

Ответ:  $\lambda_{\text{д}} = 727$  пм,  $\lambda_{\text{п}} = 0,396$  пм.

13. Электрон движется со скоростью  $v = 200$  Мм/с. Определить длину волны де-Бройля  $\lambda$ , учитывая изменение массы электрона в зависимости от скорости.

Ответ:  $\lambda = 2,7$  пм.

14. Найти длину волны де-Бройля  $\lambda$  для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

Ответ:  $\lambda = 0,33$  пм.

15. Определить длину волны де-Бройля  $\lambda$  для электрона, находящегося на второй орбите атома водорода.

Ответ:  $\lambda = 0,67$  нм.

16. Вычислить отношение кинетической энергии электрона к кинетической энергии протона с одинаковой длиной волны де-Бройля. Скорости существенно меньше, чем скорость света.

Ответ: 1836.

17. Какую энергию необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от 100 до 50 пм?

Ответ: 0,45 кэВ.

## Занятие № 10

### Тема: Соотношение неопределенностей

#### Краткая теория

Благодаря двойственной корпускулярно-волновой природе вещества для описания микрочастиц используют то волновые, то корпускулярные представления. Поведение микрочастиц не может описываться законами классической физики. В классической механике частица движется по определенной траектории и в любой момент времени точно фиксированы ее координаты и импульс. В квантовой физике понятие «длина волны в данной точке» лишено физического смысла, поэтому микрочастица с определенным импульсом имеет неопределенную координату. И наоборот, если микрочастица находится в состоянии с точным значением координаты, то ее импульс является полностью неопределенным.

Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга, неопределенность импульса частицы, обусловленная ее волновыми свойствами, связана с неопределенностью координаты частицы выражением

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar,$$

где  $\Delta x$  – неопределенность координаты частицы, т.е. интервал возможных значений координаты, определяющей положение частицы в пространстве,  $\Delta p$  – неопределенность импульса частицы, т.е. интервал возможных изменений импульса частицы,  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – постоянная

Планка.

В случае трехмерного пространства соотношение неопределенностей Гейзенберга имеет вид:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar,$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar,$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar.$$

Для энергии и времени соотношение неопределенностей имеет вид:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar,$$

где  $\Delta E$  – неопределенность энергии данного квантового состояния,  $\Delta t$  – время пребывания системы в данном состоянии.

### Примеры решения задач

**Задача 10.1.** Используя соотношение неопределенностей  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$ , оценить нулевой энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять линейные размеры атома  $l \approx 0,1$  нм.

#### Решение

$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг	$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar.$  Электрон находится в области с неопределенностью координаты
$l = 0,01$ нм	
$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с	
$E_{\min} - ?$	

$$\Delta x = l/2.$$

Неопределенность в определении импульса не превышает сам импульс частицы:  $\Delta p \leq p$ . Импульс связан с энергией соотношением

$$p = \sqrt{2mE},$$

тогда

$$\frac{l}{2} \sqrt{2mE} \geq \hbar.$$

Переходя от неравенства к равенству, получаем:

$$E_{\min} = \frac{2\hbar^2}{ml^2},$$

$$E_{\min} = \frac{2 \cdot (1,05 \cdot 10^{-34})^2}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (0,1 \cdot 10^{-9})^2} = 24,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 15 \text{ эВ}.$$

Ответ:  $E_{\min} = 15 \text{ эВ}$ .

**Задача 10.2.** Во сколько раз длина волны де Бройля  $\lambda$  частицы меньше неопределенности  $\Delta x$  ее координаты, которая соответствует относительной неопределенности импульса в 1 %?

### Решение

$\frac{\Delta p}{p} = 0,01$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> $\frac{\Delta x}{\lambda} = ?$	<p>Соотношение неопределенности для координаты и импульса частицы:</p> $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar,$
--	--

по условию,  $\Delta p = 0,01p$ .

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad p = \hbar \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\frac{\Delta x \cdot 0,01 \cdot \hbar \cdot 2\pi}{\lambda} \geq \hbar,$$

$$\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{1}{0,01 \cdot 2\pi} = 16.$$

Ответ: в 16 раз.

**Задача 10.3.** Определить неточность  $\Delta x$  в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью  $v = 1,5 \cdot 10^6$  м/с, если допускаемая неточность  $\Delta v$  в определении импульса составляет 10 % от ее величины. Сравнить полученную неточность с диаметром  $d$  атома водорода, вычисленным по теории Бора для основного состояния. Указать, применимо ли понятие траектории в данном случае.

### Решение

$v = 1,5 \cdot 10^6$ м/с $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг $\frac{\Delta v}{v} = 0,1$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> $\Delta x - ?$	Неопределенность координаты и импульса электрона связаны соотношением:  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar,$  $\Delta p = m \Delta v,$
---	---

по условию задачи  $\Delta v = 0,1v$ , тогда

$$\Delta x = \frac{\hbar}{m \cdot 0,1v},$$

$$\Delta x = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 0,1 \cdot 1,5 \cdot 10^6} = 0,77 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 0,77 \text{ нм}.$$

Диаметр атома водорода  $d = 10,5 \cdot 10^{-11}$  м = 0,105 нм. Так как  $\Delta x > d$ , то понятие траектории в данном случае не применимо.

Ответ:  $\Delta x = 0,77$  нм,  $d = 0,105$  нм; так как  $\Delta x > d$ , то понятие траектории в данном случае не применимо.

**Задача 10.4.** Используя соотношение неопределенностей, определить наименьшую неточность, с которой можно вычислить координату электрона в атоме. Средняя кинетическая энергия электрона в невозбужденном атоме водорода равна 13,6 эВ.

### Решение

$T = 13,6$ эВ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> $\Delta x_{\text{наим}} - ?$	Соотношение неопределенностей для координаты и импульса имеет вид
---	---

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar.$$

Неточность координаты частицы:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p_x}.$$

Энергия покоя частицы (электрона)  $E_0 = m_0 c^2 = 0,511$  МэВ, значит,  $T \ll E_0$ . При этом условии электрон является нерелятивистской частицей.

Связь импульса с кинетической энергией в нашем случае

$$p = \sqrt{2mT}.$$

Это модуль вектора импульса. Проекция  $p_x$  на ось  $x$  оказывается неопределенной, так как ее величина изменяется в интервале  $(-p; p)$ .

Поэтому за определенность импульса  $\Delta p_x$  можно взять величину, не превышающую значение самого импульса

$$\Delta p_x \leq p_x.$$

Отсюда величина  $\Delta x$  выразится так:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\sqrt{2mT}},$$

$$\Delta x \geq \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Ответ: наименьшая допускаемая соотношением неопределенностей неточность  $\Delta x_{\text{наим}}$ , с которой можно определить координату электрона в атоме водорода есть величина порядка  $5 \cdot 10^{-11}$  м.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Используя соотношение неопределенностей, оценить кинетическую энергию нуклона в ядре, полагая радиус ядра равным  $10^{-12}$  см.

Ответ:  $T = 0,21$  МэВ.

2. Электрон движется в атоме водорода по первой боровской орбите. Принимая, что допускаемая неопределенность скорости составляет 1 % от ее числового значения, определить неопределенность координаты электрона. Применимо ли в данном случае для электрона понятие траектории?

Ответ:  $\Delta x = 0,33$  нм; нет.