10. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ

Основные формулы и методические указания

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева)

$$pV_{\text{М}} = RT \text{ (для одного моля газа),}$$

$$pV = (m / M)RT \text{ (для произвольной массы газа),}$$

где $V_{\text{М}}$ – молярный объем, R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса газа, m – масса газа, $m / M = \nu$ – количество вещества.

Закон Бойля-Мариотта

$$pV = \text{const} \quad \text{при } T = \text{const},\ m = \text{const},$$

где p – давление, V – объем, T – термодинамическая температура, m - масса газа.

Закон Дальтона для давления смеси n идеальных газов

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i \ ,$$

где p_i – парциальное давление i-го компонента смеси.

Зависимость давления газа p от концентрации n молекул и температуры T

$$p = nkT,$$

где k – постоянная Больцмана ($k = R/N_{\text{А}}$, $N_{\text{А}}$ – число Авогадро).

1. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева) применяют к газам, взятым при условиях, не слишком отличающихся от нормальных ($t_0 = 0$ °C, $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па), а также к разреженным газам. Для сильно сжатых (уплотненных) газов, находящихся при очень больших давлениях (свыше 10^7 Па) или при слишком низких температурах, уравнение не применимо.

2. В литературе встречаются некоторые внесистемные единицы измерения давления, соотношения которых с единицей измерения давления (Па) в системе СИ следующие:

1 мм рт.ст. = 133 Па;

1 атм (физическая атмосфера) = $1{,}013 \cdot 10^5$ Па;

1 ат (техническая атмосфера) = $9{,}8 \cdot 10^4$ Па.

При решении задач небольшим различием между 1 атм и 1 ат часто пренебрегают.

Примеры решения задач

Задача 1. Поршневой насос захватывает за один цикл (ход поршня) объем газа $V_1 = 1$ л и выталкивает его в атмосферу. Давление воздуха в сосуде объемом $V = 20$ л необходимо понизить от $p_0 = 1{,}00 \cdot 10^5$ Па до $p = 0{,}25$ Па. Найти, сколько циклов n должен сделать насос.

Решение. Каждый цикл работы насоса осуществляется в две стадии. При перемещении поршня насоса в крайнее правое положение (первая стадия, клапан K_1 открыт, K_2 – закрыт) газ занимает объем $(V + V_1)$, а давление в системе становится p_1 (рис 10.1).

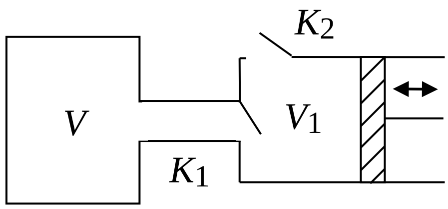

Рис. 10.1

При переходе поршня в крайнее левое положение (вторая стадия, клапан K_1 закрыт, K_2 – открыт) порция газа объемом V_1 выталкивается в атмосферу. Откачка газа обычно происходит в изотермических условиях, когда $T = \text{const}$ и справедливо уравнение изотермы

$$pV = \text{const}. \qquad (10.1)$$

Связь между давлением и объемом газа в исходном состоянии и в конце первой стадии первого цикла описывается уравнением

$$p_0 V = p_1 (V + V_1). \qquad (10.2)$$

Аналогичное уравнение для второго цикла, когда давление в системе стало p_2, имеет вид

$$p_1 V = p_2 (V + V_1). \qquad (10.3)$$

Для третьего цикла

$$p_2V = p_3(V + V_1). \qquad (10.4)$$

Используя метод последовательной подстановки выражений (10.4), (10.3) в (10.2), получим закон изменения давления для трех циклов:

$$p_0 = p_3\left(\frac{V + V_1}{V}\right)^3.$$

Тогда для n циклов связь конечного давления p с начальным p_0 будет описываться выражением

$$p_0 = p\left(\frac{V + V_1}{V}\right)^n,$$

откуда необходимое число циклов

$$n = \lg\frac{p_0}{p} \bigg/ \lg\left(1 + \frac{V_1}{V}\right).$$

Произведя вычисления, получим n = 280 циклов.

