погрешность измерения высоты $\Delta h/h$, вызванную допущением $T = \text{const}$, по сравнению с погрешностью, вычисляемой по формуле

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\alpha h}{T_0}\right)^{Mg/R\alpha}.$$

Температурный градиент $dT/dh = \alpha = -0{,}006$ К/м, температура у поверхности Земли равна градуировочной.

Ответ: 1) h = 4800 м; 2) $\Delta h/h$ = 5,7 %.

11.9. Идеальный газ с молярной массой $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль находится в очень высоком вертикальном цилиндрическом сосуде в однородном поле тяжести, для которого ускорение свободного падения равно $g = 9{,}8$ м/с^2. Определить высоту $h_{\text{ц.т.}}$, на которой находится центр тяжести газа, считая температуру газа всюду одинаковой и равной T = 300 К.

Ответ: $h_{\text{ц.т.}}$ = 9085,3 м.

11.10. Идеальный газ с молярной массой $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль находится в высоком вертикальном цилиндрическом сосуде, площадь основания которого S = 5 см^2 и высота h = 10 м. Температура газа T = 300 К, его давление на нижнее основание $p_0 = 10^5$ Па. Определить массу газа в сосуде, полагая, что температура и ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2 не зависят от высоты.

Ответ: $m = 5 \cdot 10^{-3}$ кг.

12. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Основные формулы и методические указания

Закон теплопроводности Фурье

$$q_{\text{т}} = -\lambda \frac{dT}{dx}, \tag{12.1}$$

где $q_{\text{т}}$ – плотность теплового потока, dT/dx – градиент температуры в направлении x, λ – коэффициент теплопроводности.

Закон диффузии Фика

$$q_m = -D\frac{d\rho}{dx}, \qquad (12.2)$$

где q_m – плотность потока массы вещества, $d\rho/dx$ – градиент плотности в направлении x, D – коэффициент диффузии.

Плотность потока количества движения (импульса) L, переносимого в направлении x, перпендикулярном скорости υ_z потока массы вещества, определяется законом Ньютона:

$$L = -\eta\frac{d\upsilon_z}{dx}. \qquad (12.3)$$

Соотношение (12.3) можно записать через значение силы трения $F_{тр}$, действующей на единицу площади поверхности, разделяющей два соседних слоя:

$$F_{тр} = -\eta\frac{d\upsilon_z}{dx}, \qquad (12.4)$$

где $d\upsilon_z / dx$ – - градиент скорости, η – коэффициент динамической вязкости.

Как видно из формул (12.1) - (12.4), явления переноса, возникающие в термодинамически неравновесных системах, в результате которых происходит пространственный перенос энергии, массы, импульса, могут быть описаны одним общим выражением

$$C = -A\frac{dB}{dx},$$

где знак «минус» указывает на то, что перенос осуществляется в направлении уменьшения градиента dB/dx.

В разделе приведены, в основном, задачи на явление теплопроводности, имеющее наибольшее практическое значение. Однако, подходы к решению этих задач могут быть использованы и для задач, описывающих процессы диффузии при замене T на ρ и λ на D.

Примеры решения задач

Задача 1. Стена нагревательной печи толщиной d = 0,75 м выполнена целиком из огнеупорного шамотного кирпича с коэффициентом теплопроводности $\lambda_1 = 1$ Вт/(м · К). Определить толщину стены, если ее выполнить двухслойной, сохранив первый слой из того же материала толщиной $d_1 = 0{,}25$ м, а второй сложив из кирпича, изготовленного из неогнеупорного, но малотеплопроводного материала, у которого коэффициент теплопроводности $\lambda_2 = 0{,}1$ Вт/(м · К). Тепловой поток и температуры наружных поверхностей у двухслойной стены те же, что и у однослойной.

Решение. Используем закон теплопроводности Фурье

$$q_{\text{т}} = -\lambda \frac{dT}{dx}.$$

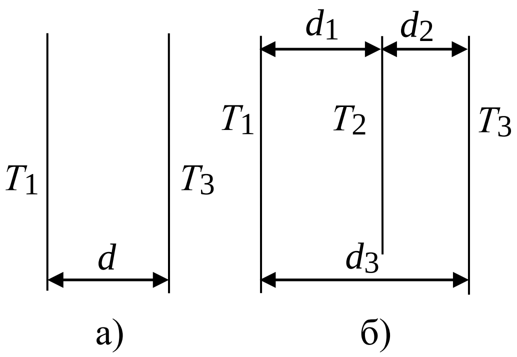

Рис. 12.1

Плотность теплового потока через однослойную стену (рис. 12.1а)

$$q_{\text{т}} = \lambda_1 (T_1 - T_3)/d, \qquad (12.5)$$

через первый слой d_1 двухслойной стены (рис. 12.1б)

$$q_{\text{т}} = \lambda_1 (T_1 - T_2)/d_1, \qquad (12.6)$$

через второй слой d_2 двухслойной стены

$$q_{\text{т}} = \lambda_2 (T_2 - T_3)/d_2. \qquad (12.7)$$

При записи уравнений (12.5)-(12.7) учтено, что тепловой поток $q_{\text{т}}$ и температуры T_1 и T_3 наружных поверхностей у двухслойной стены те же, что и у однослойной.

