2.10. Цилиндр плотно прижат сверху и снизу к двум параллельным рейкам, расположенным горизонтально, и может катиться по ним без проскальзывания (рис. 2.2). Верхняя рейка движется со скоростью υ_1, а нижняя – с меньшей скоростью υ_2. С какой скоростью υ будет двигаться цилиндр?

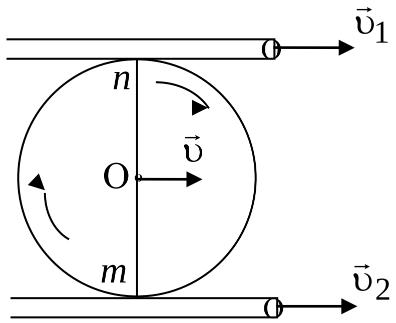

Рис. 2.2

Ответ: $\upsilon = 0{,}5(\upsilon_1 + \upsilon_2)$.

---

3. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные формулы и методические указания

Динамика – раздел механики, в котором рассматриваются законы движения с учетом причин, обуславливающих характер данного движения.

Второй закон Ньютона или основной закон динамики материальной точки

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{md\vec{\upsilon}}{dt},$$

где $\vec{F}$ – результирующая сила, действующая на материальную точку.

Основной закон динамики поступательного движения твердого тела:

$$\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F}_{\text{внешн}}.$$

Если m = const, то

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{1}{m} \cdot \vec{F}_{\text{внешн}}.$$

Второй закон Ньютона для вращательного движения материальной точки:

$$F_n = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R,$$

где υ – линейная скорость, ω – угловая скорость, R – радиус кривизны траектории в данной точке.

Сила гравитационного притяжения двух материальных точек:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2},$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2 – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы точек, R – расстояние между ними.

Сила тяжести:

$$F = mg.$$

Сила трения

$$\left|F_{\text{тр}}\right| = kN,$$

где k – коэффициент трения, N – сила реакции опоры.

Сила упругости при деформациях

$$F = -k_{\text{упр}} x,$$

где $k_{\text{упр}}$ – коэффициент упругости, зависящий от материала и формы деформирующего тела, x – величина деформации тела.

При анализе задач и составлении алгебраических соотношений особое внимание следует обратить на векторный характер ряда величин, входящих в формулы. Для полного определения этих величин необходимо учитывать не только их числовое значение, но и направление.

Для упрощения уравнений нужно использовать разложение векторов скорости ускорения, силы на составляющие по каким-либо двум направлениям, чаще всего взаимно перпендикулярным.

Примеры решения задач

Задача 1. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45°$. Зависимость пройденного пути S от времени t дается уравнением $S = Ct^2$, где С = 1,73 м/с^2. Найти коэффициент трения k тела о плоскость.

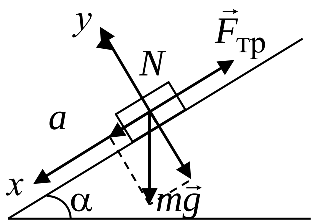

Рис. 3.1

Решение. По второму закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}$. Зададим направление оси X вдоль наклонной плоскости, а оси Y перпендикулярно к ней (рис. 3.1) и запишем уравнение движения тела в проекциях на эти оси:

по X: $$mg\sin\alpha - F_{тр} = ma, \tag{3.1}$$

по Y: $$N - mg\cos\alpha = 0. \tag{3.2}$$

Сила трения $F_{тр} = kN$, с учетом (3.2), $F_{тр} = mg\cos\alpha$.

Уравнение (3.1) примет вид:

$$mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha = ma,$$

откуда

$$k = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha}. \tag{3.3}$$

Ускорение можно найти как вторую производную пути по времени:

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = 2C. \tag{3.4}$$

Подставив (3.4) в (3.3), получим

$$k = \frac{g\sin\alpha - 2C}{g\cos\alpha} = 0{,}5.$$

Задача 2. Камень, привязанный к веревке, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти массу m камня, если известно, что разность между максимальной и минимальной силами натяжения веревки ΔT = 10 Н.

