1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Основные формулы и методические указания

Кинематика – раздел механики, рассматривающий движение тела без учета причин, вызывающих это движение.

Положение материальной точки в системе отсчета задается двумя способами: векторным и координатным. Через радиус-вектор $\vec{r}$ координаты точки определяются:

$$x = |\vec{r}|\cos\alpha,$$

$$y = |\vec{r}|\sin\alpha.$$

Перемещение точки за время $\Delta t = t_1 - t_0$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{\upsilon}(t)dt.$$

Мгновенная скорость движущейся точки

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Вектор мгновенной скорости характеризует скорость изменения радиус-вектора точки и направлен по касательной к траектории. Модуль мгновенной скорости

$$|\vec{\upsilon}| = \frac{dS}{dt} \quad (\text{при } \Delta t \to 0 \ |d\vec{r}| = dS).$$

изменение скорости

$$\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t_1) - \vec{\upsilon}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)dt.$$

Ускорение материальной точки $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$.

В случае равномерного движения $\vec{\upsilon} = \text{const}$ и $\vec{a} = 0$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{\upsilon}\Delta t, \ \ \Delta\vec{\upsilon} = 0.$$

В случае прямолинейного движения

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = S = \upsilon\Delta t\,.$$

В случае криволинейной траектории вектор ускорения $\vec{a}$ характеризует скорость изменения $\vec{\upsilon}$ по модулю и по направлению:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau;$$

модуль полного ускорения:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2}\,.$$

$\vec{a}_n$ характеризует скорость изменения направления $\vec{\upsilon}$ – это нормальное или центростремительное ускорение и направлено по нормали к траектории

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R},$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке a_τ характеризует скорость изменения модуля $\vec{\upsilon}$ – называется тангенциальным или касательным ускорением и направлено по касательной к траектории.

$$a_\tau = \frac{d\left|\vec{\upsilon}\right|}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}.$$

Кинематическое уравнение движения – зависимость радиуса-вектора материальной точки от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Проекции векторного уравнения на координатные оси дают в общем случае закон движения:

$$x = x(t),\;\; y = y(t),\;\; z = z(t)\,.$$

В случае равнопеременного движения $\vec{a} = \text{const}$, тогда

$$\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t_1) - \vec{\upsilon}(t_0) = \vec{a}\Delta t;$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0) = \vec{\upsilon}\Delta t \pm \frac{\vec{a}(\Delta t)^2}{2}\,.$$

Закон движения в этом случае имеет вид:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t \pm \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор, определяющий начальное положение точки при $t = 0$.

1.1. Прямолинейное движение

Закон движения в проекции на ось x, направленную вдоль траектории, имеет вид:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t,$$

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{\upsilon}_0$ равен 0 или π.

$$\begin{cases} \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \\ a_x = a. \end{cases}$$

В этом случае движение равноускоренное.

Если ось x направлена вдоль вектора $\vec{\upsilon}_0$, $\vec{a}$ и $\vec{\upsilon}_0$ противонаправлены, то движение равнозамедленное:

$$\begin{cases} \upsilon_{0x} = \upsilon_0, \\ a_x = -a, \end{cases} .$$

В этом случае

$$\upsilon_к = \upsilon_0 - at,$$

$$S = \upsilon_0 t - \frac{at^2}{2},$$

$$\pm 2aS = \upsilon_к^2 - \upsilon_0^2,$$

где υ_0 и $\upsilon_к$ – модули начальной и конечной скоростей, a – модуль ускорения, S – пройденный путь.

1.2. Криволинейное движение

Для рассмотрения криволинейного движения необходимо ввести две оси координат X и Y. Тогда в случае $|\vec{a}| = \text{const}$ скорость изменяется по осям X и Y:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t; \;\; x = x_0 + \upsilon_x t + \frac{a_x t^2}{2};$$

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t; \;\; y = y_0 + \upsilon_y t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Классический закон сложения скоростей:

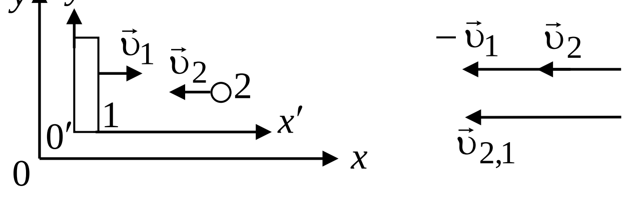
$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}.$$

Средняя скорость движения $\langle \upsilon \rangle = \frac{S}{t}$.

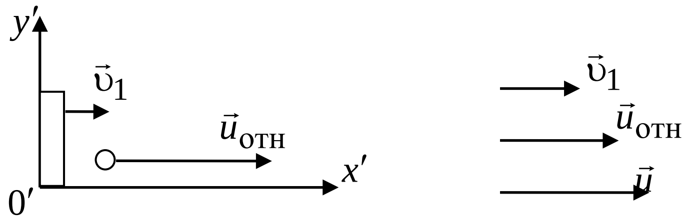
Примеры решения задач

Задача 1. Массивная стенка движется со скоростью $\vec{\upsilon}_1$. Навстречу ей со скоростью $\vec{\upsilon}_2$ летит шарик. Происходит абсолютно упругое столкновение, причем скорость стенки не меняется. Найдите модуль скорости $|\vec{u}|$ отскочившего шарика.

Решение. Если бы стенка была неподвижна, то при абсолютно упругом столкновении скорость отскочившего шарика была бы равна $|\vec{\upsilon}_2|$. Скорость шарика и стенки заданы относительно Земли. Свяжем подвижную систему отсчета со стенкой (рис. 1а).



а) б)



в) г)

Рис. 1.1

Тогда скорость шарика относительно стенки равна (рис. 1.1б)

$$\vec{\upsilon}_{2,1} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2 + (-\vec{\upsilon}_1).$$

Модуль этой скорости равен

$$\upsilon_{2,1} = \upsilon_2 + \upsilon_1.$$

В системе отсчета, связанной со стенкой, шарик отскочит со скоростью $\vec{u}_{\text{отн}}$, причем $|\vec{u}_{\text{а}}| = \upsilon_{2,1} = \upsilon_2 + \upsilon_1$ (рис. 1.1в).

Для нахождения скорости шарика относительно Земли, имеем

$$\vec{\upsilon}_{\text{абс}} = \vec{\upsilon}_{\text{отн}} + \vec{\upsilon}_{\text{пер}},$$

где $\vec{\upsilon}_{\text{абс}}$ – скорость шарика относительно Земли, т.е. та скорость $\vec{u}$, которую необходимо найти, $\vec{\upsilon}_{\text{пер}}$ – скорость стенки, т.е. $\vec{\upsilon}_{\text{пер}} = \vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_{\text{отн}}$ – скорость шарика после отскока относительно стенки (на рис. 1.1в это $\vec{u}_{\text{отн}}$).

Таким образом,

$$\vec{u} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{u}_{\text{отн}},$$

а в скалярном виде:

$$u = \upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_1 = 2\upsilon_1 + \upsilon_2.$$

$$|\vec{u}| = 2\upsilon_1 + \upsilon_2.$$

Задача 2. Для задания вектора в декартовой системе координат используются координатные орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, т.е. единичные векторы, направленные соответственно вдоль координатных осей *x*, *y*, *z*. Как будут выражаться через эти орты следующие векторы: радиус-вектор, вектор перемещения, вектор скорости, вектор ускорения?

Решение. Радиус-вектор $\vec{r}$ проводится из начала координат в некоторую точку с координатами x, y, z. Эти координаты являются проекциями радиуса-вектора на соответствующие оси. Значит,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \, .$$

Вектор перемещения соединяет две точки пространства с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 и

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} - x_1\vec{i} - y_1\vec{j} - z_1\vec{k} =$$
$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \, .$$

Скорость $\quad \vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)\vec{k} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k} \, .$

Ускорение

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)\vec{k} = \left(\frac{d\upsilon_x}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{\upsilon_y}{dt}\right)\vec{j} + \left(\frac{\upsilon_z}{dt}\right)\vec{k} =$$
$$= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \, .$$

Задача 3. Камень брошен с высоты $h = 2{,}1$ м под углом $\alpha = 45°$ к горизонту и падает на землю на расстоянии $S = 42$ м. Найти начальную скорость υ_0 камня, время полета $t_{пол}$ и максимальную высоту H подъема над уровнем Земли. Определить радиусы кривизны траектории в верхней точке и в точке падения камня на землю.

Решение. Движение камня, происходящее по параболе, можно рассматривать как сумму двух независимых движений: равномерное движение по горизонтали (по оси x) и равнопеременное по вертикали (по оси y). Начало отсчета удобно выбрать в точке бросания. Ось y направлена вертикально вверх.

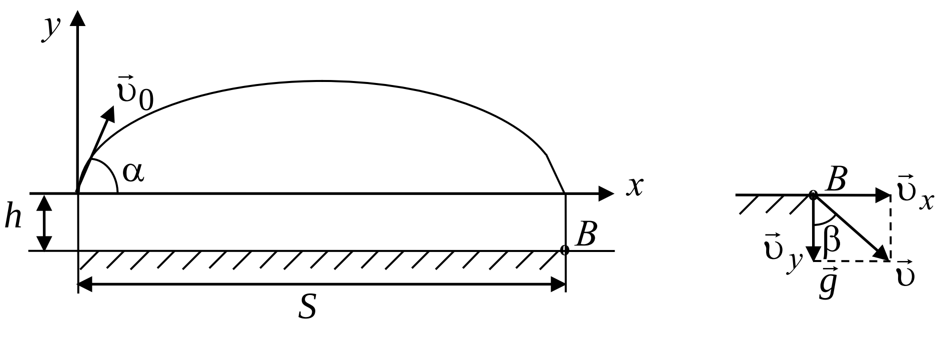


Рис. 1.2

Для движения камня по оси x имеем

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha = \text{const}; \; x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t,$$

при $t = t_{\text{пол}}, \quad x = S$.

Следовательно,

$$S = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t_{\text{пол}}. \tag{1.1}$$

Для движения камня по оси y

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt, \tag{1.2}$$

$$y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \tag{1.3}$$

при $t = t_{\text{пол}}, \quad y = -h$, следовательно,

$$-h = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_{\text{пол}} - \frac{g(t_{\text{пол}})^2}{2}, \tag{1.4}$$

$$\upsilon_{yB} = \upsilon_0 \sin\alpha - gt_{\text{пол}}. \tag{1.5}$$

Из уравнений (1.1) и (1.4) находим:

$$t_{\text{пол}} = \sqrt{\frac{2(h + S\text{tg}\alpha)}{g}} = 3 \text{ с},$$

$$\upsilon_0 = \frac{S}{\tau\cos\alpha} = 20 \text{ м/с}.$$

Высота подъема камня над Землей находится из соотношения:

$$H = h + y_{\max}.$$

$y = y_{\max}$ находим из условия $\upsilon_y = 0$ и $t = t_1$. В уравнение (1.2) подставляем $\upsilon_y = 0$ и находим время подъема t_1:

$$t_1 = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}.$$

Подставляем t_1 в уравнение (1.4), получаем

$$y_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad H = h + \frac{\upsilon_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 12 \text{ м.}$$

Определим направление векторов полного ускорения и скорости и величины a_n и a_τ в точках траектории, указанных в условии задачи. В верхней точке траектории $\upsilon_y = 0$, $\upsilon = \upsilon_x$.