Задача 2. В закрытом сосуде при температуре 300 К и давлении 0,1 МПа находится 10 г водорода и 16 г гелия. Газы считать идеальными. Найти: 1) удельный объем смеси $\upsilon_{см}$; 2) молярную массу смеси $M_{см}$.

Решение. Согласно закону Дальтона, давление p смеси газов равно сумме парциальных давлений:

$$p = p_1 + p_2. \qquad (10.5)$$

Используя уравнение Клапейрона-Менделеева для каждого газа, получим

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{M_1}RT \text{ и } p_2V_2 = \frac{m_2}{M_2}RT.$$

Выразив из них p_1 и p_2 и подставив в (10.5), получим

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT.$$

1. Удельный объем смеси

$$\upsilon_{\text{см}} = \frac{V}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 / M_1 + m_2 / M_2)RT}{(m_1 + m_2)p}.$$

Произведя вычисления, получим $\upsilon_{\text{см}}$ = 8,63 м^3/кг.

2. Величина $M_{\text{см}}$ должна удовлетворять уравнению газового состояния, записанному для смеси:

$$pV = \frac{m}{M_{\text{см}}} RT. \qquad (10.7)$$

При сравнении (10.6) и (10.7) с учетом того, что масса смеси $m = m_1 + m_2$, найдем

$$\frac{m_1 + m_2}{M_{\text{см}}} = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}, \qquad (10.8)$$

откуда

$$M_{\text{см}} = \frac{M_1 M_2 (m_1 + m_2)}{M_1 m_2 + M_2 m_1}.$$

Произведя вычисления, получим $M_{\text{см}}$ = 0,0029 кг/моль.

Указание. Из формулы (10.8) следует, что количество вещества смеси равно сумме количеств веществ отдельных компонентов этой смеси. Иногда соотношение (10.8) считают очевидным, не требующим доказательства. Однако (10.8), как следует из приведенного решения задачи, является следствием закона Дальтона, без применения которого задачу решить нельзя.

Задача 3. Высокий цилиндрический сосуд с азотом находится в однородном поле сил тяжести, ускорение свободного падения в котором равно g. Температура T азота меняется по высоте так, что его плотность всюду одинакова. Рассчитать градиент температуры азота по высоте (dT/dh).

Решение. Для простоты площадь поперечного сечения сосуда примем равной единице. Выберем сечение столба газа на высоте h (рис. 10.2). Давление p, оказываемое на него газом, в общем случае вычисляется по формуле

$$p = \frac{P}{S} = \frac{mg}{S} = \int\limits_{h}^{+\infty} \rho(h) g dh, \tag{10.9}$$

где $\rho(h)$ – плотность газа на высоте h; $S = 1$.

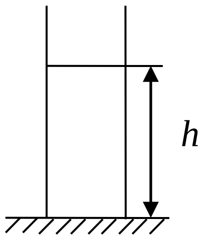

Рис. 10.2

С другой стороны, зависимость давления газа p от концентрации n молекул и температуры T

$$p = nkT = \rho kT / m_0, \tag{10.10}$$

где m_0 – масса одной молекулы.

Приравняв (10.9) и (10.10), получим

$$\int\limits_{h}^{+\infty} \rho(h) g dh = \rho kT / m_0 .$$

Поскольку $\rho(h)$ = const, вынесем эту величину из-под знака интеграла и сократим, тогда

$$T = \frac{m_0 g}{k} \int\limits_{h}^{+\infty} dh.$$

Градиент температуры найдем путем дифференцирования этого выражения по h:

$$\frac{dt}{dh} = \frac{m_0 g}{k} \frac{d}{dh} \int\limits_{h}^{+\infty} dh = \frac{m_0 g}{k} \left(-1 \frac{dh}{dh} \right) = -\frac{m_0 g N_\text{А}}{k N_\text{А}} = -\frac{Mg}{R}.$$

Произведя вычисления, получим

$$\frac{dT}{dh} = -33 \cdot 10^{-3} \text{ К/м} = -33 \text{ мК/м}.$$

Знак «минус» показывает, что температура с подъемом на высоту понижается.

