачивается на то, чтобы электрон мог покинуть тело. Эта часть энергии называется работой выхода $A_{вых}$, величина которой зависит от состава вещества.

Остаток энергии образует кинетическую энергию $E_{к}$ электрона, покинувшего вещество.

Эти соотношения описывает *уравнение Эйнштейна*

$$h\nu = A_{вых} + E_{к}\,,$$

где $h\nu$ – энергия фотона, падающего на поверхность вещества, $A_{вых}$ – работа выхода электрона фотоэлектрона, $E_{к} = \dfrac{m_e\upsilon^2}{2}$ – кинетическая энергия фотоэлектрона.

Из уравнения Эйнштейна следует, что если работа выхода превышает энергию фотона, электроны не смогут покинуть вещество. Следовательно, для возникновения фотоэффекта необходимо выполнение условия $h\nu \geq A_{вых}$ или

$$\nu \geq \nu_0 = \frac{A_{вых}}{h}\,.$$

Соответственно, для длины волны получается условие:

$$\lambda \geq \lambda_0 = \frac{hc}{A_{вых}}\,.$$

Частота ν_0 или длина волны λ_0 называется *красной границей фотоэффекта*.

На основе фотоэффекта работают фотодиоды, в которых электрический ток представляет собой поток электронов, выбитых светом из катода и летящих к аноду. Чтобы фототок стал равным нулю, между катодом и анодом необходимо приложить *задерживающее напряжение* $U_{зад}$, при котором ни один из фотоэлектронов, даже обладая при вылете из катода максимальной скоростью υ_{max}, не сможет достигнуть анода. Следовательно:

$$\frac{m_e \upsilon_{max}^2}{2} = eU_{зад},$$

где e – заряд электрона, m_e – масса электрона.

Примеры решения задач

Задача 8.1. Определите длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, прошедшего разность потенциалов $U = 9{,}8$ В.

Решение

Дано
$U = 9{,}8$ В
$p_e = p_ф$
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
λ – ?

Пройдя разность потенциалов U, электрон приобретает энергию eU, т.е.

$$\frac{m_e \upsilon^2}{2} = eU \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

Импульс электрона

$$p_e = m_e \upsilon = \sqrt{2 m_e eU}. \qquad (1)$$

Импульс фотона

$$p_ф = \frac{h}{\lambda}. \qquad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), получим:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m_e eU}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 9{,}8}} = 392 \text{ пм}.$$

Ответ: $\lambda = 392$ пм.

Задача 8.2. Фотоны с энергией $W_{max} = 4{,}9$ эВ вырывают электроны из металла с работой выхода $A_{вых} = 4{,}5$ эВ. Найти максимальный импульс p_{max}, передаваемый поверхности металла в результате фотоэффекта.

Решение

W_{max} = 4,9 эВ	Импульс, передаваемый поверхности, равен сумме импульсов фотона, поглощаемого поверхностью, и вылетающего электрона, т.е.
$A_{вых}$ =4,5 эВ	
p_{max} – ?	

$$p_{max} = p_ф + p_e. \tag{1}$$

Импульс фотона

$$p_ф = \frac{W_{max}}{c}. \tag{2}$$

Импульс электрона $p_e = m_e \upsilon_{max}$. Из уравнения Эйнштейна

$$h\nu = W_{max} = A_{вых} + \frac{m_e \upsilon_{max}^2}{2}$$

вычислим

$$p_e = m_e \sqrt{\frac{2(W_{max} - A_{вых})}{m_e}} = \sqrt{2m_e(W_{max} - A_{вых})}. \tag{3}$$

Подставим (2) и (3) в (1) и получим

$$p_{max} = \frac{W_{max}}{c} + \sqrt{2m_e(W_{max} - A_{вых})}.$$

Учтем, что 1 эВ = 1,6 · 10^{-19} Дж.

$$p_{max} = \frac{4{,}9 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} + \sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}(4{,}9 - 4{,}5) \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} =$$

$$= 3{,}45 \cdot 10^{-25} \left(кг \cdot \frac{м}{с} \right).$$

Ответ: $p_{max} = 3{,}45 \cdot 10^{-25} \left(кг \cdot \frac{м}{с} \right)$.