Следовательно, векторы ускорения и скорости взаимно перпендикулярны. Это значит, $a_\tau = 0$ и $a_n = g$. Найдем радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке:

$$R_1 = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{\upsilon_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = 20 \text{ м.}$$

В конечной точке траектории $\sin \beta$ (угла между векторами скорости и ускорения) равен

$$\sin \beta = \frac{\upsilon_x}{\upsilon_y}.$$

Разложим вектор полного ускорения $\vec{g}$ на тангенциальное $a_\tau = g \cos \beta$ и нормальное $a_n = g \sin \beta$, тогда радиус кривизны траектории в этой точке

$$R_2 = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{\upsilon^2}{\upsilon_x g}.$$

Скорость υ в точке падения на землю определяется по формуле

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 \cos^2 \alpha + \left(\upsilon_0 \sin \alpha - g t_{\text{под}}\right)^2} = 21 \text{ м/с.}$$

Находим $R_2 = 63$ м.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Найти скорость υ относительно берега лодки, идущей по течению, против течения и под углом $\alpha = 90°$ к направлению течения. Скорость течения реки u = 1 м/с, скорость лодки относительно воды $\upsilon_0 = 2$ м/с.

Ответ: а) υ = 3 м/с, б) υ = 1 м/с, в) υ = 2,24 м/с.

1.2. Радиус-вектор точки изменяется со временем по закону: $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$. Найти скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение $\vec{a}$ точки, модуль скорости υ в момент $t = 2$ с, приближенное значение пути S, пройденного точкой за десятую секунду движения.

Ответ: $\vec{\upsilon} = 4t\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{a} = 4i$, $|\vec{\upsilon}| = 8$ м/с, $S = 38$ м.

1.3. Небольшое тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

а) дальность полета;

б) наибольшую высоту подъема H;

в) время подъема до максимальной точки t_n и время полета τ;

г) уравнение траектории тела.

Ответ: а) $l = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, б) $H_{\max} = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin\alpha}{2g}$, в) $t_n = \dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$,

$$\tau = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}, \text{ г) } y(x) = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{g(1+tg^2\alpha)}{2\upsilon_0^2}x^2.$$

1.4. С аэростата, находящегося на высоте h = 300 м, упал камень. Через какое время t камень достигнет земли, если: а) аэростат поднимается со скоростью $\upsilon = 5$ м/с; б) аэростат опускается со скоростью $\upsilon = 5$ м/с; в) аэростат неподвижен?

Ответ: а) t = 8,4 с, б) t = 7,3 с, в) t = 7,8 с.

1.5. Камень брошен с земли со скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с под углом $\alpha_0 = 60°$ к горизонту. Определить скорость камня υ через $t = 0{,}5$ после броска. Какой угол α образует в этот момент вектор скорости $\vec{\upsilon}$ с горизонтом? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\upsilon = 6{,}4$ м/с, $\alpha = 36°$.

1.6. Мяч брошен со скоростью υ_0 под углом α к горизонту. Найти υ_0 и α, если максимальная высота подъема мяча h = 3 м, а радиус кривизны траектории мяча в этой точке R = 3 м.

Ответ: $\upsilon_0 = \sqrt{gR(1+\mathrm{tg}^2\alpha)} = 9{,}4$ м/с, $\alpha = 54°44'$.

1.7. Массивная стенка движется со скоростью $\vec{\upsilon}_1$. Навстречу ей со скоростью $\vec{\upsilon}_2$ летит шарик. Происходит абсолютно упругое столкновение, причем скорость стенки не меняется. Найдите модуль скорости $|\vec{u}|$ отскочившего шарика.

Ответ: $|\vec{u}| = \upsilon_2 + 2\upsilon_1$.

1.8. Над колодцем глубиной $h = 10$ м бросают вертикально вверх камень с начальной скоростью $\upsilon_{нач} = 14$ м/с. Через какое время камень достигает дна колодца?

Ответ: 3,4 с.

1.10. Материальная точка движется по окружности радиуса 4 м. Зависимость пути от времени задана уравнением $S = Ct^3$, где C = 0,02 м/с^3. Найти ускорение и его тангенциальную и нормальную составляющие в момент, когда скорость точки равна $\upsilon_1 = 6$ м/с.

Ответ: $a_1 \approx 9{,}08$ м/с^2, $a_{\tau_1} = 1{,}2$ м/с^2, $a_{n_1} = 9$ м/с^2.

1.11. По наклонной доске пустили катиться снизу вверх маленький шарик. На расстоянии l = 30 см шарик побывал дважды: через $t_1 = 1$ с и через $t_2 = 2$ с после начала движения. Определить начальную скорость шарика υ_0 и ускорение a, считая движение равнопеременным.

Ответ: $\upsilon_0 = 0{,}45$ м/с, $a = 0{,}3$ м/с^2.

2. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Основные формулы и методические указания

При вращательном движении в общем случае угловая скорость:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Движение по окружности:

$$\Delta\varphi = \frac{l}{R}, \ \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \ \upsilon = \omega R, \ a_n = \omega^2 R, \ \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \omega', \ a_\tau = \varepsilon R.$$

В случае равномерного вращательного движения

$$\omega = \text{const}, \ \ \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T},$$

где T – период обращения, ν – частота обращения (число оборотов в единицу времени).

Примеры решения задач

Задача 1. Путь, пройденный материальной точкой при ее равномерном движении по окружности изменяется с течением времени по закону $S = 6{,}28t$. Найти частоту оборотов точки ν, если радиус окружности R = 10 см.

Решение. При равномерном движении материальной точки по окружности

$$S = \upsilon t,$$

по условию S = 6,28t м, значит 6,28 – это модуль линейной скорости точки: $\upsilon = 6{,}28$ м/с. Тогда угловая скорость определяется из соотношения

$$\upsilon = \omega R, \ \ \omega = \frac{\omega}{R}, \quad \text{но} \ \ \omega = 2\pi\nu,$$

значит,

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\upsilon}{2\pi R} = 10 \ \text{с}^{-1}.$$

Задача 2. Вентилятор вращается с частотой $n = 900$ об/мин. После включения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки N = 70 оборотов. Какое время t прошло с момента выключения вентилятора до его полной остановки.

Решение. n = 900 об/мин = 15 об/с.

Уравнение движения в скалярном виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{2.1}$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t. \tag{2.2}$$

Учитывая

$$\varphi = 2\pi N, \tag{2.3}$$

$$\omega = 0,\ \ \omega_0 = 2\pi n, \tag{2.4}$$

из уравнения (2.2) находим

$$t = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{2\pi n}{\varepsilon}. \tag{2.5}$$

Подставим это в уравнение движения (2.1):

$$2\pi N = \frac{(2\pi n)^2}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon(2\pi n)^2}{2\varepsilon^2} = \frac{(2\pi n)^2}{2\varepsilon}.$$

Находим из этого уравнения ε:

$$\varepsilon = \frac{\pi n^2}{N}.$$

Подставляем значение ε в уравнение (2.5):

$$t = \frac{2\pi n \cdot N}{\pi n^2} = \frac{2N}{n} = 10 \text{ с}.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Найти угловые скорости: 1) суточного вращения Земли; 2) часовой стрелки на часах; 3) минутной стрелки на часах; 4) искусственного спутника Земли, вращающегося по круговой орбите с периодом обращения T = 88 мин; 5) линейную скорость движения этого искусственного спутника, если известно, что его орбита расположена на расстоянии 200 км от поверхности Земли.

Ответ: 1) $7{,}26 \cdot 10^{-5}$ рад/с, 2) $14{,}5 \cdot 10^{-5}$ рад/с, 3) $1{,}74 \cdot 10^{-3}$ рад/с, 4) $1{,}19 \cdot 10^{-3}$ рад/с, 5) 7,8 км/с.

2.2. Ось с двумя дисками, расположенными на расстоянии $l = 0{,}5$ м друг от друга, вращается с угловой скоростью, соответствующей частоте $\nu = 1600$ об/мин. Пуля, летящая вдоль оси, пробивает оба диска, при этом отверстие от пули во втором диске смещено относительно отверстия в первом диске на угол φ = 12°. Найти скорость пули.

Ответ: υ = 400 м/с.

2.3. Маховое колесо спустя $t = 1$ мин после начала вращения приобретает скорость, соответствующую ν = 720 об/мин. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов колеса за эту минуту. Движение считать равноускоренным.

Ответ: $\varepsilon = -0{,}21$ рад/с^2, $N = 240$ об.

2.4. Угол поворота диска радиусом $R = 10$ см изменяется по закону $\varphi = 4 + 2t - t^3$. Определить зависимость от времени угловой скорости, углового ускорения и линейной скорости точек диска.

Ответ: $\omega = 2 - 3t^2$, $\upsilon = R(2 - 3t^2) = 0{,}2 - 0{,}3t^2$, $\varepsilon = -6t$.

2.5. Найти радиус R вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость υ_1 точки, лежащей на ободе, в 2,5 раза больше линейной скорости υ_2 точки, лежащей на 5 см ближе к оси колеса.

Ответ: $R = 8{,}33$ см.

2.6. Точка движется по окружности с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 1$ рад/с^2. Найти угол между скоростью и ускорением через $t = 1$ с после начала движения. Начальная скорость точки (при $t_0 = 0$) $\upsilon_0 = 0$.

Ответ: $\alpha = \mathrm{arctg}(\varepsilon t^2) = 45^\circ$.

2.7. Скорость материальной точки меняется по закону $\vec{\upsilon} = 3t\vec{i} - 4\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные векторы, направленные по осям X и Y соответственно. Найдите нормальное ускорение a_n, тангенциальное ускорение a_τ и радиус кривизны R траектории в произвольный момент времени t.

Ответ: $a_n = \dfrac{12}{\sqrt{9t^2 + 16}}$, $a_\tau = \dfrac{9t}{\sqrt{9t^2 + 16}}$, $R = \dfrac{(9t^2 + 16)^{3/2}}{12}$.

2.8. Поезд движется по закруглению радиусом $R = 100$ м, причем зависимость его координаты от времени дается уравнением $x = Ct^3$, где $C = 10$ м/с^3 – постоянная величина. Найти полное ускорение поезда a в тот момент, когда его скорость $\upsilon = 54$ км/ч.

Ответ: $a = 4{,}8$ м/с^2.

2.9. Круглая платформа, расположенная горизонтально, вращается вокруг своей вертикальной оси, делая $N = 6$ оборотов за $t = 3$ с. К платформе движется прямолинейно и равномерно тележка со скоростью $\upsilon_1 = 2$ м/с. Найти скорость тележки относительно наблюдателя, расположенного в центре платформы, в тот момент, когда от нее до края платформы осталось $S = 4$ м. Радиус платформы $R = 2$ м, наблюдатель вращается вместе с ней.

Ответ: $\upsilon = 75$ м/с.

