Ответ: $h = \frac{2}{3}R$.

5.9. Санки движутся по горизонтальному льду со скоростью υ = 6 м/с, а затем выезжают на асфальт. Длина полозьев санок l = 2 м, коэффициент трения об асфальт μ = 1. Какой путь пройдут санки до полной остановки?

Ответ: $S = \frac{l}{2} + \frac{\upsilon^2}{2\mu g} = 2{,}8$ м.

5.10. Брусок массой m = 1 кг лежит на шероховатой горизонтальной плоскости. К нему прикреплена невесомая пружина, жесткость которой k = 40 Н/м. Коэффициент трения между бруском и плоскостью μ = 0,8. Какую работу необходимо совершить, чтобы равномерно переместить брусок из состояния покоя на расстояние l = 2 м?

Ответ: 16,45 Дж.

---

6. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Основные формулы и методические указания

Второй закон Ньютона или основной закон динамики вращательного движения

$$\vec{M} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\varepsilon} \text{ или } Mt = J\omega_2 - J\omega_1,$$

где $\vec{M}$ – момент сил, приложенных к телу, J – момент инерции тела, ε – угловое ускорение, ω_1, ω_2 – угловые скорости вращения, изменяющиеся за время t.

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг оси:

$$W_к = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Закон сохранения энергии

$$A = \vec{M}\cdot\vec{\varphi} = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2},$$

где A – работа внешних сил, приложенных к вращающемуся телу.

Закон сохранения момента импульса

$$\sum_i \vec{L} = \sum_i J\vec{\omega} = \text{const},$$

где L – момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки 0.

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \text{ или } \vec{L} = [\vec{r} \cdot m\vec{\upsilon}],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки 0.

Закон изменения момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = M_{\text{внешн.}}$$

Примеры решения задач

Задача 1. Две гири с массами m_1 = 2 кг и m_2 = 1 кг соединены нитью, перекинутой через блок массой m = 1 кг. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском. Трением пренебречь.

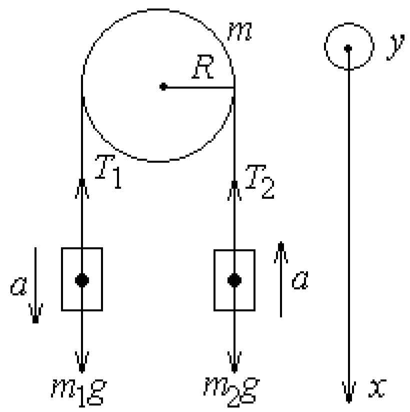

Рис. 6.1

Решение. Запишем в векторной форме уравнение поступательного движения первой и второй гири и уравнение вращательного движения диска:

$$m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}, \tag{6.1}$$

$$m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}, \tag{6.2}$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = J\vec{\varepsilon}\,, \qquad (6.3)$$

где M_1 – момент силы натяжения нити T_1, M_2 – момент силы натяжения нити T_2.

Зададим ось x вдоль направления движения гирь, а ось y перпендикулярно плоскости чертежа. Спроецируем первые два движения на ось x, а третье – на ось y.

$$m_1 g - T_1 = m_1 a\,, \qquad (6.4)$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a\,, \qquad (6.5)$$

$$M_1 - M_2 = J\varepsilon, \qquad (6.6)$$

Так как $M = RT$, $a = \varepsilon \cdot R$, где R – радиус диска, уравнение (6.6) запишется в виде:

$$R(T_1 - T_2) = J\frac{a}{R}. \qquad (6.7)$$

Вычтем (6.5) из (6.4):

$$g(m_1 - m_2) - (T_1 - T_2) = a(m_1 + m_2)$$

или

$$T_1 - T_2 = g(m_1 - m_2) - a(m_1 + m_2). \qquad (6.8)$$

Полученное выражение (6.8) подставим в (6.7) и, учитывая, что момент инерции диска $J = \frac{1}{2}mR^2$, найдем

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} = \frac{(2-1)\cdot 9{,}8}{(2+1+0{,}5)} = 2{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Подставляя значение a в (6.4) и (6.5) получим

$$T_1 = m_1(g - a) = 2(9{,}8 - 2{,}8) = 14\ \text{Н},$$

$$T_2 = m_2(g + a) = 1(9{,}8 + 2{,}8) = 12{,}6\ \text{Н}.$$

Задача 2. Вентилятор вращается с частотой $n = 900$ об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки

$N = 75$ об. Работа сил торможения $A = 44{,}4$ Дж. Найти момент инерции J вентилятора и момент сил торможения M.