Задача 8.3. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_0 = 275$ нм. Найти работу выхода $A_{вых}$ электрона из металла, максимальную скорость υ_{max} электронов, вырванных из металла светом с длиной волны λ = 180 нм, и максимальную энергию W_{max} электронов.

Решение

λ_0 = 275 нм λ = 180 нм	Длина волны λ_0 красной границы фотоэффекта определяется как
$A_{вых}$ – ? υ_{max} – ? W_{max} – ?	

$$\lambda_0 = hc / A_{вых} \Rightarrow A_{вых} = hc/\lambda_0 \Rightarrow$$

$$A_{вых} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{275 \cdot 10^{-9}} = 7{,}2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4{,}5 \text{ эВ}.$$

Из уравнения Эйнштейна:

$$W_{max} = h\nu - A_{вых} = h \cdot \frac{c}{\lambda} - A_{вых} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{180 \cdot 10^{-9}} - 7{,}2 \cdot 10^{-19} =$$

$$= 3{,}8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2{,}4 \text{ эВ}.$$

Максимальная скорость электрона будет равна

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{2W_{max}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 9{,}1 \cdot 10^{5} \text{ м/с}.$$

Ответ: $A_{вых}$ = 4,5 эВ, W_{max} = 2,4 эВ, υ_{max} = 9,1 · 10^5 м/с.

Задача 8.4. Поток монохроматического излучения (λ = 0,46 мкм) падает на металлическую пластину. Фототок полностью прекращается, когда задерживающая разность потенциалов достигает 0,7 В. Найти работу выхода $A_{вых}$ и красную границу фотоэффекта λ_0.

Решение

λ = 0,46 мкм $U_{зад}$ = 0,7 В	Значение задерживающей разности потенциалов $U_{зад}$ позволяет определить максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов:
$A_{вых}$ – ? λ_0 – ?	

$$W_{max} = eU_{зад}. \tag{1}$$

Работу выхода можно найти из уравнения Эйнштейна:

$$h\nu = A_{вых} + W_{max}. \tag{2}$$

Объединив (1) и (2) и учитывая, что $\nu = \frac{c}{\lambda}$, получим

$$A_{\text{вых}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} - eU_{\text{зад}} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{0{,}46 \cdot 10^{-6}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}7 =$$

$$= 3{,}2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2 \text{ эВ}.$$

Красная граница фотоэффекта определяется как:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A_{\text{вых}}} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{3{,}2 \cdot 10^{-19}} = 0{,}62 \text{ мкм}.$$

Ответ: $A_{\text{вых}} = 2$ эВ, $\lambda_0 = 0{,}62$ мкм.

Задачи для самостоятельного решения

8.1. Найти энергию, массу и импульс фотона, если соответствующая длина волны $\lambda = 1{,}6$ пм.

Ответ: $\varepsilon_{\text{ф}} = 1{,}24 \cdot 10^{-13}$ Дж, $m_{\text{ф}} = 1{,}38 \cdot 10^{-30}$ кг, $p_{\text{ф}} = 4{,}1 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с.

8.2. Найти массу фотона: а) красных лучей света (λ = 700 нм); б) рентгеновских лучей (λ = 25 пм); в) гамма-лучей ($\lambda = 1{,}24$ пм).

Ответ: а) $m = 3{,}2 \cdot 10^{-36}$ кг, б) $m = 8{,}8 \cdot 10^{-32}$ кг, в) $m = 1{,}8 \cdot 10^{-30}$ кг.

8.3. С какой скоростью υ должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона с длиной волны λ = 520 нм?

Ответ: $\upsilon = 1{,}4$ км/с.

8.4. Какую энергию должен иметь фотон, чтобы его масса была равна массе покоя электрона?

Ответ: $\varepsilon_{\text{ф}}$ = 0,51 МэВ.

8.5. Найти длину волны λ_0 света, соответствующую красной границе фотоэффекта, для лития, натрия, калия и цезия.