2.10. Цилиндр плотно прижат сверху и снизу к двум параллельным рейкам, расположенным горизонтально, и может катиться по ним без проскальзывания (рис. 2.2). Верхняя рейка движется со скоростью υ_1, а нижняя – с меньшей скоростью υ_2. С какой скоростью υ будет двигаться цилиндр?

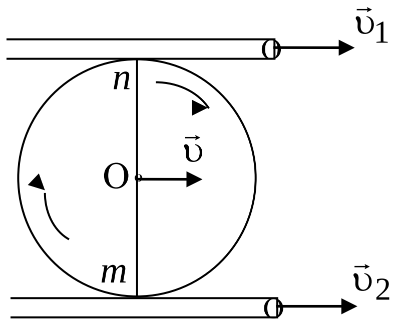


Рис. 2.2

Ответ: $\upsilon = 0{,}5(\upsilon_1 + \upsilon_2)$.

---

3. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные формулы и методические указания

Динамика – раздел механики, в котором рассматриваются законы движения с учетом причин, обуславливающих характер данного движения.

Второй закон Ньютона или основной закон динамики материальной точки

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{md\vec{\upsilon}}{dt},$$

где $\vec{F}$ – результирующая сила, действующая на материальную точку.

Основной закон динамики поступательного движения твердого тела:

$$\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F}_{\text{внешн}}.$$

Если m = const, то

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{1}{m} \cdot \vec{F}_{\text{внешн}}.$$

Второй закон Ньютона для вращательного движения материальной точки:

$$F_n = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R,$$

где υ – линейная скорость, ω – угловая скорость, R – радиус кривизны траектории в данной точке.

Сила гравитационного притяжения двух материальных точек:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2},$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2 – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы точек, R – расстояние между ними.

Сила тяжести:

$$F = mg.$$

Сила трения

$$\left|F_{\text{тр}}\right| = kN,$$

где k – коэффициент трения, N – сила реакции опоры.

Сила упругости при деформациях

$$F = -k_{\text{упр}} x,$$

где $k_{\text{упр}}$ – коэффициент упругости, зависящий от материала и формы деформирующего тела, x – величина деформации тела.

При анализе задач и составлении алгебраических соотношений особое внимание следует обратить на векторный характер ряда величин, входящих в формулы. Для полного определения этих величин необходимо учитывать не только их числовое значение, но и направление.

Для упрощения уравнений нужно использовать разложение векторов скорости ускорения, силы на составляющие по каким-либо двум направлениям, чаще всего взаимно перпендикулярным.

Примеры решения задач

Задача 3. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α = 45°. Зависимость пройденного пути *S* от времени *t* дается уравнением $S = Ct^2$, где C = 1,73 м/с^2. Найти коэффициент трения *k* тела о плоскость.

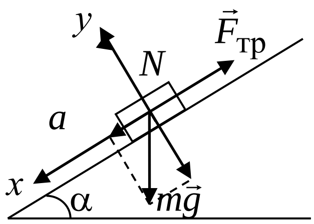


Рис. 3.1

Решение. По второму закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}$. Зададим направление оси *X* вдоль наклонной плоскости, а оси *Y* перпендикулярно к ней (рис. 3.1) и запишем уравнение движения тела в проекциях на эти оси:

по *X*: $$mg\sin\alpha - F_{тр} = ma, \tag{3.1}$$

по *Y*: $$N - mg\cos\alpha = 0. \tag{3.2}$$

Сила трения $F_{тр} = kN$, с учетом (3.2), $F_{тр} = mg\cos\alpha$.

Уравнение (3.1) примет вид:

$$mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha = ma,$$

откуда

$$k = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha}. \tag{3.3}$$

Ускорение можно найти как вторую производную пути по времени:

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = 2C. \tag{3.4}$$

Подставив (3.4) в (3.3), получим

$$k = \frac{g\sin\alpha - 2C}{g\cos\alpha} = 0{,}5.$$

Задача 4. Камень, привязанный к веревке, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти массу m камня, если известно, что разность между максимальной и минимальной силами натяжения веревки ΔT = 10 Н.

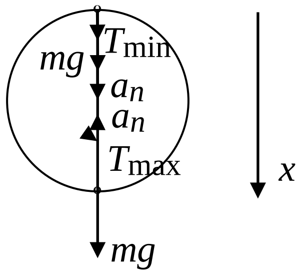


Рис. 3.2

Решение. По второму закону Ньютона для верхней и нижней точек соответственно

$$\left.\begin{aligned} mg + T_{\min} &= ma_n \qquad (3.5) \\ mg - T_{\max} &= -ma_n \qquad (3.6) \end{aligned}\right\}$$

Сложив (3.5) и (3.6), получим $2mg - \Delta T = 0$, откуда

$$m = \frac{\Delta T}{2g} = 0{,}5 \text{ кг.}$$

Задача 5. Через неподвижный блок перекинута нерастяжимая нить, к одному концу которой прикреплен груз массы m_0, а к другому в первый раз присоединили пружину с подвешенным к ней грузом массы m_1 (рис. 3.3а), во второй раз – пружину, имеющую другую жесткость, с подвешенным к ней грузом массы m_2 (рис. 3.3б), а в третий раз последовательно к первой пружине с подвешенным грузом массы m_1 присоединили вторую пружину с подвешенным грузом массы m_2 (рис. 3.3в).

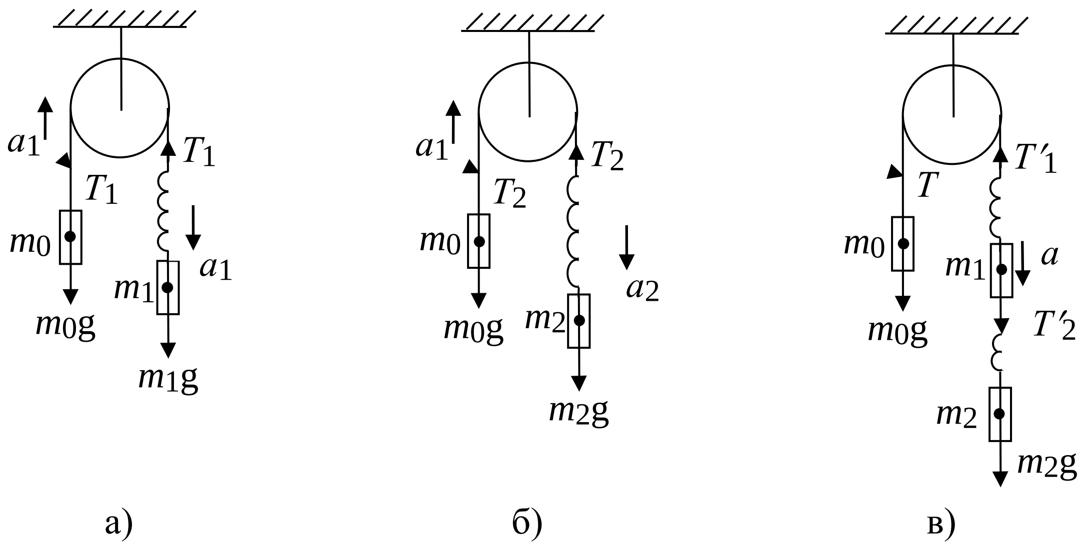


Рис. 3.3

В первый раз удлинение пружины равно x_1, во второй раз – x_2. Каково суммарное удлинение пружины x в третий раз? Рассматривать установившееся движение грузов (т.е. в отсутствие колебаний). Массой блока, нити и пружин пренебречь.

Решение. По второму закону Ньютона в первых двух случаях (а и б) имеем

$$m_1 g - k_1 x_1 = m_1 a_1, \tag{3.7}$$

$$m_0 g - T_1 = -m_0 a_1. \tag{3.8}$$

Так как сила натяжения T_1 равна силе упругости

$$|T_1| = |k_1 x_1|,$$

где k_1 – жесткость пружины в 1-ом случае.

При совместном решении уравнений (3.7) и (3.8), получим

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_0)g}{m_1 + m_0}, \tag{3.9}$$

$$m_2 g - k_2 x_2 = m_2 a_2, \tag{3.10}$$

$$m_0 g - T_2 = -m_0 a_2. \tag{3.11}$$

Аналогично

$$|T_2| = |k_2 x_2|,$$

где k_2 – жесткость причины во 2-ом случае, получим

$$a_2 = \frac{(m_2 - m_0)g}{m_2 + m_0}. \quad (3.12)$$

В третьем случае

$$\left.\begin{aligned} m_0 g - T &= -m_0 a \quad (3.13)\\ m_1 g - T_1' + T_2' &= m_1 a \quad (3.14)\\ m_2 g - T_2' &= m_2 a \quad (3.15)\end{aligned}\right\}$$

где T – сила натяжения нити, прикрепленной к грузу массой m_0, T_1' и T_2' – силы упругости пружин жесткости k_1 и k_2.

При совместном решении системы уравнений (3.13), (3.14), (3.15), получим

$$a = \frac{(m_1 + m_2 - m_0)g}{m_1 + m_2 + m_0}. \quad (3.16)$$

Так как $T_1' = k_1 x_1'$, $T_2' = k_2 x_2'$, где x_1' и x_2' – удлинения пружин при последовательном соединении грузов, то общее удлинение пружин:

$$x = x_1' + x_2' = \frac{T_1'}{k_1} + \frac{T_2'}{k_2}. \quad (3.17)$$

Из системы уравнений (3.14) и (3.15)

$$T_1' = (m_1 + m_2)(g - a)$$

с учетом (3.16)

$$T_1' = \frac{(m_1 + m_2)2m_0 g}{m_1 + m_2 + m_0}. \quad (3.18)$$

Из уравнения (3.15)

$$T_2' = m_2(g - a)$$

с учетом (3.16)

$$T_1' = \frac{m_2 2m_0 g}{m_1 + m_2 + m_0}. \quad (3.19)$$

Из уравнения (3.8)

$$k_1 = \frac{m_0}{x_1}(g + a_1)$$

с учетом (3.9)

$$k_1 = \frac{m_0 2m_1 g}{x_1(m_1 + m_2)}. \quad (3.20)$$

Аналогично из (3.11) с учетом (3.12)

$$k_2 = \frac{m_0}{x_2}(g + a_2) = \frac{m_0 2m_2 g}{x_2(m_2 + m_0)}. \quad (3.21)$$

После подстановки в выражение (3.17) соответствующих формул (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), получим

$$x = \frac{(m_1 + m_2)2m_0 g \cdot x_1(m_1 + m_0)}{(m_1 + m_2 + m_0)m_0 2m_1 g} + \frac{m_2 2m_0 g \cdot x_2(m_2 + m_0)}{(m_1 + m_2 + m_0)m_0 2m_2 g} =$$

$$= \frac{(m_1 + m_2)(m_1 + m_0)x_1 + (m_2 + m_0)m_1 x_2}{m_1(m_1 + m_2 + m_0)}.$$

Задача 6. Гирька, привязанная к нити длиной $l = 30$ см, описывает в горизонтальной плоскости окружность радиусом $R = 15$ см. С какой частотой n вращается гирька?

