10. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ

Основные формулы и методические указания

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева)

$$pV_{\text{М}} = RT \text{ (для одного моля газа)},$$

$$pV = (m\ /\ M)RT \text{ (для произвольной массы газа)},$$

где $V_{\text{М}}$ – молярный объем, R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса газа, m – масса газа, $m\ /\ M = \nu$ – количество вещества.

Закон Бойля-Мариотта

$$pV = \text{const} \quad \text{при } T = \text{const},\ m = \text{const},$$

где p – давление, V – объем, T – термодинамическая температура, m - масса газа.

Закон Дальтона для давления смеси n идеальных газов

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i\ ,$$

где p_i – парциальное давление i-го компонента смеси.

Зависимость давления газа p от концентрации n молекул и температуры T

$$p = nkT,$$

где k – постоянная Больцмана ($k = R/N_{\text{А}}$, $N_{\text{А}}$ – число Авогадро).

1. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева) применяют к газам, взятым при условиях, не слишком отличающихся от нормальных ($t_0 = 0$ °C, $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па), а также к разреженным газам. Для сильно сжатых (уплотненных) газов, находящихся при очень больших давлениях (свыше 10^7 Па) или при слишком низких температурах, уравнение не применимо.

2. В литературе встречаются некоторые внесистемные единицы измерения давления, соотношения которых с единицей измерения давления (Па) в системе СИ следующие:

1 мм рт.ст. = 133 Па;

1 атм (физическая атмосфера) = $1{,}013 \cdot 10^5$ Па;

1 ат (техническая атмосфера) = $9{,}8 \cdot 10^4$ Па.

При решении задач небольшим различием между 1 атм и 1 ат часто пренебрегают.

Примеры решения задач

Задача 1. Поршневой насос захватывает за один цикл (ход поршня) объем газа $V_1 = 1$ л и выталкивает его в атмосферу. Давление воздуха в сосуде объемом $V = 20$ л необходимо понизить от $p_0 = 1{,}00 \cdot 10^5$ Па до $p = 0{,}25$ Па. Найти, сколько циклов n должен сделать насос.

Решение. Каждый цикл работы насоса осуществляется в две стадии. При перемещении поршня насоса в крайнее правое положение (первая стадия, клапан K_1 открыт, K_2 – закрыт) газ занимает объем $(V + V_1)$, а давление в системе становится p_1 (рис 10.1).

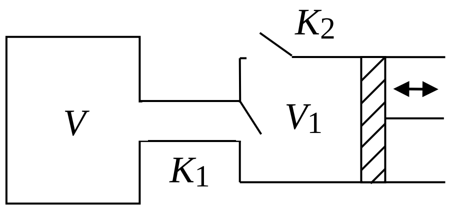

Рис. 10.1

При переходе поршня в крайнее левое положение (вторая стадия, клапан K_1 закрыт, K_2 – открыт) порция газа объемом V_1 выталкивается в атмосферу. Откачка газа обычно происходит в изотермических условиях, когда $T = \text{const}$ и справедливо уравнение изотермы

$$pV = \text{const}. \tag{10.1}$$

Связь между давлением и объемом газа в исходном состоянии и в конце первой стадии первого цикла описывается уравнением

$$p_0 V = p_1 (V + V_1). \tag{10.2}$$

Аналогичное уравнение для второго цикла, когда давление в системе стало p_2, имеет вид

$$p_1 V = p_2 (V + V_1). \tag{10.3}$$

Для третьего цикла

$$p_2V = p_3(V + V_1). \qquad (10.4)$$

Используя метод последовательной подстановки выражений (10.4), (10.3) в (10.2), получим закон изменения давления для трех циклов:

$$p_0 = p_3\left(\frac{V + V_1}{V}\right)^3.$$

Тогда для n циклов связь конечного давления p с начальным p_0 будет описываться выражением

$$p_0 = p\left(\frac{V + V_1}{V}\right)^n,$$

откуда необходимое число циклов

$$n = \lg\frac{p_0}{p} \Big/ \lg\left(1 + \frac{V_1}{V}\right).$$

Произведя вычисления, получим n = 280 циклов.