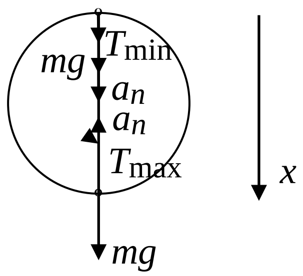

Рис. 3.2

Решение. По второму закону Ньютона для верхней и нижней точек соответственно

$$\left.\begin{aligned} mg + T_{\min} &= ma_n \\ mg - T_{\max} &= -ma_n \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &(3.5) \\ &(3.6) \end{aligned}$$

Сложив (3.5) и (3.6), получим $2mg - \Delta T = 0$, откуда

$$m = \frac{\Delta T}{2g} = 0{,}5 \text{ кг.}$$

Задача 3. Через неподвижный блок перекинута нерастяжимая нить, к одному концу которой прикреплен груз массы m_0, а к другому в первый раз присоединили пружину с подвешенным к ней грузом массы m_1 (рис. 3.3а), во второй раз – пружину, имеющую другую жесткость, с подвешенным к ней грузом массы m_2 (рис. 3.3б), а в третий раз последовательно к первой пружине с подвешенным грузом массы m_1 присоединили вторую пружину с подвешенным грузом массы m_2 (рис. 3.3в).

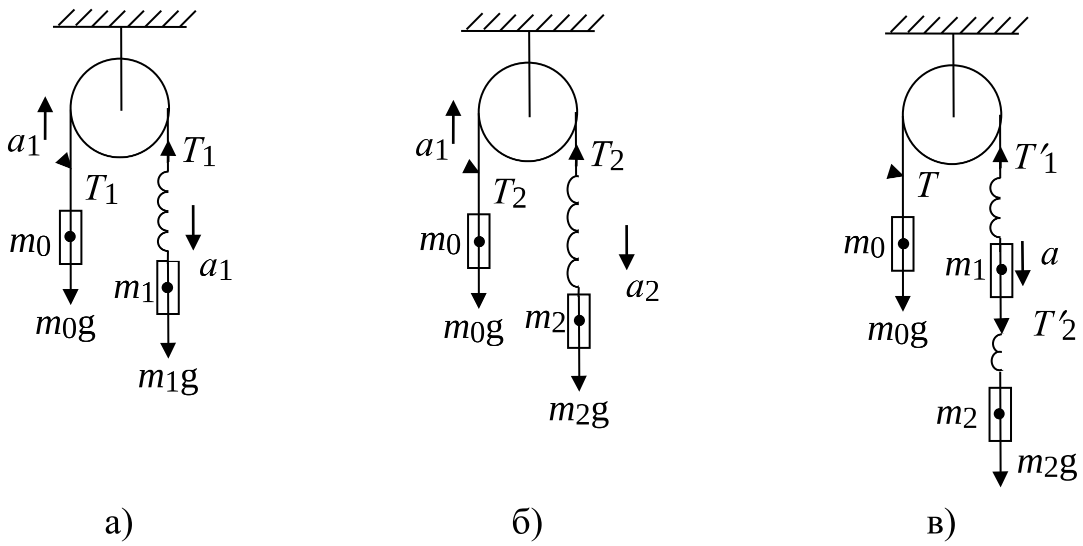

Рис. 3.3

В первый раз удлинение пружины равно x_1, во второй раз – x_2. Каково суммарное удлинение пружины x в третий раз? Рассматривать установившееся движение грузов (т.е. в отсутствие колебаний). Массой блока, нити и пружин пренебречь.

Решение. По второму закону Ньютона в первых двух случаях (а и б) имеем

$$m_1 g - k_1 x_1 = m_1 a_1, \tag{3.7}$$

$$m_0 g - T_1 = -m_0 a_1. \tag{3.8}$$

Так как сила натяжения T_1 равна силе упругости

$$|T_1| = |k_1 x_1|,$$

где k_1 – жесткость пружины в 1-ом случае.

При совместном решении уравнений (3.7) и (3.8), получим

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_0)g}{m_1 + m_0}, \tag{3.9}$$

$$m_2 g - k_2 x_2 = m_2 a_2, \tag{3.10}$$

$$m_0 g - T_2 = -m_0 a_2. \tag{3.11}$$

Аналогично

$$|T_2| = |k_2 x_2|,$$

где k_2 – жесткость причины во 2-ом случае, получим

$$a_2 = \frac{(m_2 - m_0)g}{m_2 + m_0}. \tag{3.12}$$

В третьем случае

$$\left.\begin{aligned} m_0 g - T &= -m_0 a \qquad (3.13)\\ m_1 g - T_1' + T_2' &= m_1 a \qquad (3.14)\\ m_2 g - T_2' &= m_2 a \qquad (3.15)\end{aligned}\right\}$$

где T – сила натяжения нити, прикрепленной к грузу массой m_0, T_1' и T_2' – силы упругости пружин жесткости k_1 и k_2.