Задачи для самостоятельного решения

10.1. При выкачивании воздуха поршневым насосом давление в нем после $n = 5$ качаний упало с $p = 64$ см рт.ст. до $p_n = 2$ см рт.ст. Объем поршневого цилиндра $V_0 = 600$ см^3. Каков объем сосуда V, если температура воздуха постоянная.

Ответ: $V = 1600$ см^3.

10.2. В камеру емкостью $V = 20$ л нагнетается воздух. На сколько увеличится давление Δp после $n = 100$ качков, если ход поршня $l = 25$ см, площадь поршня $S = 20$ см^2. Атмосферное давление воздуха $p_0 = 760$ мм рт.ст. Изменением температуры в процессе нагнетания воздуха пренебречь.

Ответ: На $\Delta p = 2{,}5 \cdot 10^5$ Н/м^2.

10.3. Поршневым воздушным насосом откачивают воздух из сосуда объемом V, первоначальное давление в котором равно p_0. Найти закон изменения давления воздуха в сосуде в зависимости от времени откачки t. Процесс считать изотермическим, а скорость откачки – не зависящей от давления и равной C. Определить, сколько времени нужно на то, чтобы давление в сосуде понизилось в $\eta = 1000$ раз, если объем сосуда $V = 87$ л, скорость откачки $C = 10$ л/с.

Ответ: $t = 1$ мин.

Указание. Скоростью откачки $C = dV/dt$ называют объем газа, откачиваемый за единицу времени, причем этот объем измеряется при давлении газа в данный момент.

10.4. Газ с молярной массой $M = 0{,}029$ кг/моль находится при нормальном давлении между горизонтальными пластинами (рис. 10.3). Температура газа растет линейно от $t_1 = 10$ °C у нижней до $t_2 = 20$ °C у верхней пластины. Объем газа между пластинами $V = 0{,}5$ м^3. Какова масса m газа между пластинами.

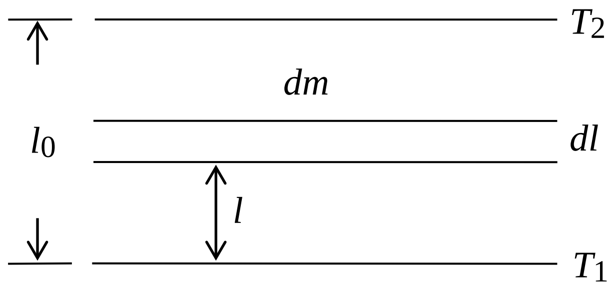

Рис. 10.3

Ответ: m = 25,17 кг.

10.5. В пространстве между оконными рамами заключена некоторая масса воздуха m при атмосферном давлении. Площадь рамы $S = 2$ м^2, расстояние между рамами $l_0 = 25$ см. Температура меняется линейно от $t_1 = -10$ °C у наружного стекла до $t_2 = +20$ °C у внутреннего. Какова масса m воздуха между рамами.

Ответ: m = 0,61 кг.

Указание. Можно воспользоваться рис. 10.3.

10.6. Вблизи поверхности Земли весовой состав воздуха таков: азот (N_2) – 78,08 %, кислород (O_2) – 20,95 %, аргон (Ar) – 0,93 %, другие газы – 0,04 %. Давление воздуха равно $1{,}013 \cdot 10^5$ Па. Определить: 1) парциальные давления p_i: азота, кислорода и аргона; 2) среднюю молярную массу M воздуха.

Ответ: 1) $p_{N_2} = 0{,}791 \cdot 10^5$ Па; $p_{O_2} = 0{,}212 \cdot 10^5$ Па; $p_{Ar} = 0{,}009 \cdot 10^5$ Па; 2) $M = 28{,}9$ г/моль.

