1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Основные формулы и методические указания

Кинематика – раздел механики, рассматривающий движение тела без учета причин, вызывающих это движение.

Положение материальной точки в системе отсчета задается двумя способами: векторным и координатным. Через радиус-вектор $\vec{r}$ координаты точки определяются:

$$x = |\vec{r}| \cos \alpha,$$

$$y = |\vec{r}| \sin \alpha.$$

Перемещение точки за время $\Delta t = t_1 - t_0$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{\upsilon}(t) dt.$$

Мгновенная скорость движущейся точки

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Вектор мгновенной скорости характеризует скорость изменения радиус-вектора точки и направлен по касательной к траектории. Модуль мгновенной скорости

$$|\vec{\upsilon}| = \frac{dS}{dt} \quad (\text{при } \Delta t \to 0 \ |d\vec{r}| = dS).$$

изменение скорости

$$\Delta \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t_1) - \vec{\upsilon}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t) dt.$$

Ускорение материальной точки $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$.

В случае равномерного движения $\vec{\upsilon} = \text{const}$ и $\vec{a} = 0$:

$$\Delta \vec{r} = \vec{\upsilon} \Delta t, \ \ \Delta \vec{\upsilon} = 0.$$

В случае прямолинейного движения

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = S = \upsilon\Delta t\,.$$

В случае криволинейной траектории вектор ускорения $\vec{a}$ характеризует скорость изменения $\vec{\upsilon}$ по модулю и по направлению:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau;$$

модуль полного ускорения:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2}\,.$$

$\vec{a}_n$ характеризует скорость изменения направления $\vec{\upsilon}$ – это нормальное или центростремительное ускорение и направлено по нормали к траектории

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R},$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке a_τ характеризует скорость изменения модуля $\vec{\upsilon}$ – называется тангенциальным или касательным ускорением и направлено по касательной к траектории.

$$a_\tau = \frac{d\left|\vec{\upsilon}\right|}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}.$$

Кинематическое уравнение движения – зависимость радиуса-вектора материальной точки от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Проекции векторного уравнения на координатные оси дают в общем случае закон движения:

$$x = x(t),\;\; y = y(t),\;\; z = z(t)\,.$$

В случае равнопеременного движения $\vec{a} = \mathrm{const}$, тогда

$$\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t_1) - \vec{\upsilon}(t_0) = \vec{a}\Delta t;$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0) = \vec{\upsilon}\Delta t \pm \frac{\vec{a}(\Delta t)^2}{2}\,.$$

Закон движения в этом случае имеет вид:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t \pm \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор, определяющий начальное положение точки при $t = 0$.

1.1. Прямолинейное движение

Закон движения в проекции на ось x, направленную вдоль траектории, имеет вид:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t,$$

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{\upsilon}_0$ равен 0 или π.

$$\begin{cases} \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \\ a_x = a. \end{cases}$$

В этом случае движение равноускоренное.

Если ось x направлена вдоль вектора $\vec{\upsilon}_0$, $\vec{a}$ и $\vec{\upsilon}_0$ противонаправлены, то движение равнозамедленное:

$$\begin{cases} \upsilon_{0x} = \upsilon_0, \\ a_x = -a, \end{cases} \quad .$$

В этом случае

$$\upsilon_к = \upsilon_0 - at,$$

$$S = \upsilon_0 t - \frac{at^2}{2},$$

$$\pm 2aS = \upsilon_к^2 - \upsilon_0^2,$$

где υ_0 и $\upsilon_к$ – модули начальной и конечной скоростей, a – модуль ускорения, S – пройденный путь.

1.2. Криволинейное движение

Для рассмотрения криволинейного движения необходимо ввести две оси координат X и Y. Тогда в случае $|\vec{a}| = \text{const}$ скорость изменяется по осям X и Y:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t;\ \ x = x_0 + \upsilon_x t + \frac{a_x t^2}{2};$$

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t;\ \ y = y_0 + \upsilon_y t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Классический закон сложения скоростей:

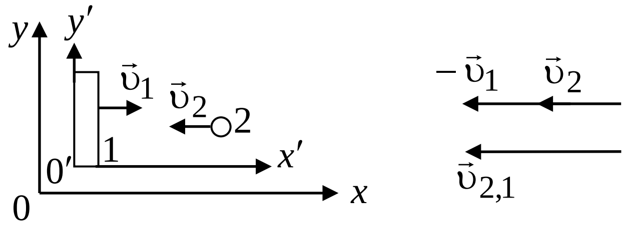
$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}.$$

Средняя скорость движения $\langle \upsilon \rangle = \dfrac{S}{t}$.