Ответ: λ_{01} = 517 нм, λ_{02} = 540 нм, λ_{03} = 620 нм, λ_{04} = 660 нм.

8.6. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла λ_0 = 275 нм. Найти минимальную энергию $\varepsilon_{\text{ф}}$ фотона, вызывающего фотоэффект.

Ответ: $\varepsilon_{\text{ф}}$ = 4,5 эВ.

8.7. Найти задерживающую разность потенциалов $U_{\text{зад}}$ для электронов, вырываемых при освещении калия светом с длиной волны $\lambda = 330$ нм.

Ответ: $U_{зад}$ = 1,75 В.

8.8. Найти постоянную Планка h, если известно, что электроны, вырываемые из металла светом с частотой $\nu_1 = 2{,}2 \cdot 10^{15}$ Гц, полностью задерживаются разностью потенциалов $U_1 = 6{,}6$ В, а вырываемые светом с частотой $\nu_2 = 4{,}6 \cdot 10^{15}$ Гц – разностью потенциалов $U_2 = 16{,}5$ В.

Ответ: h = 6,6 10^{-34} Дж · с.

8.9. Вакуумный фотоэлемент состоит из центрального катода (вольфрамового шарика) и анода (внутренней поверхности посеребренной изнутри колбы). Контактная разность потенциалов между электродами $U_0 = 0{,}6$ В ускоряет вылетающие электроны. Фотоэлемент освещается светом с длиной волны $\lambda = 230$ нм. Какую задерживающую разность потенциалов $U_{зад}$ надо приложить между электродами, чтобы фототок упал до нуля? Какую скорость υ получат электроны, когда они долетят до анода, если не прикладывать между катодом и анодом разности потенциалов?

Ответ: $U_{зад}$ = 1,5 В, υ = 7,3 $\cdot 10^5$ м/с.

8.10. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта $\lambda_0 = 307$ нм, а максимальная кинетическая энергия W_{max} фотоэлектрона равна 1 эВ?

Ответ: 0,8.

8.11. На поверхность лития падает монохроматический свет (λ = 310 нм). Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов $U_{зад}$ не менее 1,7 В. Определить работу выхода $A_{вых}$.

Ответ: $A_{вых}$ = 2,3 эВ.

8.12. Для прекращения фотоэффекта, вызванного облучением ультрафиолетовым светом платиновой пластинки, нужно приложить задерживающую разность потенциалов $U_1 = 3{,}7$ В. Если платиновую пластинку заменить другой пластинкой, то задерживающую разность потенциалов придется увеличить до 6 В. Определить работу выхода $A_{вых}$ электронов с поверхности этой пластинки.

Ответ: $A_{вых}$ = 4 эВ.

8.13. На цинковую пластинку падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 220$ нм. Определить максимальную скорость υ_{max} фотоэлектронов.

Ответ: υ_{max} = 760 км/с.

8.14. Определить длину волны λ ультрафиолетового излучения, падающего на поверхность некоторого металла, при максимальной скорости фотоэлектронов, равной 10 Мм/с. Работой выхода электронов из металла пренебречь.

Ответ: $\lambda = 4{,}36$ нм.

8.15. Красная граница фотоэффекта у лития 520 нм. Какую обратную разность потенциалов (задерживающее напряжение) нужно приложить к фотоэлементу (к фотокатоду подключается плюс, к аноду – коллектору – минус источника напряжения), чтобы задержать электроны, испускаемые литием под действием ультрафиолетового излучения, длина волны которого 220 нм.

Ответ: $U_{зад} = 3{,}8$ В.

Занятие № 9

Тема: **Эффект Комптона**

Краткая теория

Эффектом Комптона называется упругое рассеяние коротковолнового электромагнитного излучения на свободных или слабосвязанных электронах вещества, сопровождающееся увеличением длины волны. Эффект Комптона может быть объяснен на основе квантовых представлений о природе света – он является результатом упругого столкновения фотонов света со свободными электронами. При этом отразившиеся (или рассеянные) фотоны теряют часть энергии, что означает уменьшение частоты (увеличение длины волны) рассеянного излучения. Этот результат не укладывается в рамки волновой теории, согласно которой длина волны не должна изменяться при рассеянии.