Переписываем уравнения (12.5), (12.6), (12.7) в виде

$$T_1 - T_3 = q_{\text{т}} \frac{d}{\lambda_1}; \; T_1 - T_2 = q_{\text{т}} \frac{d_1}{\lambda_1}; \; T_2 - T_3 = q_{\text{т}} \frac{d_2}{\lambda_2}.$$

Складываем левые и правые части уравнений:

$$2(T_1 - T_3) = q_т\left(\frac{d}{\lambda_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}\right).$$

Подставим в последнее выражение значение $q_т$ из выражения (12.5) и, преобразования его, получим

$$d_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(d - d_1).$$

Произведя вычисления, получим

$$d_3 = d_1 + d_2 = 0{,}3 \text{ м}.$$

Таким образом, толщина двухслойной стенки печи, сделанной из неогнеупорного, но малотеплопроводного материала (равная 0,3 м), значительно меньше толщины однослойной стены (равной 0,75 м), сделанной целиком из огнеупорного кирпича.

Задача 2. Газ заполняет пространство между двумя длинными коаксиальными цилиндрами, радиусы которых R_1 = 10 см и R_2 = 10,5 см. Внутренний цилиндр неподвижен, а внешний вращают с угловой скоростью w = 80 рад/с (рис. 12.2). Момент сил трения, действующих на единицу длины внутреннего цилиндра, M_1 = 0,2 Н · м. Сила трения, действующая на единицу площади цилиндрической поверхности радиуса r, определяется формулой $f_{тр} = \eta r(\partial w / \partial r)$. Определить вязкость газа.

Решение. По условию задачи сила трения, действующая на единицу площади цилиндрической поверхности произвольного радиуса r, определяется формулой

$$f_{тр} = \eta \cdot r(\partial w / \partial r).$$

Тогда сила трения, действующая на всю площадь поверхности цилиндрического пояса радиусом r единичной высоты, будет равна:

$$F_{тр} = f_{тр} l = \eta \cdot r(\partial w / \partial r) \cdot 2\pi r,$$

где $l = 2\pi r$ – длина окружности радиуса r.

Момент силы трения $M_{тр}$, действующий на эту поверхность, равен:

$$M_{тр} = F_{тр} r = 2\pi\eta \cdot r^3(\partial w / \partial r).$$

По условию задачи

$$M_{\text{тр}} = M_1, \text{ т.е. } M_1 = 2\pi\eta \cdot r^3(\partial w/\partial r).$$

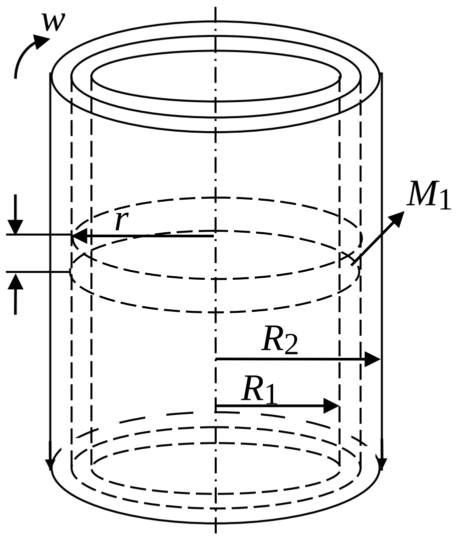

Рис. 12.2

Разделим переменные в этом выражении:

$$\eta \cdot dw = (M_1/2\pi)\cdot(dr/r^3).$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства в пределах, данных в задаче:

$$\eta\int_0^w dw = \frac{M_1}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^3}.$$

Окончательно получим выражение для вычисления вязкости газа η:

$$\eta = \frac{M_1}{4\pi w}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Подставив данные в это выражение и вычислив, найдем $\eta = 9{,}5\cdot 10^{-6}$ кг/(м · с).

Задачи для самостоятельного решения

12.1. Какой толщины должна быть деревянная стена здания, чтобы она давала такую же потерю теплоты, как кирпичная стена толщиной d = 40 см при одинаковой температуре внутри и снаружи здания. Коэффициенты