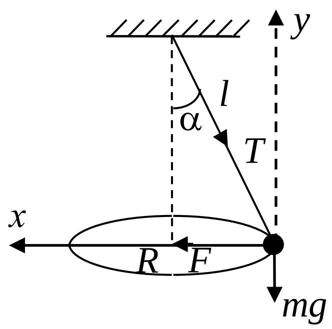


Рис. 3.4

Решение. В горизонтальной плоскости на гирьку действует сила $F = T\sin\alpha$. По второму закону Ньютона уравнения движения гирьки по осям X и Y:

$$T\sin\alpha = ma_n, \quad (3.22)$$

$$T\cos\alpha - mg = 0. \qquad (2.23)$$

При совместном решении (3.22) и (3.23), получим

$$a_n = \frac{g\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (2.24)$$

Поскольку $\sin\alpha = \dfrac{R}{l}$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\dfrac{R^2}{l^2}}$:

$$a_n = \frac{gR}{l\sqrt{1-\dfrac{R^2}{l^2}}} = \frac{gR}{\sqrt{l^2-R^2}}. \qquad (2.25)$$

С другой стороны

$$a_n = \omega^2 R = 4\pi^2 n^2 R,$$

откуда
$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{a_n / R}$$

с учетом (2.25)

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2-R^2}}} = 0{,}98 \text{ об/с}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.1. К нити подвешена гиря. Если поднимать гирю с ускорением a_1 = 2 м/с^2, то сила натяжения нити T_1 будет вдвое меньше той силы натяжения T_2, при которой нить разорвется. С каким ускорением a_2 надо поднимать гирю, чтобы нить разорвалась.

Ответ: a_2 = 13,8 м/с^2.

3.2. Какую силу F надо приложить к вагону, стоящему на рельсах, чтобы вагон стал двигаться равноускоренно и за время t = 30 с прошел путь S = 11 м. Масса вагона m = 16 т. Во время движения на вагон действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,05 действующей на него силы тяжести.

Ответ: F = 8,2 кН.

3.3. Тело массой m = 0,5 кг движется так, что зависимость пройденного телом пути S от времени t дается уравнением $S = A = \sin \omega t$, где A = 5 см и $\omega = \pi$ рад/с. Найти силу F, действующую на тело через время t = 1/6 с после начала движения.

Ответ: F = – 0,125 Н.

3.4. Тело лежит на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 4°$. При каком предельном коэффициенте трения k тело начнет скользить по наклонной плоскости? С каким ускорением a будет скользить тело по плоскости, если коэффициент трения $k = 0{,}03$? Какое время t потребуется для прохождения при этих условиях пути S = 100 м? Какую скорость υ будет иметь тело в конце пути?

Ответ: $k \le 0{,}07$, $a = 0{,}39$ м/с^2, $t = 22{,}6$ с, $\upsilon = 8{,}8$ м/с.

3.5. Две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через невесомый блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением в блоке пренебречь.

Ответ: T = 13 Н, a = 3,27 м/с^2.

3.6. Невесомый блок укреплен на конце стола. Тела 1 и 2 одинаковой массы m = 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения тела 2 о стол k = 0,1. Найти ускорение a, с которым движутся тела, и силу натяжения нити T. Трением в блоке пренебречь.

Ответ: a = 4,4 м/с^2, T = 5,4 Н.

3.7. Невесомый блок укреплен в вершине наклонной плоскости, составляющий с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Тела одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения тела 2 о наклонную плоскость k = 0,1. Найти ускорение a, с которым движутся тела, и силу натяжения нити T.

Ответ: a = 2,02 м/с^2, T = 7,78 Н.

3.8. Камень, привязанный к веревке длиной l = 50 см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. При какой частоте вращения n веревка разорвется, если известно, что она разрывается при десятикратной силе тяжести, действующей на камень?

Ответ: n = 2,12 с$^{-1}$.

3.9. Гирька массой m = 50 г, привязанная к нити длиной l = 25 см, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Частота вращения гирьки n = 2 об/с. Найти силу натяжения нити T.

Ответ: T = 1,96 Н.

3.10. С какой линейной скоростью υ будет двигаться искусственный спутник Земли по круговой орбите: а) у поверхности Земли, б) на высоте h_1 = 200 км и h_2 = 7000 км от поверхности Земли. Найти период обращения T спутника Земли при этих условиях. Считать радиус Земли равным 6400 км.

Ответ: $\upsilon = 7{,}91$ км/с, $\upsilon_{h_1} = 7{,}79$ км/с, $\upsilon_{h_2} = 5{,}46$ км/с, $T_1 = 12{,}25$ мин, $T_2 = 1$ ч 28 мин, $T_3 = 4$ ч 16 мин.

4. ИМПУЛЬС. ИМПУЛЬС СИЛЫ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Основные формулы и методические указания

Мерой механического движения материальной точки является векторная величина, называемая импульсом, и равная произведению массы точки m на ее скорость $\vec{\upsilon}$

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}.$$

Импульсом системы материальных точек $\vec{p}$ называется векторная сумма импульсов всех ее точек

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i .$$

Совокупность тел, на которые не действуют внешние силы, называют замкнутой системой.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы тел остается постоянным (не меняется со временем):

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const},$$

$$\vec{p}_{\text{к}} = \vec{p}_{\text{н}},$$

где $\vec{p}_{\text{н}}$ – начальный импульс системы, $\vec{p}_{\text{к}}$ – конечный импульс системы.

В проекциях на оси координат

$$p_{\text{н}x} = p_{\text{к}x},$$

$$p_{\text{н}y} = p_{\text{к}y},$$

$$p_{\text{н}z} = p_{\text{к}z}.$$

При решении задач закон сохранения импульса можно применять в следующих случаях:

1) если векторная сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю;

2) если сумма проекций внешних сил на некоторое направление равна нулю, то в проекции только на это направление можно записать

$$p_{\text{н}x} = p_{\text{к}x} \text{ (но } p_{\text{н}y} \neq p_{\text{к}y},\ p_{\text{н}z} \neq p_{\text{к}z}\text{);}$$

3) если длительность процесса взаимодействия мала, а возникающие при взаимодействии внутренние силы велики (удар, взрыв и т.д.), то за это малое время импульсом внешних сил можно пренебречь.

Мерой действия постоянной силы $\vec{F}$ за промежуток времени Δt является векторная величина, называемая импульсом силы, равная $\vec{F} \cdot \Delta t$.

Под действием сил импульс материальной точки изменяется

$$\Delta\vec{p} = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)\Delta t.$$

Изменение импульса материальной точки равно импульсу равнодействующей всех сил, приложенных к этой точке.

Примеры решения задач

Задача 1. На рельсах, на горизонтальной плоскости стоит платформа с песком общей массой $M = 5 \cdot 10^3$ кг. В платформу попадает снаряд массой $m = 5$ кг, летящий со скоростью $\upsilon_{\text{сн}} = 400$ м/с. Снаряд летит под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найти скорость платформы после попадания в нее снаряда, если снаряд застревает в песке.

Решение. На систему платформа-снаряд действует внутренняя сила (сила взаимодействия) и внешние силы – сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.

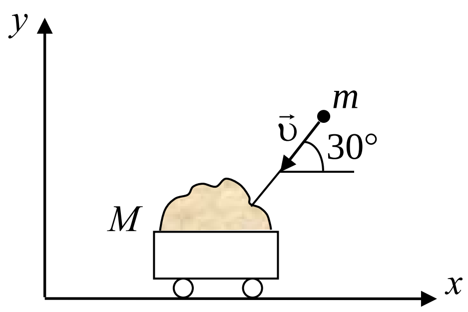


Рис. 4.1

Из-за негоризонтального направления скорости снаряда сила реакции опоры, действующая на платформу, во время взаимодействия платформы и снаряда будет меняться. Следовательно, закон сохранения импульса к данной системе не применим. Однако, если пренебречь силой трения, то сумма проекций внешних сил на горизонтальное направление будет равна нулю. Это значит, что проекция вектора полного импульса на горизонтальное направление остается постоянной

$$p_{\text{н}x} = p_{\text{к}x},$$

$$m\upsilon \cos\alpha = (m + M)u,$$

$$u = \frac{m\upsilon \cos\alpha}{m + M} = 0{,}2\text{ . м/с.}$$

Задача 2. Мяч массой $m = 100$ г, пролетел со скоростью $\upsilon = 20$ м/с и ударился о горизонтальную плоскость под углом $\alpha = 60°$ к нормали. Найти импульс силы $\vec{F} \cdot \Delta t$, полученный мячом при ударе, считая удар абсолютно упругим.

Решение. Согласно основному уравнению динамики материальной точки

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{p}, \tag{4.1}$$

или

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1, \tag{4.2}$$

где $\Delta p = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ – изменение импульса мяча.

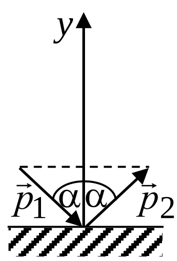


Рис. 4.2

Для записи этого выражения в скалярном виде спроецируем векторы импульсов мяча до и после удара на ось OY, учитывая, что при абсолютно упругом ударе модуль импульса не изменяется, а изменяется только его направление (при этом угол падения мяча равен углу отражения мяча от плоскости). Получим:

$$\Delta p = p_2 \cos\alpha - (-p_1 \cos\alpha).$$

Так как вектор силы $\vec{F}$, подействовавший на мяч при ударе, направлен перпендикулярно плоскости, от которой отскакивает мяч, то уравнение (4.1), записанное в скалярном виде, примет вид:

$$F\Delta t = p_2 \cos\alpha + p_1 \cos\alpha = (p_1 + p_2)\cos\alpha .$$

Поскольку $p_1 = p_2 = m\upsilon$, то

$$F\Delta t = (m\upsilon + m\upsilon)\cos\alpha, \quad F\Delta t = 2m\upsilon\cos\alpha .$$

Эту задачу можно решить, воспользовавшись теоремой косинусов

$$\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(180^\circ - 2\alpha)} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos 2\alpha},$$

где $p_1 = p_2 = m\upsilon$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

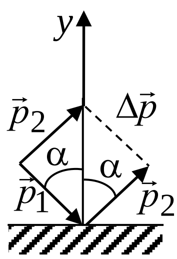


Рис. 4.3

С учетом последних равенств

$$\Delta p = \sqrt{(m\upsilon)^2 + (m\upsilon)^2 + 2m\upsilon \cdot m\upsilon(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = 2m\upsilon\cos\alpha .$$

$$F\Delta t = 2 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Мяч массой $m = 300$ г упал с высоты $H = 1{,}23$ м на асфальт и подскочил на ту же высоту. Продолжительность удара об асфальт $t = 0{,}1$ с. Определите среднюю силу удара $F_{ср}$. Как изменится средняя сила удара, если мяч ударится о твердую поверхность, наклоненную под углом $\alpha = 30°$ к горизонту? Какой будет $F_{ср}$, если в обоих случаях мяч заменить пластилиновым шаром той же массы? Продолжительность удара – та же.

Ответ: $F_{ср}$ = 32 Н, $F_{ср}$ = 28 Н. Для пластилинового шара $F_{ср}$ = 18 Н.

4.2. Струя сечением S = 6 см^2 ударяет из брандспойта в стенку под углом α = 60° к нормали и под тем же углом упруго «отражается» от нее. Скорость течения воды в струе υ = 15 м/с. С какой силой F она давит на стену?