Эффект Комптона может наблюдаться лишь в высокочастотной части электромагнитного излучения (рентгеновского и γ-излучения), так как энергия налетающего фотона должна значительно превышать энергию связи электрона с атомом. В видимой области спектра эффект не наблюдается.

Длина волны рассеянного излучения не зависит от длины волны падающего излучения и природы рассеивающего вещества, а определяется только углом рассеяния

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2},$$

где λ – длина волны падающего излучения, λ' – длина волны рассеянного излучения, θ – угол рассеяния, λ_c – комптоновская длина волны:

$$\left(\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}\right),$$

где m_0 – масса частицы, на которой происходит рассеяние, для электрона λ_c = 2,426 пм.

В составе рассеянного излучения присутствует и излучение первоначальной длины волны λ. Это объясняется тем, что налетающие фотоны сталкиваются не только со свободными или слабосвязанными электронами. Если электрон сильно связан с атомом, то фотон при соударении обменивается энергией и с атомом в целом. Поскольку масса атома на несколько порядков больше массы электрона, то атому передается лишь ничтожная часть энергии фотона. Поэтому рассеянное излучение в этом случае практически не изменяет длину волны по сравнению с падающим.

Примеры решения задач

Задача 9.1. Фотон с энергией $\varepsilon_ф = 0{,}75$ МэВ рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 60^\circ$. Принимая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения с фотоном были пренебрежимо малы, определить: а) энергию $\varepsilon'_ф$ рассеянного фотона, б) кинетическую энергию W электрона отдачи, в) направление движения электрона отдачи.

Решение

$\varepsilon_ф = 0{,}75$ МэВ
$\theta = 60^\circ$
$m_0 = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг
$\varepsilon'_ф$ – ? W – ? φ – ?

а) Энергия фотона

$$\varepsilon_ф = h\nu = hc/\lambda \Rightarrow \lambda = hc/\varepsilon_ф .$$

Аналогично

$$\lambda' = hc/\varepsilon'_ф .$$

Подставим эти выражения в формулу Комптона:

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{hc}{\varepsilon'_ф} - \frac{hc}{\varepsilon_ф} = 2\frac{h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{ф}'} - \frac{1}{\varepsilon_{ф}} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{m_0c^2} \Rightarrow \varepsilon_{ф}' = \left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{m_0c^2} + \frac{1}{\varepsilon_{ф}}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{ф}' = \left(\frac{2\cdot 0{,}25}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 9\cdot 10^{16}} + \frac{1}{0{,}75\cdot 1{,}6\cdot 10^{-13}}\right)^{-1} = 6{,}9\cdot 10^{12}\ \text{Дж} = 0{,}43\ \text{МэВ}.$$

б) Кинетическая энергия электрона отдачи равна

$$W = \varepsilon_{ф} - \varepsilon'_{ф} = 0{,}75 - 0{,}43 = 0{,}32\ \text{МэВ}$$

в) По закону сохранения импульса импульс налетающего фотона $\vec{p}_{ф}$ равен векторной сумме импульсов рассеянного фотона $\vec{p}'_{ф}$ и электрона отдачи $m_0\vec{\upsilon}$ (рис. 8.1):

$$\vec{p}_{ф} = \vec{p}'_{ф} + m_0\vec{\upsilon}.$$

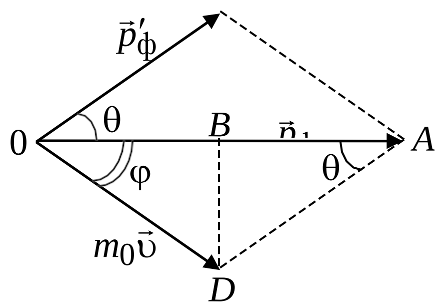


Рис. 8.1

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{BD}{BO} = \frac{AD\sin\theta}{OA - AD\cos\theta}. \tag{1}$$