При совместном решении системы уравнений (3.13), (3.14), (3.15), получим

$$a = \frac{(m_1 + m_2 - m_0)g}{m_1 + m_2 + m_0}. \tag{3.16}$$

Так как $T_1' = k_1 x_1'$, $T_2' = k_2 x_2'$, где x_1' и x_2' – удлинения пружин при последовательном соединении грузов, то общее удлинение пружин:

$$x = x_1' + x_2' = \frac{T_1'}{k_1} + \frac{T_2'}{k_2}. \tag{3.17}$$

Из системы уравнений (3.14) и (3.15)

$$T_1' = (m_1 + m_2)(g - a)$$

с учетом (3.16)

$$T_1' = \frac{(m_1 + m_2)2m_0 g}{m_1 + m_2 + m_0}. \tag{3.18}$$

Из уравнения (3.15)

$$T_2' = m_2(g - a)$$

с учетом (3.16)

$$T_1' = \frac{m_2 2m_0 g}{m_1 + m_2 + m_0}. \tag{3.19}$$

Из уравнения (3.8)

$$k_1 = \frac{m_0}{x_1}(g + a_1)$$

с учетом (3.9)

$$k_1 = \frac{m_0 2m_1 g}{x_1(m_1 + m_2)}. \quad (3.20)$$

Аналогично из (3.11) с учетом (3.12)

$$k_2 = \frac{m_0}{x_2}(g + a_2) = \frac{m_0 2m_2 g}{x_2(m_2 + m_0)}. \quad (3.21)$$

После подстановки в выражение (3.17) соответствующих формул (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), получим

$$x = \frac{(m_1 + m_2)2m_0 g \cdot x_1(m_1 + m_0)}{(m_1 + m_2 + m_0)m_0 2m_1 g} + \frac{m_2 2m_0 g \cdot x_2(m_2 + m_0)}{(m_1 + m_2 + m_0)m_0 2m_2 g} =$$

$$= \frac{(m_1 + m_2)(m_1 + m_0)x_1 + (m_2 + m_0)m_1 x_2}{m_1(m_1 + m_2 + m_0)}.$$

Задача 4. Гирька, привязанная к нити длиной $l = 30$ см, описывает в горизонтальной плоскости окружность радиусом R = 15 см. С какой частотой n вращается гирька?

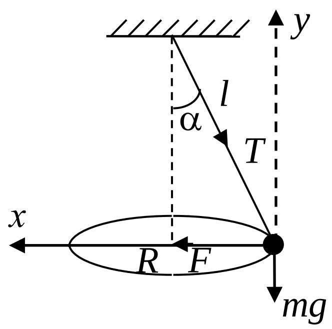

Рис. 3.4

Решение. В горизонтальной плоскости на гирьку действует сила $F = T\sin\alpha$. По второму закону Ньютона уравнения движения гирьки по осям X и Y:

$$T\sin\alpha = ma_n, \quad (3.22)$$

$$T\cos\alpha - mg = 0. \qquad (2.23)$$

При совместном решении (3.22) и (3.23), получим

$$a_n = \frac{g\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (2.24)$$

Поскольку $\sin\alpha = \frac{R}{l}$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{R^2}{l^2}}$:

$$a_n = \frac{gR}{l\sqrt{1-\frac{R^2}{l^2}}} = \frac{gR}{\sqrt{l^2 - R^2}}. \qquad (2.25)$$

С другой стороны

$$a_n = \omega^2 R = 4\pi^2 n^2 R,$$

откуда $$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{a_n / R}$$

с учетом (2.25)

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2 - R^2}}} = 0{,}98 \text{ об/с}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.1. К нити подвешена гиря. Если поднимать гирю с ускорением a_1 = 2 м/с^2, то сила натяжения нити T_1 будет вдвое меньше той силы натяжения T_2, при которой нить разорвется. С каким ускорением a_2 надо поднимать гирю, чтобы нить разорвалась.

Ответ: a_2 = 13,8 м/с^2.

3.2. Какую силу F надо приложить к вагону, стоящему на рельсах, чтобы вагон стал двигаться равноускоренно и за время t = 30 с прошел путь S = 11 м. Масса вагона m = 16 т. Во время движения на вагон действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,05 действующей на него силы тяжести.

Ответ: F = 8,2 кН.