Ответ: $F = 2\rho S\upsilon^2 \cos\alpha = 135$ Н.

4.3. На сколько сместится неподвижная лодка массой M = 280 кг, если человек m = 70 кг перейдет с ее носа на корму? Расстояние от носа до кормы l = 5 м, сопротивлением воды пренебречь.

Ответ: $S = \dfrac{m}{M+m} l = 1$ м.

4.4. Три сцепленных вагона массами m, $2m$ и $3m$, где m = 2 т, движущиеся со скоростью $\upsilon_1 = 1{,}8$ км/ч, столкнулись с неподвижным вагоном, после чего они все стали двигаться со скорость υ = 0,9 км/ч. Чему равна масса m_0 неподвижного вагона?

Ответ: $m_0 = 1{,}2 \cdot 10^4$ кг.

4.5. Снаряд, выпущенный вертикально вверх, взорвался на максимальной высоте. При этом образовалось три осколка. Два осколка разлетелись под прямым углом друг к другу. Масса первого осколка m_1, его скорость υ_1, масса второго осколка m_2, его скорость υ_2. Чему равна скорость υ_3 третьего осколка массой m_3 и в каком направлении он стал двигаться?

Ответ: $\upsilon_3 = \dfrac{\sqrt{(m_1\upsilon_1)^2 + (m_2\upsilon_2)^2}}{m_3}$.

4.6. Охотник стреляет из ружья с движущейся лодки в направлении ее движения. Какова была скорость лодки υ_0 до выстрела, если она остановилась после двух сделанных подряд выстрелов? Масса лодки m_1 = 120 кг, масса охотника m_2 = 80 кг, масса заряда m_3 = 25 г. Скорость вылета заряда из ружья υ = 600 м/с.

Ответ: $\upsilon_0 = \dfrac{2m_3\upsilon}{m_1 + m_2 + 2m_3} = 0{,}15$ м/с.

4.7. На неподвижной платформе установлено орудие, ствол которого направлен под углом α = 60° к горизонту. Масса платформы с орудием M = 15 т. На какое расстояние S откатится платформа с орудием после выстрела, если масса вылетевшего снаряда $m = 20$ кг и вылетает он со скоростью $\upsilon = 600$ м/с? Коэффициент сопротивления движению платформы $k = 0{,}1$.

Ответ: $S = 0{,}08$ м.

4.8. Кузнечик сидит на конце соломинки длиной $l = 40$ см, которая лежит на гладком горизонтальном полу. С какой наименьшей скоростью $\upsilon_{0\,\min}$ относительно пола он должен прыгнуть, чтобы попасть на другой конец соломинки? Масса кузнечика M вдвое больше массы соломинки m. С какой скоростью υ и в каком направлении станет двигаться при этом соломинка?

Ответ: $\upsilon_{0\,\min} = 1{,}1$ м/с, $\upsilon = 1{,}6$ м/с.

4.9. Снаряд разрывается в верхней точке траектории на высоте $h = 19{,}6$ м на две одинаковые части. Через время $t = 1$ с после взрыва одна часть падает на землю под тем местом, где произошел взрыв. На каком расстоянии S_2 от места выстрела упадет вторая часть снаряда, если первая упала на расстоянии $S_1 = 1000$ м?

Ответ: $S_2 = 5000$ м.

4.10. По наклонной плоскости, с углом наклона α соскальзывает без трения ящик с песком массой M ($\upsilon_0 = 0$). Когда ящик прошел путь l, в него попал снаряд массой m, скорость которого направлена под углом β к горизонту. Ящик остановился. С какой скоростью летел снаряд?

Ответ: $\upsilon = \dfrac{M\sqrt{2gl\sin\alpha}}{m\cos(\alpha \pm \beta)}$.

---

5. ЭНЕРГИЯ. РАБОТА. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Основные формулы и методические указания

Энергия – количественная мера движения и взаимодействия всех видов материи.

Закон сохранения энергии: энергия никогда не создается и не уничтожается, она только переходит из одной формы в другую.

Механическая энергия – мера механического движения системы тел и механического взаимодействия тел системы друг с другом и с внешними телами.

$$W_{\text{мех}} = W_{\text{к}} + W_{\text{п}}.$$

Кинетическая энергия тела массой m, движущегося со скоростью υ, есть величина

$$W_{\text{к}} = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии: изменение кинетической энергии тела равно сумме работ всех сил, приложенных к этому телу.

$$\Delta W_{\text{к}} = \sum_i A_i .$$

Работа переменной силы $\vec{F}$ на пути S

$$A = \int_0^S F\cos\alpha ds,$$

где α – угол между силой $\vec{F}$ и вектором перемещения.

Потенциальная энергия тела, поднятого вблизи поверхности Земли на высоту h

$$W_{\text{п}} = mgh.$$

Потенциальная энергия упругого деформированного тела

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2},$$

где k – коэффициент упругости.

Закон сохранения энергии в механике: полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, есть величина постоянная

$$W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \text{const}$$

Работе консервативных (потенциальных) сил можно поставить в соответствие убыль потенциальной энергии

$$A(F_{\text{пот}}) = -\Delta W_{\text{п}} = W_{\text{п1}} - W_{\text{п2}}.$$

Механическую энергию системы могут изменять непотенциальные силы ($F_{\text{непот}}$).

Теорема об изменении механической энергии имеет вид

$$\Delta W_{\text{мех}} = A(F_{\text{непот}}).$$

Примеры решения задач

Задача 3. Тело массой m брошено горизонтально с башни высотой h со скоростью υ_0. При падении на Землю скорость тела равна υ. Найти работу силы сопротивления.

Решение. Задачу можно решить двумя способами:

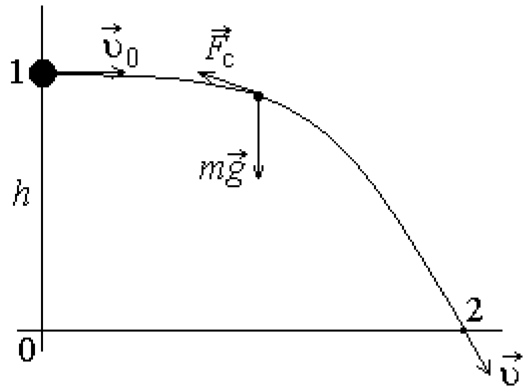


Рис. 5.1

1 способ.

По теореме об изменении кинетической энергии

$$\Delta W_{\text{к}} = W_{\text{к}2} - W_{\text{к}1} = A(F_{\text{c}}) + A(mg),$$

так как $m\vec{g}$ – консервативная сила, то ее работа не зависит от траектории пути и можно записать

$$A(mg) = A_{1-0} + A_{0-2} = A_{1-0}(mg) + 0 = mgh,$$

$$A(F_{\text{c}}) = \Delta W_{\text{к}} - A(mg) = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} - mgh.$$

2 способ.

По теореме об изменении механической энергии

$$\Delta W_{\text{мех}} = A(F_{\text{неконсерват.}}),$$

$$\Delta W_{\text{мех}} = W_{2\text{к}} - W_{1\text{к}} + W_{2\text{п}} - W_{1\text{п}} = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} - mgh,$$

$$A(F_c) = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} - mgh \qquad A(F_c) < 0.$$

Задача 4. Предельная нагрузка, которую выдерживает нить, $F_{\max} = 10$ Н. Нить с грузом массой $m = 0{,}5$ кг отклоняют от положения равновесия и отпускают. На какой наибольший угол α можно отклонить нить, чтобы она не разорвалась в низшей точке траектории? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.

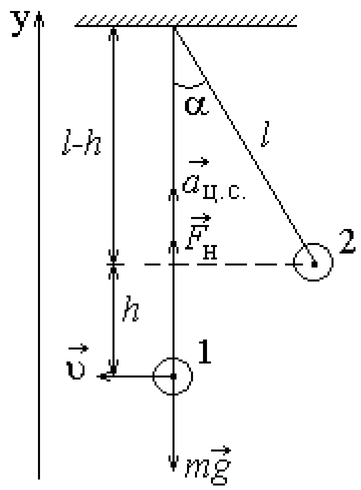


Рис. 5.2

Примем за нулевой уровень потенциальной энергии, когда груз находится в низшей точке траектории (1). Тогда в положении 2 его потенциальная энергия mgh. Когда груз отпускают, его потенциальная энергия в положении 2 переходит в кинетическую в положении 1.

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

откуда $$\upsilon^2 = 2gh.$$

Линейную скорость груза υ в низшей точке 1 найдем, воспользовавшись вторым законом Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{F}_н = m\vec{a}_{ц.с.}.$$

В скалярной записи

$$F_н - mg = \frac{\upsilon^2 m}{l},$$

(l – длина нити с грузом).

$$F_{max} = F_н = m\left(\frac{\upsilon^2}{l} + g\right) = mg\left(\frac{2h}{l} + 1\right). \qquad (1)$$

Из рисунка видно, что

$$l = \frac{l - h}{\cos\alpha},$$

откуда

$$\frac{h}{l} = 1 - \cos\alpha.$$

Подставив в (1) получим

$$\cos\alpha = 1 - \frac{F_{max}}{2mg} + \frac{1}{2} = 1{,}5 - \frac{F_{max}}{2mg},$$

$$\cos\alpha = 1{,}5 - \frac{10}{2 \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}8} = 0{,}48,$$

$$\alpha = \arccos 0{,}48 = 61^\circ.$$

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Чему равны значения потенциальной $E_п$ и кинетической $E_к$ энергий камня массой m = 1 кг, брошенного вертикально вверх со скоростью υ_0 = 10 м/с через t = 1 с после броска?

Ответ: $E_к = \dfrac{m(\upsilon_0 - gt)^2}{2} = 0{,}02$ Дж; $E_п = \dfrac{m\upsilon_0^2}{2} - E_к = 49{,}98$ Дж.

5.2. Под каким углом α к горизонту вылетел снаряд из ствола орудия со скоростью υ_0 = 600 м/с, если его масса равна m = 3 кг, а кинетическая энергия в высшей точки траектории $E_к$ = 270 кДж. Чему равна потенциальная энергия $E_п$ в этой точке? Сопротивлением пренебречь.

Ответ: $\alpha = \arccos\left(\dfrac{1}{\upsilon_0}\sqrt{\dfrac{2E_к}{m}}\right) = 60^\circ$; $E_п = \dfrac{m\upsilon_0^2}{2} - E_к = 270$ кДж.

5.3. Шарик массой $m = 500$ г висит на нити длиной $l = 1$ м. На какую максимальную высоту $h_{\max}$ его можно отвести от положения равновесия, чтобы при свободных колебаниях шарика нить не оборвалась, если предельное натяжение, которое может она выдержать, $F_{\max}$=10 Н? Какова будет кинетическая энергия шарика $E_к$ в низшей тоски траектории? Сопротивлением пренебречь.

Ответ: $h_{\max} = \dfrac{1}{2gm}(F_{\max} - mg) = 0{,}5$ м; $E_к = mgh_{\max} = 2{,}45$ Дж.

5.4. Металлическая цепочка состоит из звеньев длиной l каждое. Ее положили на идеально гладкий стол так, что конец цепочки свесился с края стола. Из скольких звеньев N состоит цепочка, если в момент, когда последнее звено соскальзывало со стола, скорость звена, расположенного посредине, стала равна υ?