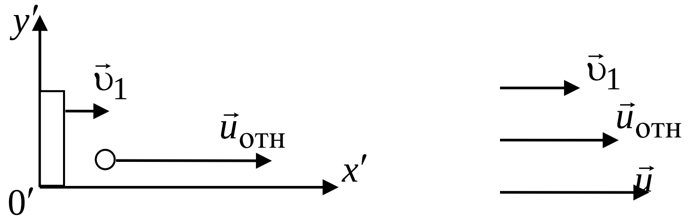
Примеры решения задач

Задача 1. Массивная стенка движется со скоростью $\vec{\upsilon}_1$. Навстречу ей со скоростью $\vec{\upsilon}_2$ летит шарик. Происходит абсолютно упругое столкновение, причем скорость стенки не меняется. Найдите модуль скорости $|\vec{u}|$ отскочившего шарика.

Решение. Если бы стенка была неподвижна, то при абсолютно упругом столкновении скорость отскочившего шарика была бы равна $|\vec{\upsilon}_2|$. Скорость шарика и стенки заданы относительно Земли. Свяжем подвижную систему отсчета со стенкой (рис. 1а).



а) б)



в) г)

Рис. 1.1

Тогда скорость шарика относительно стенки равна (рис. 1.1б)

$$\vec{\upsilon}_{2,1} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2 + (-\vec{\upsilon}_1).$$

Модуль этой скорости равен

$$\upsilon_{2,1} = \upsilon_2 + \upsilon_1.$$

В системе отсчета, связанной со стенкой, шарик отскочит со скоростью $\vec{u}_{отн}$, причем $|\vec{u}_а| = \upsilon_{2,1} = \upsilon_2 + \upsilon_1$ (рис. 1.1в).

Для нахождения скорости шарика относительно Земли, имеем

$$\vec{\upsilon}_{абс} = \vec{\upsilon}_{отн} + \vec{\upsilon}_{пер},$$

где $\vec{\upsilon}_{абс}$ – скорость шарика относительно Земли, т.е. та скорость $\vec{u}$, которую необходимо найти, $\vec{\upsilon}_{пер}$ – скорость стенки, т.е. $\vec{\upsilon}_{пер} = \vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_{отн}$ – скорость шарика после отскока относительно стенки (на рис. 1.1в это $\vec{u}_{отн}$).

Таким образом,

$$\vec{u} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{u}_{отн},$$

а в скалярном виде:

$$u = \upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_1 = 2\upsilon_1 + \upsilon_2.$$

$$|\vec{u}| = 2\upsilon_1 + \upsilon_2.$$

Задача 2. Для задания вектора в декартовой системе координат используются координатные орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, т.е. единичные векторы, направленные соответственно вдоль координатных осей *x, y, z*. Как будут выражаться через эти орты следующие векторы: радиус-вектор, вектор перемещения, вектор скорости, вектор ускорения?

Решение. Радиус-вектор $\vec{r}$ проводится из начала координат в некоторую точку с координатами x, y, z. Эти координаты являются проекциями радиуса-вектора на соответствующие оси. Значит,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,.$$

Вектор перемещения соединяет две точки пространства с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 и

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} - x_1\vec{i} - y_1\vec{j} - z_1\vec{k} =$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}\,.$$

Скорость $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)\vec{k} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}\,.$

Ускорение

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)\vec{k} = \left(\frac{d\upsilon_x}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{\upsilon_y}{dt}\right)\vec{j} + \left(\frac{\upsilon_z}{dt}\right)\vec{k} =$$

$$= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,.$$

Задача 3. Камень брошен с высоты $h = 2{,}1$ м под углом $\alpha = 45°$ к горизонту и падает на землю на расстоянии $S = 42$ м. Найти начальную скорость υ_0 камня, время полета $t_{пол}$ и максимальную высоту H подъема над уровнем Земли. Определить радиусы кривизны траектории в верхней точке и в точке падения камня на землю.