Отметим, что $AD = p'_{ф}$, а $OA = p_{ф}$, следовательно:

$$tg\varphi = \frac{p'_{ф}\sin\theta}{p_{ф} - p'_{ф}\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{p_{ф}}{p'_{ф}} - \cos\theta}. \tag{2}$$

Учитывая, что $p_{ф} = \frac{\varepsilon_{ф}}{c}$ и $p'_{ф} = \frac{\varepsilon'_{ф}}{c}$, получим

$$tg\varphi = \frac{\sin\theta}{\frac{\varepsilon_ф}{\varepsilon'_ф} - \cos\theta} = \frac{0{,}867}{\frac{0{,}75}{0{,}43} - 0{,}5} = 0{,}697,$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}0{,}697 = 35^\circ$$

Ответ: $\varepsilon'_ф = 0{,}43$ МэВ, $W = 0{,}32$ МэВ, $\varphi = 35^\circ$.

Задача 9.2. В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном был рассеян на угол $\theta = 90^\circ$. Энергия рассеянного фотона $\varepsilon'_ф$ равна 0,4 МэВ. Определить энергию $\varepsilon_ф$ фотона до рассеяния.

Решение

$\theta = 90^\circ$	Энергия падающего фотона
$\varepsilon'_ф = 0{,}4$ МэВ	$$\varepsilon_ф = h\nu = hc/\lambda. \quad (1)$$
$m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг	
$\varepsilon_ф$ – ?	Аналогично для рассеянного фотона

$$\varepsilon'_ф = hc/\lambda'. \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2) выразим λ и λ'

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon_ф}, \qquad (3)$$

$$\lambda' = \frac{hc}{\varepsilon'_ф}. \qquad (4)$$

Подставим (3) и (4) в формулу Комптона

$$\frac{hc}{\varepsilon'_ф} - \frac{hc}{\varepsilon_ф} = 2\lambda c \sin^2\frac{\theta}{2}. \qquad (5)$$

С учетом $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$ получим

$$\frac{1}{\varepsilon'_ф} - \frac{1}{\varepsilon_ф} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{m_0 c^2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_ф = \left(\frac{1}{\varepsilon'_ф} - \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{m_0c^2} \right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_ф = \left(\frac{1}{0{,}4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}} - \frac{2 \cdot 0{,}5}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{8}} \right)^{-1} = 2{,}93 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 1{,}85 \text{ МэВ},$$

Ответ. $\varepsilon_ф = 1{,}85$ МэВ.

Задача 9.3. Рентгеновский фотон с частотой $7{,}5 \cdot 10^{18}$ Гц испытывает рассеяние на 90° на свободном электроне. Определить частоту фотона после столкновения, импульс и энергию электрона отдачи.

Решение

Дано	
$\nu = 7{,}5 \cdot 10^{18}$ Гц	Длина волны λ и частота ν излучения связаны выражением
$\theta = 90°$	
$m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг	$$\lambda = c/\nu. \qquad (1)$$
ν' – ? p – ? $W_э$ – ?	

Используем соотношение (1) в формуле Комптона

$$\lambda' - \lambda = 2\frac{h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = 2\frac{h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = 2\frac{h}{m_0c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Откуда следует

$$\nu' = \left(2\frac{h}{m_0c^2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{\nu} \right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\nu' = \left(2\frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 0{,}5}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}} + \frac{1}{7{,}5 \cdot 10^{18}} \right)^{-1} = 7{,}07 \cdot 10^{18} \text{ Гц}.$$

Из закона сохранения импульса можно записать

$$\vec{p}_ф = \vec{p}\,'_ф + \vec{p}\,, \qquad (2)$$

где $p_ф = \dfrac{h\nu}{c}$ – импульс налетающего фотона, $p'_ф = \dfrac{h\nu'}{c}$ – импульс рассеянного фотона, p – импульс электрона отдачи.

Выражение (2) отображается графически с учетом $\theta = 90^\circ$.