Ответ: $N = \dfrac{\upsilon^2}{gl}$.

5.5. Тело массой m и объемом V брошено вертикально вниз с высоты H в воду с начальной скоростью υ_0. На какую глубину h погрузилось тело? Сопротивлением воздуха и воды пренебречь. Плотность воды ρ.

Ответ: $h = \dfrac{m(gH + 0{,}5\upsilon^2)}{g(\rho V - m)}$.

5.6. В покоящийся на горизонтальной поверхности клин с острым углом $\alpha = 45°$ и массой M попадает горизонтально летевший шарик и, абсолютно упруго ударившись о поверхность клина, отскакивает вертикально вверх, а клин начинает скользить по поверхности без трения. С какой скоростью υ_1 отскочит шарик, если его скорость до удара была равна υ_0, а масса m?

Ответ: $\upsilon_1 = \upsilon_0 \sqrt{1 - \dfrac{m}{M}}$.

5.7. При нецентральном ударе биллиардного шара о такой же, но неподвижный, оба шара разлетаются всегда под одним и тем же углом. Найдите этот угол.

Ответ: 90°.

5.8. На гладкой массивной полусфере радиуса R лежит малая монета. От небольшого толчка монета начинает скользить вниз. На какой высоте она упадет со сферы?

Ответ: $h = \dfrac{2}{3}R$.

5.9. Санки движутся по горизонтальному льду со скоростью $\upsilon = 6$ м/с, а затем выезжают на асфальт. Длина полозьев санок $l = 2$ м, коэффициент трения об асфальт $\mu = 1$. Какой путь пройдут санки до полной остановки?

Ответ: $S = \dfrac{l}{2} + \dfrac{\upsilon^2}{2\mu g} = 2{,}8$ м.

5.10. Брусок массой $m = 1$ кг лежит на шероховатой горизонтальной плоскости. К нему прикреплена невесомая пружина, жесткость которой $k = 40$ Н/м. Коэффициент трения между бруском и плоскостью $\mu = 0{,}8$. Какую работу необходимо совершить, чтобы равномерно переместить брусок из состояния покоя на расстояние $l = 2$ м?

Ответ: 16,45 Дж.

6. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Основные формулы и методические указания

Второй закон Ньютона или основной закон динамики вращательного движения

$$\vec{M} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\varepsilon} \text{ или } Mt = J\omega_2 - J\omega_1,$$

где $\vec{M}$ – момент сил, приложенных к телу, J – момент инерции тела, ε – угловое ускорение, ω_1, ω_2 – угловые скорости вращения, изменяющиеся за время t.

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг оси:

$$W_{\text{к}} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Закон сохранения энергии

$$A = \vec{M}\cdot\vec{\varphi} = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2},$$

где A – работа внешних сил, приложенных к вращающемуся телу.

Закон сохранения момента импульса

$$\sum_i \vec{L} = \sum_i J\vec{\omega} = \text{const},$$

где L – момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки 0.

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \text{ или } \vec{L} = [\vec{r} \cdot m\vec{\upsilon}],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки 0.

Закон изменения момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = M_{\text{внешн.}}$$

Примеры решения задач

Задача 1. Две гири с массами m_1 = 2 кг и m_2 = 1 кг соединены нитью, перекинутой через блок массой m = 1 кг. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском. Трением пренебречь.

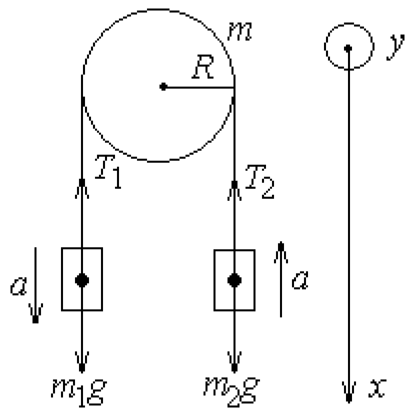


Рис. 6.1

Решение. Запишем в векторной форме уравнение поступательного движения первой и второй гири и уравнение вращательного движения диска:

$$m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}, \tag{6.1}$$

$$m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}, \tag{6.2}$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = J\vec{\varepsilon}, \tag{6.3}$$

где M_1 – момент силы натяжения нити T_1, M_2 – момент силы натяжения нити T_2.

Зададим ось x вдоль направления движения гирь, а ось y перпендикулярно плоскости чертежа. Спроецируем первые два движения на ось x, а третье – на ось y.

$$m_1 g - T_1 = m_1 a, \tag{6.4}$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a, \tag{6.5}$$

$$M_1 - M_2 = J\varepsilon, \tag{6.6}$$

Так как $M = RT$, $a = \varepsilon \cdot R$, где R – радиус диска, уравнение (6.6) запишется в виде:

$$R(T_1 - T_2) = J\frac{a}{R}. \tag{6.7}$$

Вычтем (6.5) из (6.4):

$$g(m_1 - m_2) - (T_1 - T_2) = a(m_1 + m_2)$$

или

$$T_1 - T_2 = g(m_1 - m_2) - a(m_1 + m_2). \tag{6.8}$$

Полученное выражение (6.8) подставим в (6.7) и, учитывая, что момент инерции диска $J = \frac{1}{2}mR^2$, найдем

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} = \frac{(2-1)\cdot 9{,}8}{(2+1+0{,}5)} = 2{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Подставляя значение a в (6.4) и (6.5) получим

$$T_1 = m_1(g - a) = 2(9{,}8 - 2{,}8) = 14\ \text{Н},$$

$$T_2 = m_2(g + a) = 1(9{,}8 + 2{,}8) = 12{,}6\ \text{Н}.$$

Задача 2. Вентилятор вращается с частотой $n = 900$ об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки

$N = 75$ об. Работа сил торможения $A = 44{,}4$ Дж. Найти момент инерции J вентилятора и момент сил торможения M.

Решение. Работа сил торможение равна изменению кинетической энергии:

$$-A = W - W_0. \tag{6.9}$$

Поскольку в момент остановки $W = 0$, а

$$W_0 = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J – момент инерции вентилятора, ω – угловая скорость, то

$$A = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Отсюда выразим J с учетом, что $\omega = 2\pi n$

$$J = \frac{2A}{4\pi^2 n^2},$$

$$J = \frac{2 \cdot 44{,}4}{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 15^2} = 0{,}01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

По основному закону динамики вращательного движения

$$M = J \cdot \varepsilon, \tag{6.10}$$

где угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t}. \tag{6.11}$$

При равнозамедленном вращении число оборотов, сделанное до остановки

$$N = \frac{\omega t}{2 \cdot 2\pi},$$

откуда

$$t = \frac{4\pi N}{\omega} = \frac{2N}{n}. \qquad (6.12)$$

Решая совместно (6.10), (6.11) и (6.12), получим

$$M = \frac{J\pi n^2}{N},$$

$$M = \frac{0{,}01 \cdot 3{,}14 \cdot 15^2}{75} = 94 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Задача 3. Горизонтальная платформа массой $m = 100$ кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой $n_1 = 10$ об/мин. Человек массой $m_0 = 60$ кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой n_2 начнет вращаться с платформы, если человек перейдет от края платформы к её центру? Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой. Какую работу A совершает человек при переходе от края платформы к её центру. Радиус платформы $R = 1{,}5$ м.

Решение.

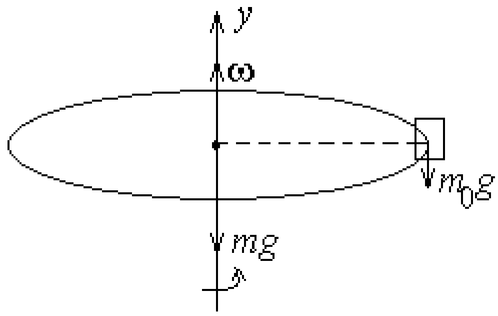


Рис. 6.2

Система «человек-платформа» замкнута в проекции на ось y, так как моменты сил $M_{mg} = 0$ и $M_{m_0g} = 0$ в проекции на эту ось. Следовательно, можно воспользоваться законом сохранения момента импульса

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \qquad (6.13)$$

где J_1 – момент инерции платформы с человеком, стоящем на ее краю, J_2 – момент инерции платформы с человеком, стоящем в центре, ω_1 и ω_2 – угловые скорости платформы в обоих случаях.

$$J_1 = \frac{mR^2}{2} + m_0R^2, \;\; J_2 = \frac{mR^2}{2} \qquad (6.14)$$

Подставляя (6.14) в (6.13) и учитывая, что $\omega = 2\pi n$, где n – частота вращения платформы, получим

$$\left(\frac{mR^2}{2} + m_0R^2\right)2\pi n_1 = \frac{mR^2}{2}\cdot 2\pi n_2,$$

откуда

$$n_2 = n_1\frac{mR^2 + 2m_0R^2}{mR^2} = n_1\frac{m + 2m_0}{m},$$

$$n_2 = \frac{10}{60}\cdot\frac{(100 + 2\cdot 60)}{100} = 0{,}37\,\text{с}^{-1} \;\; (22 \text{ об/мин}).$$

При переходе с края платформы к центру человек совершает работу, равную разности кинетических энергий вращения

$$A = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2}. \qquad (6.15)$$

Подставляя (6.14) в (6.15) и учитывая $\omega_1 = 2\pi n_1$ и $\omega_2 = 2\pi n_2$, получим

$$A = mR^2(\pi n_2)^2 - R^2(\pi n_1)^2(m + 2m_0),$$

$$A = 100\cdot 1{,}5^2(3{,}14\cdot 0{,}37)^2 - 2{,}25\cdot(3{,}14\cdot 0{,}17)^2(100 + 2\cdot 60) = 162 \text{ Дж}.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Однородный диск радиусом $R = 0{,}2$ м и массой $m = 0{,}5$ кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости. Зависимость угловой скорости ω вращения диска от времени t дается уравнением $\omega = A + Bt$, где $B = 8$ рад/с^2. Найти касательную силу F, приложенную к ободу диска. Трением пренебречь.

Ответ: $F = 4$ Н.

6.2. Маховик радиусом $R = 0{,}2$ м и массой $m = 10$ кг соединен с мотором при помощи приводного ремня, идущего без скольжения $T = 14{,}7$ Н. Какую частоту вращения n будет иметь маховик через время $t = 10$ с после начала движения. Маховик считать однородным диском. Трением пренебречь.

Ответ: n = 23,4 с$^{-1}$.

6.3. На барабан радиусом $R = 20$ см, момент инерции которого $J = 0{,}1$ кг $\cdot$ м^2, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 0{,}5$ кг. До начала вращения барабана, высота груза над полом $h = 1$ м. Через какое время t груз опустится до пола? Найти кинетическую энергию $W_к$ груза в момент удара о пол и силу натяжения нити T. Трением пренебречь.

Ответ: t = 1,1 с; $W_к$ = 0,82 Дж; T = 4,1 Н.