Решение. Движение камня, происходящее по параболе, можно рассматривать как сумму двух независимых движений: равномерное движение по горизонтали (по оси x) и равнопеременное по вертикали (по оси y). Начало отсчета удобно выбрать в точке бросания. Ось y направлена вертикально вверх.

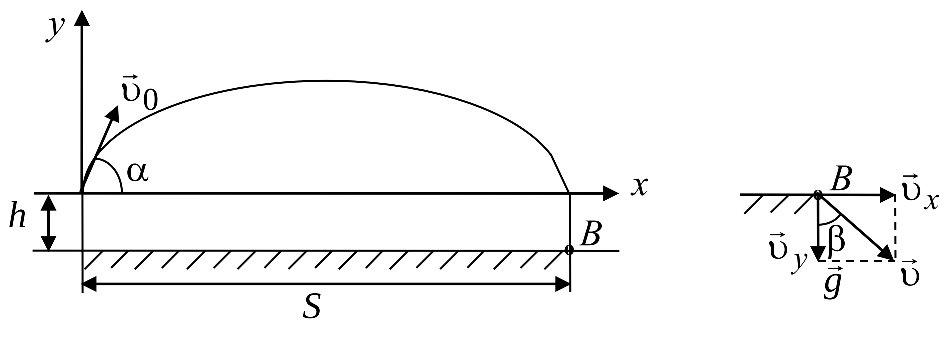


Рис. 1.2

Для движения камня по оси x имеем

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha = \text{const}\,; \;\; x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t\,,$$

при $t = t_{\text{пол}}, \quad x = S$.

Следовательно,

$$S = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t_{\text{пол}}\,. \tag{1.1}$$

Для движения камня по оси y

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt\,, \tag{1.2}$$

$$y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \tag{1.3}$$

при $t = t_{\text{пол}}, \quad y = -h$, следовательно,

$$-h = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_{\text{пол}} - \frac{g(t_{\text{пол}})^2}{2}, \tag{1.4}$$

$$\upsilon_{yB} = \upsilon_0 \sin\alpha - gt_{\text{пол}}\,. \tag{1.5}$$

Из уравнений (1.1) и (1.4) находим:

$$t_{\text{пол}} = \sqrt{\frac{2(h + S\operatorname{tg}\alpha)}{g}} = 3 \text{ с},$$

$$\upsilon_0 = \frac{S}{\tau\cos\alpha} = 20 \text{ м/с}.$$

Высота подъема камня над Землей находится из соотношения:

$$H = h + y_{\max}\,.$$

$y = y_{\max}$ находим из условия $\upsilon_y = 0$ и $t = t_1$. В уравнение (1.2) подставляем $\upsilon_y = 0$ и находим время подъема t_1:

$$t_1 = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}\,.$$

Подставляем t_1 в уравнение (1.4), получаем

$$y_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad H = h + \frac{\upsilon_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 12 \text{ м.}$$

Определим направление векторов полного ускорения и скорости и величины a_n и a_τ в точках траектории, указанных в условии задачи. В верхней точке траектории $\upsilon_y = 0$, $\upsilon = \upsilon_x$.

Следовательно, векторы ускорения и скорости взаимно перпендикулярны. Это значит, $a_\tau = 0$ и $a_n = g$. Найдем радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке:

$$R_1 = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{\upsilon_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = 20 \text{ м.}$$

В конечной точке траектории $\sin\beta$ (угла между векторами скорости и ускорения) равен

$$\sin\beta = \frac{\upsilon_x}{\upsilon_y}.$$

Разложим вектор полного ускорения $\vec{g}$ на тангенциальное $a_\tau = g\cos\beta$ и нормальное $a_n = g\sin\beta$, тогда радиус кривизны траектории в этой точке

$$R_2 = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{\upsilon^2}{\upsilon_x g}.$$

Скорость υ в точке падения на землю определяется по формуле

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 \cos^2 \alpha + \left(\upsilon_0 \sin\alpha - g t_{\text{под}}\right)^2} = 21 \text{ м/с.}$$

Находим $R_2 = 63$ м.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Найти скорость υ относительно берега лодки, идущей по течению, против течения и под углом $\alpha = 90°$ к направлению течения. Скорость течения реки $u = 1$ м/с, скорость лодки относительно воды $\upsilon_0 = 2$ м/с.

Ответ: а) $\upsilon = 3$ м/с, б) $\upsilon = 1$ м/с, в) $\upsilon = 2{,}24$ м/с.