Решение. Работа сил торможение равна изменению кинетической энергии:

$$-A = W - W_0. \tag{6.9}$$

Поскольку в момент остановки $W = 0$, а

$$W_0 = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J – момент инерции вентилятора, ω – угловая скорость, то

$$A = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Отсюда выразим J с учетом, что $\omega = 2\pi n$

$$J = \frac{2A}{4\pi^2 n^2},$$

$$J = \frac{2 \cdot 44{,}4}{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 15^2} = 0{,}01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

По основному закону динамики вращательного движения

$$M = J \cdot \varepsilon, \tag{6.10}$$

где угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t}. \tag{6.11}$$

При равнозамедленном вращении число оборотов, сделанное до остановки

$$N = \frac{\omega t}{2 \cdot 2\pi},$$

откуда

$$t = \frac{4\pi N}{\omega} = \frac{2N}{n}. \qquad (6.12)$$

Решая совместно (6.10), (6.11) и (6.12), получим

$$M = \frac{J\pi n^2}{N},$$

$$M = \frac{0{,}01 \cdot 3{,}14 \cdot 15^2}{75} = 94 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Задача 3. Горизонтальная платформа массой $m = 100$ кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой $n_1 = 10$ об/мин. Человек массой $m_0 = 60$ кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой n_2 начнет вращаться с платформы, если человек перейдет от края платформы к её центру? Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой. Какую работу A совершает человек при переходе от края платформы к её центру. Радиус платформы $R = 1{,}5$ м.

Решение.

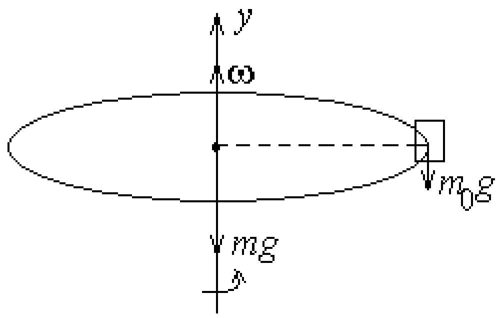

Рис. 6.2

Система «человек-платформа» замкнута в проекции на ось y, так как моменты сил $M_{mg} = 0$ и $M_{m_0g} = 0$ в проекции на эту ось. Следовательно, можно воспользоваться законом сохранения момента импульса

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \qquad (6.13)$$

где J_1 – момент инерции платформы с человеком, стоящем на ее краю, J_2 – момент инерции платформы с человеком, стоящем в центре, ω_1 и ω_2 – угловые скорости платформы в обоих случаях.

$$J_1 = \frac{mR^2}{2} + m_0 R^2, \; J_2 = \frac{mR^2}{2} \qquad (6.14)$$

Подставляя (6.14) в (6.13) и учитывая, что $\omega = 2\pi n$, где n – частота вращения платформы, получим

$$\left(\frac{mR^2}{2} + m_0 R^2\right) 2\pi n_1 = \frac{mR^2}{2} \cdot 2\pi n_2,$$

откуда

$$n_2 = n_1 \frac{mR^2 + 2m_0 R^2}{mR^2} = n_1 \frac{m + 2m_0}{m},$$

$$n_2 = \frac{10}{60} \cdot \frac{(100 + 2 \cdot 60)}{100} = 0{,}37\ \text{с}^{-1} \ \ (22\ \text{об/мин}).$$

При переходе с края платформы к центру человек совершает работу, равную разности кинетических энергий вращения

$$A = \frac{J_2 \omega_2^2}{2} - \frac{J_1 \omega_1^2}{2}. \qquad (6.15)$$

Подставляя (6.14) в (6.15) и учитывая $\omega_1 = 2\pi n_1$ и $\omega_2 = 2\pi n_2$, получим

$$A = mR^2 (\pi n_2)^2 - R^2 (\pi n_1)^2 (m + 2m_0),$$

$$A = 100 \cdot 1{,}5^2 (3{,}14 \cdot 0{,}37)^2 - 2{,}25 \cdot (3{,}14 \cdot 0{,}17)^2 (100 + 2 \cdot 60) = 162\ \text{Дж}.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Однородный диск радиусом $R = 0{,}2$ м и массой $m = 0{,}5$ кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости. Зависимость угловой скорости ω вращения диска от времени t дается уравнением $\omega = A + Bt$, где $B = 8$ рад/с^2. Найти касательную силу F, приложенную к ободу диска. Трением пренебречь.

Ответ: $F = 4$ Н.

6.2. Маховик радиусом $R = 0{,}2$ м и массой $m = 10$ кг соединен с мотором при помощи приводного ремня, идущего без скольжения $T = 14{,}7$ Н. Какую частоту вращения n будет иметь маховик через время $t = 10$ с после