6.4. Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого $J = 50$ кг $\cdot$ м^2 и радиус $R = 20$ см. Момент силы трения вращающегося блока $M_{тр} = 98{,}1$ Н $\cdot$ м. Найти разность сил натяжения нити $T_1 – T_2$ по обе стороны блока, если известно, что блок вращается с углом ускорения $\varepsilon = 2{,}36$ рад/с^2. Блок считать однородным диском.

Ответ: ΔT = 1,08 кН.

6.5. Блок массой $m = 1$ кг укреплен на конце стола тела 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Коэффициент трения тела 2 о стол $k = 0{,}1$. Найти ускорение a, с которым движутся тела, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей. Блок считать однородным диском. Трением в блоке пренебречь.

Ответ: a = 3,5 м/с^2; T_1 = 6,3 Н; T_2 = 4,5 Н.

6.6. Диск диаметром D = 60 см и массой m = 1 кг вращается вокруг оси, проходящей через центр перпендикулярно к его плоскости с частотой n = 20 с$^{-1}$. Какую работу A надо совершить, чтобы остановить диск?

Ответ: A = 355 Дж.

6.7. Кинетическая энергия вала, вращающегося с частотой $n = 5$ с$^{-1}$, W = 60 Дж. Найти момент импульса L вала.

Ответ: L = 7,6 кг $\cdot$ м^2/с.

6.8. Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью υ = 7,2 км/ч. На какое расстояние S может вкатиться обруч на горку за счет его кинетической энергии? Уклон горки равен 10 м на каждые 100 м пути.

Ответ: S = 4,1 м.

6.9. Маховик вращается с частотой $n = 10$ об/с. Его кинетическая энергия $W_к = 7{,}85$ кДж. За какое время t момент силы $M = 50$ Н · м, приложенный к маховику, увеличит угловую скорость ω маховика вдвое?

Ответ: $t = 5$ с.

6.10. Человек массой $m_0 = 60$ кг находится на неподвижной платформе массой $m = 100$ кг. С какой частотой n будет вращаться платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом $r = 5$ м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы $\upsilon_0 = 4$ км/ч. Радиус платформы $R = 10$ м. Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой.

Ответ: $n = 8{,}2 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$.

---

7. СТАТИКА

Основные формулы и методические указания

Статика – раздел механики, в котором рассматриваются условия равновесия материальных точек и абсолютно твердых тел.

Момент силы относительно оси, проходящей через т. O определяется выражением

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из т. O в точку приложения силы $\vec{F}$.

$$M = \pm\left|\vec{F}\right|h,$$

где h – плечо силы (длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы).

Момент силы считается положительным, если сила, действуя в отдельности, вращала бы тело по часовой стрелке, и отрицательным, если бы вращала тело против часовой стрелки.

Когда алгебраическая сумма моментов всех сил относительно произвольной оси равна нулю, то тело не вращается или вращается равномерно

$$\sum M_i = 0.$$

Если тело рассматривается как материальная точка, то условие покоя есть равенство

$$\sum \vec{F}_i = 0\,.$$

Если тело рассматривается как абсолютно твердое, то условием равновесия являются 2 условия:

1) алгебраическая сумма проекций всех сил, приложенных к телу, на выбранные направления равна нулю

$$\sum_i F_{ix} = 0;\ \sum_i F_{iy} = 0;\ \sum_i F_{iz} = 0\,;$$

2) алгебраическая сумма моментов всех сил, приложенных к телу, относительно оси, проходящей через любую точку O, равна нулю

$$\sum_i M_i = 0\,.$$

Центром масс системы материальных точек называется воображаемая точка C, положение которой характеризует распределение массы этой системы. Его радиус-вектор равен

$$\vec{r}_C = \frac{\sum\limits_i^n m_i \vec{r}_i}{m},$$

m_i и $\vec{r}_i$ – масса и радиус-вектор i-й материальной точки, n – число материальных точек системы, $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ – масса системы.

Для всех тел, рассматриваемых в нашем курсе, центр масс и центр тяжести совпадают.

Для произвольного количества материальных точек m_i, координаты которых известны (x_i, y_i, где i = 1, … N, N – число материальных точек) центр тяжести системы (центр масс) рассчитывается по формулам

$$x_C = \frac{\sum\limits_i m_i x_i}{\sum\limits_i m_i}, \qquad y_C = \frac{\sum\limits_i m_i y_i}{\sum\limits_i m_i}.$$

Примеры решения задач

Задача 4. Груз массой *m* подвешен на кронштейн *ABC*. Угол между стержнями *AB* и *BC* равен α. Найти усилия в стержнях *AB* и *BC*.

Решение.

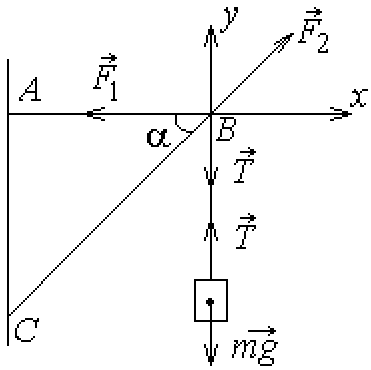


Рис. 7.1

Узел *B* находится в равновесии, поэтому

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \tag{7.1}$$

или в проекциях на оси *x* и *y*

$$\sum_i F_{ix} = 0; \;\; \sum_i F_{iy} = 0. \tag{7.2}$$

На узел *B* действуют силы: натяжения нити $\vec{T}$, силы реакции стержней *AB* ($\vec{F}_1$) и *BC* ($\vec{F}_2$). Запишем уравнение (7.1) для узла *B*

$$Ox: \; -F_1 + F_2 \cos\alpha = 0,$$

$$Oy: \; -T + F_2 \sin\alpha = 0.$$

Силу натяжение нити найдем из условия равновесия сил для груза *m*

$$\vec{T} + m\vec{g} = 0,$$

$$T - mg = 0,$$

$$T = mg.$$

Получим:

$$F_2 = \frac{mg}{\sin\alpha}, \qquad F_1 = mg\,\mathrm{ctg}\alpha.$$

Задача 5. Какую минимальную силу F, направленную горизонтально, нужно приложить к катку цилиндрической формы массой m и радиусом R, чтобы перекатить его через ступеньку высотой h?

Решение.

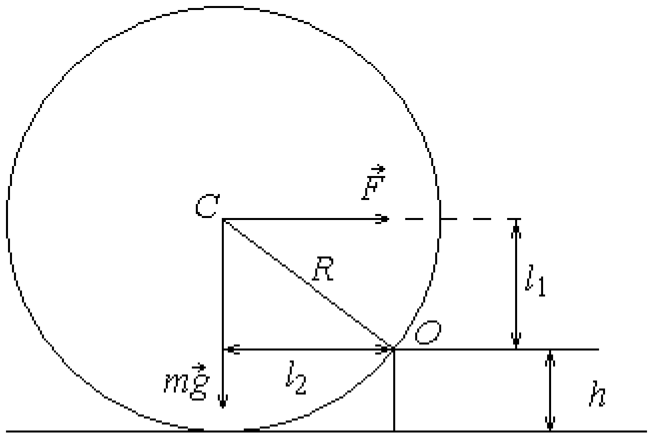


Рис. 7.2

Чтобы перекатить каток через ступеньку (повернуть вокруг точки опоры O), необходимо выполнение условия: момент силы F, вращающий каток по часовой стрелке вокруг точки O, равен моменту силы тяжести, вращающего каток против часовой стрелки. (Момент силы опоры равен нулю, так как плечо этой силы равно нулю).

$$M_1 = M_2, \qquad Fl_1 = mgl_2, \tag{7.3}$$

где l_1 – плечо силы $\vec{F}$, l_2 – плечо силы тяжести.

$$l_2 = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{h(2R-h)}, \qquad l_1 = R - h.$$

Подставим l_1 и l_2 в (7.3), получим

$$F(R-h) = mg\sqrt{h(2R-h)},$$

$$F = \frac{mg\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}.$$

Задача 6. Материальные точки с массами m, $2m$, $3m$ и $4m$ расположены в вершинах прямоугольника со сторонами l_1 = 0,4 м и l_2 = 0,8 м. Найти центр тяжести системы этих материальных точек.

Решение.

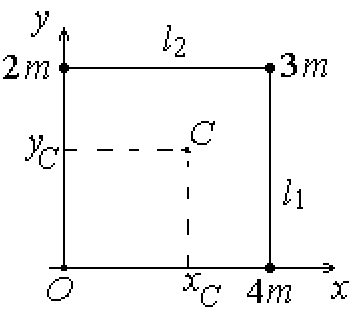


Рис. 7.3

Совместим начало координат с вершиной прямоугольника, в которой расположена материальная точка массой m. Оси координат направим по сторонам прямоугольника. Тогда

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{mx_1 + 2mx_2 + 3mx_3 + 4mx_4}{m + 2m + 3m + 4m} = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4}{10},$$

соответственно

$$y_C = \frac{y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4}{10}.$$

Из построения следует, что

$$x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = 0, y_2 = l_2, x_3 = x_4 = l_2, y_3 = l_1, y_4 = 0.$$

Отсюда

$$x_C = \frac{3l_2 + 4l_2}{10} = 0{,}7l_2; \quad x_C = 0{,}56 \text{ м},$$

$$y_C = \frac{2l_1 + 3l_1}{10} = 0{,}5l_1; \quad y_C = 0{,}2 \text{ м}.$$

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Фонарь массой $m = 10$ кг висит посередине улицы шириной $l = 10$ м. Допустимая сила натяжения каната $T = 500$ Н. На какой высоте H могут быть закреплены концы каната, чтобы точка подвеса фонаря находилась на высоте $h = 5$ м?

Ответ: $H_{\min} = h + \dfrac{mgl}{2\sqrt{4T^2 - (mg)^2}} = 5{,}5$м.

7.2. Ящик толкают по горизонтальной плоскости, прикладывая к нему силу, как показано на рис 7.4. Масса ящика *m*, коэффициент трения μ. При каком значении силы *F* ящик будет двигаться равномерно?

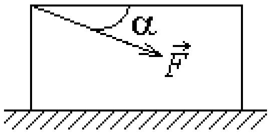


Рис. 7.4

Ответ: $F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$ при $\mu\,\mathrm{tg}\alpha<1$; при $\mu\,\mathrm{tg}\alpha>1$ сдвинуть ящик невозможно.

7.3. Каков должен быть коэффициент трения μ для того, чтобы заколоченный в бревно клин не выскакивал из него? Угол при вершине клина $\alpha = 30°$

Ответ: $\mu \geq 0{,}27$.

7.4. Невесомые стержни *AB* и *BC* шарнирно закреплены (рис. 7.5) в точках *A*, *B*, *C*. Чему равны действующие на стержень силы, если $\alpha = 60°$, а масса подвешенного в точке *B* фонаря $m = 3$ кг?

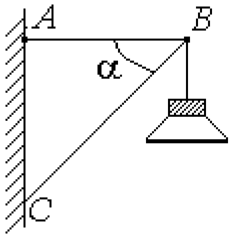


Рис. 7.5

Ответ: стержень *AB* растянут силой 17 Н, а стержень *BC* сжат силой 34 Н.

7.5. На земле лежат вплотную друг к другу два одинаковых бревна цилиндрической формы. Сверху кладут такое же бревно. При каком коэффициенте трения μ между бревнами они не раскатятся? По земле бревна не скользят.

