

3.10. С какой линейной скоростью v будет двигаться искусственный спутник Земли по круговой орбите: а) у поверхности Земли, б) на высоте $h_1 = 200$ км и $h_2 = 7000$ км от поверхности Земли. Найти период обращения T спутника Земли при этих условиях. Считать радиус Земли равным 6400 км.

Ответ: $v = 7,91$ км/с, $v_{h_1} = 7,79$ км/с, $v_{h_2} = 5,46$ км/с, $T_1 = 12,25$ мин, $T_2 = 1$ ч 28 мин, $T_3 = 4$ ч 16 мин.

4. ИМПУЛЬС. ИМПУЛЬС СИЛЫ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Основные формулы и методические указания

Мерой механического движения материальной точки является векторная величина, называемая импульсом, и равная произведению массы точки m на ее скорость \vec{v}

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Импульсом системы материальных точек \vec{p} называется векторная сумма импульсов всех ее точек

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i.$$

Совокупность тел, на которые не действуют внешние силы, называют замкнутой системой.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы тел остается постоянным (не меняется со временем):

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const},$$

$$\vec{p}_k = \vec{p}_n,$$

где \vec{p}_n – начальный импульс системы, \vec{p}_k – конечный импульс системы.

В проекциях на оси координат

$$p_{nx} = p_{kx},$$

$$p_{ny} = p_{ky},$$

$$p_{nz} = p_{kz}.$$

При решении задач закон сохранения импульса можно применять в следующих случаях:

1) если векторная сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю;

2) если сумма проекций внешних сил на некоторое направление равна нулю, то в проекции только на это направление можно записать

$$p_{nx} = p_{kx} \text{ (но } p_{ny} \neq p_{ky}, p_{nz} \neq p_{kz} \text{)};$$

3) если длительность процесса взаимодействия мала, а возникающие при взаимодействии внутренние силы велики (удар, взрыв и т.д.), то за это малое время импульсом внешних сил можно пренебречь.

Мерой действия постоянной силы \vec{F} за промежуток времени Δt является векторная величина, называемая импульсом силы, равная $\vec{F} \cdot \Delta t$.

Под действием сил импульс материальной точки изменяется

$$\Delta \vec{p} = \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \Delta t.$$

Изменение импульса материальной точки равно импульсу равнодействующей всех сил, приложенных к этой точке.

Примеры решения задач

Задача 1. На рельсах, на горизонтальной плоскости стоит платформа с песком общей массой $M = 5 \cdot 10^3$ кг. В платформу попадает снаряд массой $m = 5$ кг, летящий со скоростью $v_{сн} = 400$ м/с. Снаряд летит под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Найти скорость платформы после попадания в нее снаряда, если снаряд застревает в песке.

Решение. На систему платформа-снаряд действует внутренняя сила (сила взаимодействия) и внешние силы – сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила трения $\vec{F}_{тр}$.

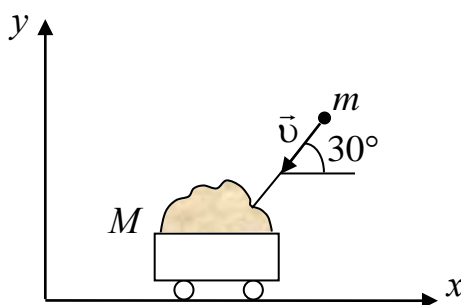


Рис. 4.1

Из-за негоризонтального направления скорости снаряда сила реакции опоры, действующая на платформу, во время взаимодействия платформы и снаряда будет меняться. Следовательно, закон сохранения импульса к данной системе не применим. Однако, если пренебречь силой трения, то сумма проекций внешних сил на горизонтальное направление будет равна нулю. Это значит, что проекция вектора полного импульса на горизонтальное направление остается постоянной

$$p_{\text{нх}} = p_{\text{кх}},$$

$$m v \cos \alpha = (m + M) u,$$

$$u = \frac{m v \cos \alpha}{m + M} = 0,2 \text{ м/с}.$$

Задача 2. Мяч массой $m = 100$ г, пролетел со скоростью $v = 20$ м/с и ударился о горизонтальную плоскость под углом $\alpha = 60^\circ$ к нормали. Найти импульс силы $\vec{F} \cdot \Delta t$, полученный мячом при ударе, считая удар абсолютно упругим.

Решение. Согласно основному уравнению динамики материальной точки

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p}, \quad (4.1)$$

или
$$\vec{F} \cdot \Delta t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1, \quad (4.2)$$

где $\Delta p = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ – изменение импульса мяча.

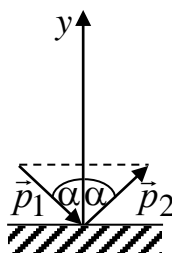


Рис. 4.2

Для записи этого выражения в скалярном виде спроецируем векторы импульсов мяча до и после удара на ось OY , учитывая, что при абсолютно упругом ударе модуль импульса не изменяется, а изменяется только его направление (при этом угол падения мяча равен углу отражения мяча от плоскости). Получим:

$$\Delta p = p_2 \cos \alpha - (-p_1 \cos \alpha).$$

Так как вектор силы \vec{F} , действовавший на мяч при ударе, направлен перпендикулярно плоскости, от которой отскакивает мяч, то уравнение (4.1), записанное в скалярном виде, примет вид:

$$F\Delta t = p_2 \cos \alpha + p_1 \cos \alpha = (p_1 + p_2) \cos \alpha.$$

Поскольку $p_1 = p_2 = m\nu$, то

$$F\Delta t = (m\nu + m\nu) \cos \alpha, \quad F\Delta t = 2m\nu \cos \alpha.$$

Эту задачу можно решить, воспользовавшись теоремой косинусов

$$\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(180^\circ - 2\alpha)} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos 2\alpha},$$

где $p_1 = p_2 = m\nu$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

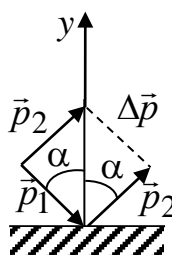


Рис. 4.3

С учетом последних равенств

$$\Delta p = \sqrt{(m\nu)^2 + (m\nu)^2 + 2m\nu \cdot m\nu(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} = 2m\nu \cos \alpha.$$

$$F\Delta t = 2 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Мяч массой $m = 300$ г упал с высоты $H = 1,23$ м на асфальт и подскочил на ту же высоту. Продолжительность удара об асфальт $t = 0,1$ с. Определите среднюю силу удара $F_{\text{ср}}$. Как изменится средняя сила удара, если мяч ударится о твердую поверхность, наклоненную под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту? Какой будет $F_{\text{ср}}$, если в обоих случаях мяч заменить пластилиновым шаром той же массы? Продолжительность удара – та же.