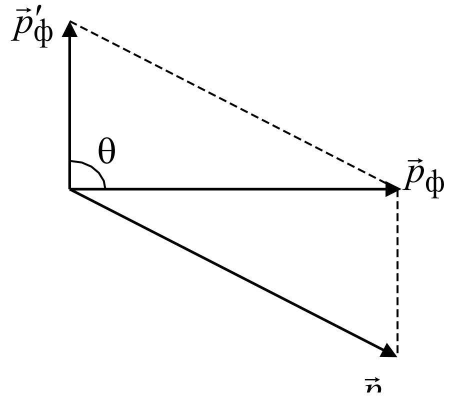


Рис. 8.2

Из рис. 8.2 можно записать:

$$p = \sqrt{p_ф^2 + \left(p'_ф\right)^2} = \frac{h}{c}\sqrt{\nu^2 + (\nu')^2} =$$

$$= \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^8}\sqrt{7{,}5^2 + 7{,}07^2} \cdot 10^{18} = 2 \cdot 10^{-23}\ (\text{кг} \cdot \text{м/с}).$$

Энергия электрона отдачи определится так

$$W = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{4 \cdot 10^{-46}}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 0{,}22 \cdot 10^{-15}\ \text{Дж}.$$

Ответ. $\nu' = 7{,}07 \cdot 10^{18}$ Гц, р = $2 \cdot 10^{-23}$ кг · м/с, $W = 0{,}22 \cdot 10^{-15}$ Дж.

Задача 9.4. Фотон с энергией $\varepsilon_ф = 1{,}025$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить угол рассеяния θ фотона, если длина волны рассеянного фотона оказалась равной комптоновской длине волны $\lambda_c = 2{,}43$ пм.

Решение

$\varepsilon_ф = 1{,}025$ МэВ	Из соотношения

$\lambda' = \lambda_c = 2{,}43$ пм
$\theta - ?$

$$\varepsilon_ф = h\nu = hc / \lambda \Rightarrow \lambda = hc / \varepsilon_ф \qquad (1)$$

Преобразуем формулу Комптона с помощью (1):

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow \lambda_c - \frac{hc}{\varepsilon_ф} = \lambda_c (1 - \cos\theta) \qquad (2)$$

Из выражения (2) $\cos\theta = \dfrac{hc}{\varepsilon_ф \cdot \lambda_c} \Rightarrow$

$$\cos\theta = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}025 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13} \cdot 2{,}43 \cdot 10^{-12}} = 0{,}498 \approx 0{,}5.$$

$$\theta = \arccos 0{,}5 = 60^\circ.$$

Ответ. $\theta = 60^\circ$.

Задачи для самостоятельного решения

9.1. Определить длину волны рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения под углом $\theta = 60^\circ$ длина волны рассеянного излучения оказалась равной 57 пм.

Ответ: $\lambda = 55{,}8$ пм.

9.2. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. Оказывается, что длины волн рассеянного под углами $\theta_1 = 60^\circ$ и $\theta_2 = 120^\circ$ излучения отличаются в 1,5 раза. Определить длину волны падающего излучения, предполагая, что рассеяние происходит на свободных электронах.

Ответ: $\lambda = 3{,}64$ пм.

9.3. Фотон с длиной волны $\lambda = 5$пм испытал комптоновское рассеяние под углом $\theta = 90^\circ$ на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить: 1) изменение длины волны при рассеянии, 2) энергию электрона отдачи, 3) импульс электрона отдачи.

Ответ: 1) $\Delta\lambda = 2{,}43$ пм; 2) $W_э = 81{,}3$ кэВ; 3) $p_э = 1{,}6 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с.

9.4. Фотон с энергией $\varepsilon_ф = 0{,}25$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить кинетическую энергию электрона отдачи, если длина волны рассеянного фотона изменилась на 20 %.

Ответ: $W_э$ = 41,7 кэВ.

9.5. Фотон с энергией $\varepsilon_ф = 0{,}3$ МэВ рассеялся под углом $\theta = 180^\circ$ на свободном электроне. Определить долю энергии фотона, приходящуюся на рассеянный фотон.

Ответ: $\varepsilon'_ф / \varepsilon_ф = 0{,}461$.