Ответ: $\mu \geq 0{,}27$.

7.6. Однородная тонкая пластина имеет форму круга радиуса *R*, в котором вырезано круглое отверстие радиуса *R*/2. Где находится центр тяжести пластины?

Ответ: На расстоянии $R/6$ от центра в сторону, противоположную отверстию.

7.7. Определите положение центра тяжести системы, состоящей из двух материальных точек, массы которых m_1 и m_2, а их координаты соответственно равны (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Ответ: $x_C = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$, $y_C = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$.

7.8. Двое рабочих несут бревно длиной l и массой m. Тот рабочий, который идет впереди, держит бревно на расстоянии $l_1 = l/5$ от конца бревна, а тот, который идет позади, держит за другой конец. Найти силы давления F_1 и F_2, испытываемые каждым рабочим со стороны бревна.

Ответ: $F_1 = \dfrac{5}{8} mg$, $F_2 = \dfrac{3}{8} mg$.

7.9. Лестница массой m_1 и длиной l приставлена к гладкой вертикальной стене под углом α. На какую высоту h может подняться по лестнице человек массой m_2, если коэффициент трения покоя между лестницей и полом равен k?

Ответ: $h = l\,\dfrac{k(m_1 + m_2)\cos\alpha - 0{,}5 m_1 \sin\alpha}{m_2 \operatorname{tg}\alpha}$.

7.10. В гладкой закрепленной полусфере (рис. 7.6) свободно лежит палочка массы m так, что угол ее с горизонтом равен α, а конец выходит за край полусферы. С какими силами действует палочка на полусферу в точках соприкосновения A и B?

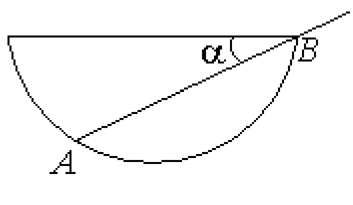


Рис. 7.6

Ответ: $F_A = mg\operatorname{tg}\alpha$; $F_B = \dfrac{mg\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$.

---

9. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Основные формулы и методические указания

Для установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости имеет место уравнение Бернулли:

$$p+\frac{\rho\upsilon^2}{2}+\rho gh=\text{const},$$

где ρ – плотность жидкости в данном сечении труб, h – высота данного сечения трубы над некоторым уровнем, p – давление.

Сила сопротивления, которую испытывает падающий в вязкой жидкости (в газе) шарик, определяется силой Стокса:

$$F=6\pi\eta r\upsilon,$$

где η – динамическая вязкость жидкости (газа), r – радиус шарика, υ – его скорость.

Закон Стокса справедлив только для ламинарного движения. Формула Пуазейля определяет объем жидкости (газа), протекающий за время t через капиллярную трубку радиусом r и длиной l:

$$V=\frac{\pi r^4 t\Delta p}{8l\eta},$$

где η – динамическая вязкость жидкости (газа), Δp – разность давлений на концах трубки.

Характер движения жидкости определяется безразмерным числом Рейнольдса:

$$R_e=\frac{D\upsilon\rho}{\eta}=\frac{D\upsilon}{\nu},$$

где D – величина, характеризующая линейные размеры тела, обтекаемого жидкостью (газом), υ – скорость течения, ρ – плотность, η – динамическая вязкость.

Отношение $\nu=\eta/\rho$ называется кинематической вязкостью.

Переход от ламинарного движения к турбулентному определяется критическим значением числа Рейнольдса.

Объем жидкости, протекающий за единицу времени, равен произведению площади сечения на скорость:

$$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2 \quad \text{или} \quad S\upsilon = \text{const}.$$

Это уравнение неразрывности струи (теорема Эйлера).

Сила внутреннего трения для ньютоновских жидкостей выражается уравнением Ньютона:

$$\vec{F} = \eta \frac{d\vec{\upsilon}}{dx} S,$$

где η – коэффициент внутреннего трения или динамическая вязкость, $\vec{F}$ направлена перпендикулярно $\frac{d\vec{\upsilon}}{dx}$.

Примеры решения задач

Задача 7. Наблюдая под микроскопом движение эритроцитов в капилляре, можно измерить скорость течения крови ($\upsilon_{кп}$ = 0,5 мм/с). Средняя скорость тока крови в аорте составляет $\upsilon_а$ = 40 см/с. На основании этих данных определить, во сколько раз сумма поперечных сечений всех функционирующих капилляров больше сечения аорты.

Решение. Условие неразрывности струи получено для трубки тока переменного сечения. Оно применимо и к разветвлению труб. Такое разветвление в задаче начинается с аорты ($S_а$) и заканчивается капиллярами (общая площадь сечения $S_{кп}$).

Запишем уравнение неразрывности:

$$S_а \cdot \upsilon_а = S_{кп} \cdot \upsilon_{кп},$$

отсюда находим

$$\frac{S_{кп}}{S_а} = \frac{\upsilon_а}{\upsilon_{кп}} = 800 \text{ раз.}$$

Задача 8. В цилиндрическом стакане, высота которого h = 10 см и внутренний диаметр D = 5 см вращается вода. Градиент скорости воды в близи поверхности стакана равен $\frac{d\upsilon}{dr} = 2$ с$^{-1}$. Найти момент силы, действующий со стороны жидкости на стакан. Считать, что вода заполняет весь стакан и сохраняет форму цилиндра. Вязкость воды принять равной η = 1 мПа · с.

Решение. Со стороны воды на внутреннюю поверхность стакана действует сила внутреннего трения $\vec{F}$, направленная по касательной к внутреннему сечению (окружности) стакана. Момент этой силы равен:

$$M = \frac{F \cdot D}{2}. \tag{9.1}$$

По уравнению Ньютона находим силу $\vec{F}$:

$$F = \eta \frac{d\upsilon}{dr} S = \eta \frac{d\upsilon}{dr} h\pi D. \tag{9.2}$$

Подставляя (9.2) в (9.1), получаем:

$$M = \eta \frac{d\upsilon}{dr} \cdot \frac{h\pi D^2}{2} = 7{,}9 \cdot 10^{-7}\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Задача 9. По горизонтальной трубке переменного сечения протекает вода. Статистическое давление в точке x_0 равно ρ_0 = 0,3 Па, а скорость воды υ_0 = 4 см/с. Найти статистическое и динамическое давление в точке x_1, если отношение сечение трубы $S_{x_0} : S_{x_1} = 0{,}5$. Вязкость воды не учитывать.

Решение. Из уравнения неразрывности струи получаем:

$$S_{x_0}\upsilon_0 = S_{x_1}\upsilon_1, \quad \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{S_{x_0}}{S_{x_1}}\upsilon_0.$$

Подставляем это значение скорости в выражение для динамического давления:

$$\rho_{\text{д}} = \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} = \frac{\rho S_{x_0}^2 \upsilon_0^2}{2S_{x_1}^2} = 0{,}2\ \text{Па}.$$

Уравнение Бернулли для горизонтальной трубы записывается таким образом:

$$p_0 + \frac{\rho\upsilon_0^2}{2} = p_1 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2}.$$

Отсюда статическое давление

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho\upsilon_0^2}{2} - \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} = 0{,}9 \text{ Па.}$$

Задачи для самостоятельного решения

9.1. В дне цилиндрического сосуда диаметром $D = 0{,}5$ м имеется круглое отверстие диаметром $d = 1$ см. Найти зависимость скорости понижения уровня воды в сосуде от высоты h этого уровня. Найти значение этой скорости для высоты $h = 0{,}2$ м.

Ответ: $\upsilon_1 = 8 \cdot 10^{-4}$ м/с.

9.2. Какое давление создает компрессор в краскопульте, если струя жидкой краски вытекает из него со скоростью 25 м/с? Плотность краски равна 0,8 г/см^3.

Ответ: $p = 2{,}5 \cdot 10^5$ Н/м^2.

9.3. Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в 4 раза больше плотности материала шарика. Во сколько раз сила трения, действующая на всплывающий шарик, больше веса этого шарика?

Ответ: в 3 раза.

9.4. Какой наибольшей скорости может достичь дождевая капля диаметром $d = 0{,}3$ мм, если динамическая вязкость воздуха равна $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ г/см · с?

Ответ: $\upsilon = 4{,}1$ м/с.

9.5. Максимальная скорость течения воды в трубе $\upsilon_{max} = 3$ м/с. Чему равен минимальный диаметр трубы D_{max} при расходе воды $\upsilon = 5 \cdot 10^3$ м^3 за $t = 1$ ч?

Ответ: $D_{min} = 0{,}77$ м.

9.6. Определить минимальную мощность насоса N, поднимающего воду в трубе на высоту $H = 10$ м, если площадь поперечного сечения трубы $S = 12$ см^2 и за каждую $t_1 = 1$ с насос поднимает $m_1 = 8$ кг воды. Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: $W = 570$ Вт.

9.7. По какому прямоугольному сечению с радиусом закругления $R = 40$ м течет вода. При этом измерения показывают, что у наружной и внутренней стенок канала перепад давления воды составляет

Δp = 2 мм рт. ст. Определить скорость υ воды в канале. Ширина канала H = 4 м, плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: υ = 1,6 м/с.

9.8. Пробковый шарик всплывает в сосуде, наполненном касторовым маслом. Чему равна динамическая и кинетическая вязкости касторового масла в условиях опыта, если шарик всплывает с постоянной скоростью 3,5 см/с?

Ответ: η = 10,9 Н · с/м^2, $\nu = 1{,}21 \cdot 10^{-3}$ м^2/с.

9.9. Стальной шарик падает в широком сосуде, наполненном трансформаторным маслом, плотность которого ρ = 900 кг/м^3 и динамическая вязкость η = 0,8 Н · с/м^2. Считая, что закон Стокса имеет место при $R_e \le 0{,}5$ (если при вычислении R_e в качестве величин D взять диаметр шарика), найти предельное значение диаметра шарика.

Ответ: D = 4,6 мм.

9.10. По горизонтальной трубе переменного сечения (см. рис. 9.1) течет жидкость плотностью ρ. Известны скорости u_1 и u_2 жидкости в сечениях S_1 и S_2 соответственно. Определить давление жидкости в сечении S_2, если в сечении S_1 равно p_1.

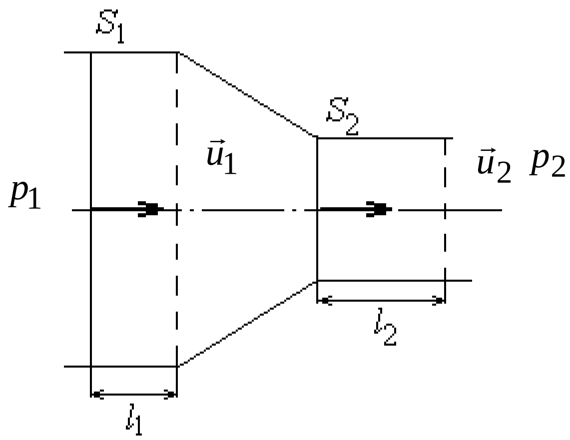


Рис. 9.1

Ответ: $p_2 = p_1 + \rho\dfrac{u_1^2 - u_2^2}{2}$.