Задача 2. В закрытом сосуде при температуре 300 К и давлении 0,1 МПа находится 10 г водорода и 16 г гелия. Газы считать идеальными. Найти: 1) удельный объем смеси $\upsilon_{см}$; 2) молярную массу смеси $M_{см}$.

Решение. Согласно закону Дальтона, давление p смеси газов равно сумме парциальных давлений:

$$p = p_1 + p_2. \qquad (10.5)$$

Используя уравнение Клапейрона-Менделеева для каждого газа, получим

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{M_1}RT \text{ и } p_2V_2 = \frac{m_2}{M_2}RT.$$

Выразив из них p_1 и p_2 и подставив в (10.5), получим

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT.$$

1. Удельный объем смеси

$$\upsilon_{\text{см}} = \frac{V}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 / M_1 + m_2 / M_2)RT}{(m_1 + m_2)p}.$$

Произведя вычисления, получим $\upsilon_{\text{см}}$ = 8,63 м^3/кг.

2. Величина $M_{\text{см}}$ должна удовлетворять уравнению газового состояния, записанному для смеси:

$$pV = \frac{m}{M_{\text{см}}} RT. \qquad (10.7)$$

При сравнении (10.6) и (10.7) с учетом того, что масса смеси $m = m_1 + m_2$, найдем

$$\frac{m_1 + m_2}{M_{\text{см}}} = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}, \qquad (10.8)$$

откуда

$$M_{\text{см}} = \frac{M_1 M_2 (m_1 + m_2)}{M_1 m_2 + M_2 m_1}.$$

Произведя вычисления, получим $M_{\text{см}}$ = 0,0029 кг/моль.

Указание. Из формулы (10.8) следует, что количество вещества смеси равно сумме количеств веществ отдельных компонентов этой смеси. Иногда соотношение (10.8) считают очевидным, не требующим доказательства. Однако (10.8), как следует из приведенного решения задачи, является следствием закона Дальтона, без применения которого задачу решить нельзя.

Задача 3. Высокий цилиндрический сосуд с азотом находится в однородном поле сил тяжести, ускорение свободного падения в котором равно g. Температура T азота меняется по высоте так, что его плотность всюду одинакова. Рассчитать градиент температуры азота по высоте (dT/dh).

Решение. Для простоты площадь поперечного сечения сосуда примем равной единице. Выберем сечение столба газа на высоте h (рис. 10.2). Давление p, оказываемое на него газом, в общем случае вычисляется по формуле

$$p = \frac{P}{S} = \frac{mg}{S} = \int\limits_{h}^{+\infty} \rho(h) g dh, \quad (10.9)$$

где $\rho(h)$ – плотность газа на высоте h; $S = 1$.

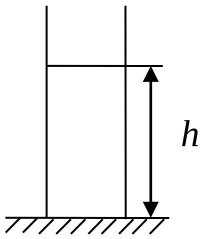

Рис. 10.2

С другой стороны, зависимость давления газа p от концентрации n молекул и температуры T

$$p = nkT = \rho kT / m_0, \quad (10.10)$$

где m_0 – масса одной молекулы.

Приравняв (10.9) и (10.10), получим

$$\int\limits_{h}^{+\infty} \rho(h) g dh = \rho kT / m_0 .$$

Поскольку $\rho(h)$ = const, вынесем эту величину из-под знака интеграла и сократим, тогда

$$T = \frac{m_0 g}{k} \int\limits_{h}^{+\infty} dh.$$

Градиент температуры найдем путем дифференцирования этого выражения по h:

$$\frac{dt}{dh} = \frac{m_0 g}{k} \frac{d}{dh} \int\limits_{h}^{+\infty} dh = \frac{m_0 g}{k} \left(-1 \frac{dh}{dh} \right) = -\frac{m_0 g N_{\text{A}}}{k N_{\text{A}}} = -\frac{Mg}{R} .$$

Произведя вычисления, получим

$$\frac{dT}{dh} = -33 \cdot 10^{-3} \text{ К/м} = -33 \text{ мК/м}.$$