9.6. Фотон с энергией 100 кэВ в результате комптоновского эффекта рассеялся при соударении со свободным электроном на угол $\theta = \pi/2$. Определить энергию фотона после рассеяния.

Ответ: $\varepsilon'_ф = 83{,}7$ кэВ.

9.7. При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\theta = \pi/2$. Найти энергию $\varepsilon'_ф$ и импульс $p'_ф$ рассеянного фотона.

Ответ: $\varepsilon'_ф = 2{,}6 \cdot 10^5$ эВ, $p_ф' = 13{,}6 \cdot 10^{-23}$ кг · м/с.

9.8. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 20$ пм испытывают комптоновское рассеяние под углом $\theta = 90^\circ$. Найти изменение $\Delta\lambda$ длины волны при рассеянии, а также энергию $W_э$ и импульс $p_э$ электрона отдачи.

Ответ: $\Delta\lambda = 2{,}4$ пм, $W_э = 6{,}66$ кэВ, $p_э = 4{,}4 \cdot 10^{-23}$ кг · м/с.

9.9. На сколько изменяется длина волны рентгеновских лучей при комптоновском рассеянии под углом $\theta = 60^\circ$?

Ответ: $\Delta\lambda = 1{,}21$ пм.

9.10. Найти длину волны рентгеновских лучей (λ = 20 пм) после комптоновского рассеяния под углом 90°.

Ответ: $\lambda' = 22{,}43$ пм.

9.11. При облучении графита рентгеновскими лучами длина волны излучения, рассеянного под углом 45°, оказалось равной 10,7 пм. Какова длина волны падающих лучей?

Ответ: $\lambda = 10$ пм.

9.12. Рентгеновский фотон с энергией $\varepsilon_ф$, равной удвоенному значению энергии покоя электрона, был рассеян на свободном электроне на угол $\theta = 120^\circ$. Определить энергию рассеянного фотона $\varepsilon'_ф$ и кинетическую энергию электрона отдачи $W_э$.

Ответ: $\varepsilon'_ф = 0{,}255$ МэВ, $W_э = 0{,}766$ МэВ.

9.13. Длина волны рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния увеличилась с 2 до 2,4 пм. Найти энергию электронов отдачи.

Ответ: $W_э = 0{,}1$ МэВ.

9.14. Угол рассеяния рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 5$ пм равен $\theta = 30^\circ$, а электроны отдачи движутся под углом $\varphi = 60^\circ$ к направлению падающих лучей. Найти: 1) импульс электронов отдачи $p_э$, 2) импульс фотонов рассеянных лучей $p'_ф$.

Ответ: $p_э = 6{,}63 \cdot 10^{-23}$ кг · м/с, $p_ф{}' = 1{,}14 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с.

9.15. Определить максимальное изменение длины волны при рассеянии света на протонах ($m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг).

Ответ: $\Delta\lambda_{max} = 2{,}64 \cdot 10^{-15}$ м.

9.16. Фотон с энергией $\varepsilon_ф = 0{,}25$ МэВ рассеялся на свободном электроне. Энергия $\varepsilon'_ф$ рассеянного фотона равна 0,2 МэВ. Определить угол рассеяния θ.

Ответ: $\theta = 60^\circ 40'$ или $299^\circ 20'$.

9.17. Угол рассеяния фотона $\theta = 90^\circ$. Угол отдачи электрона $\varphi = 30^\circ$. Определить энергию $\varepsilon_ф$ падающего фотона.

Ответ: $\varepsilon_ф = 0{,}37$ МэВ.

9.18. Фотон ($\lambda = 1$ пм) рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 90^\circ$. Какую долю своей энергии фотон передал электрону?

Ответ: 70 %.

9.19. При эффекте Комптона γ-квант с энергией $\varepsilon_ф = 1{,}533$ МэВ был рассеян на некоторый угол θ. Найти угол рассеяния γ-кванта, если кинетическая энергия электрона отдачи оказалась равной $W_э = 0{,}511$ МэВ.

Ответ: $\theta = 80{,}8°$.