10.7. В сосуде находится 14 г азота (N_2) и 9 г водорода (H_2) при температуре 100 °C и давлении 10^6 Па. Определить: 1) массу одного киломоля смеси; 2) объем сосуда.

Ответ: 1) M = 4,6 кг/кмоль; 2) $V = 11{,}7 \cdot 10^{-3}$ м^3.

10.8. Воздух состоит по весу из 23,6 % кислорода и 76,4 % азота. Давление воздуха 750 мм рт.ст., температура 13 °C. Найти: 1) плотность воздуха; 2) парциальные давления p_c: кислорода и азота при этих условиях.

Ответ: 1) ρ = 1,2 кг/м^3; 2) $p_{O_2} = 0{,}236 \cdot 10^5$ Па, $p_{N_2} = 0{,}764 \cdot 10^5$ Па.

10.9. В сосуде находится 10^{-10} кмоль кислорода и 10^{-6} г азота. Температура смеси равна 100 °C. При этом давление в сосуде равно 10^{-3} мм рт.ст. Найти: 1) объем сосуда; 2) парциальные давления p_i:

кислорода и азота; 3) концентрацию молекул в сосуде.

Ответ: 1) $V = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ м^3; 2) $p_{O_2} = 7{,}37 \cdot 10^{-4}$ мм рт.ст., $p_{N_2} = 2{,}63 \cdot 10^{-4}$ мм рт.ст.; 3) $n = 2{,}6 \cdot 10^{7}$ м$^{-3}$.

10.10. В колбе объемом 2,5 л находится 10^{15} молекул кислорода, $4 \cdot 10^{15}$ молекул азота и $3{,}3 \cdot 10^{-7}$ г аргона. Температура смеси 150 °С. Определить давление смеси газов в колбе.

Ответ: $p_{\text{см}} = 1{,}74 \cdot 10^{-4}$ мм рт.ст.

---

11. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА

Основные формулы и методические указания

Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям

$$f(\upsilon) = \frac{dN(\upsilon)}{Nd\upsilon} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\upsilon^2 e^{-m_0\upsilon^2/(2kT)}. \qquad (11.1)$$

где функция $f(\upsilon)$ распределения молекул по скоростям определяет относительное число молекул $dN(\upsilon)/N$ из общего числа N молекул, скорости которых лежат в интервале от υ до $\upsilon + d\upsilon$.

Скорости молекул:

наиболее вероятная

$$\upsilon_{\text{в}} = \sqrt{2RT/M} = \sqrt{2kT/m_0}\,; \qquad (11.2)$$

средняя квадратичная

$$\langle\upsilon\rangle_{\text{кв}} = \sqrt{3RT/M} = \sqrt{3kT/m_0}\,; \qquad (11.3)$$

средняя арифметическая

$$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{8RT/(\pi M)} = \sqrt{8kT/(\pi m_0)}\,, \qquad (11.4)$$

где m_0 – масса одной молекулы, M – молярная масса, k – постоянная Больцмана.

Барометрическая формула

$$p = p_0 e^{-Mgh/(RT)}, \qquad (11.5)$$

где p и p_0 – давление газа на высоте h и $h = 0$.

Распределение Больцмана во внешнем потенциальном поле

$$n = n_0 e^{-Mgh/(RT)} = n_0 e^{-m_0 gh/(kT)}, \text{ или } n = n_0 e^{-U/(kT)}, \qquad (11.6)$$

где n и n_0 – концентрация молекул на высоте h и $h = 0$, $U = m_0 gh$ – потенциальная энергия молекулы в поле тяготения.

1. Закон Максвелла о распределении молекул по скоростям (11.1) строго справедлив лишь для идеального газа и, следовательно, это уравнение, а также уравнения (11.2) - (11.4) применяются только для не слишком сжатых газов и паров.

2. Для нахождения полного числа dN молекул, скорости которых лежат в интервале от υ до $\upsilon + d\upsilon$, необходимо проинтегрировать правую часть выражения (11.1), умноженную на $Nd\upsilon$, в пределах от υ_1 до υ_2; приведенная формула справедлива для подсчета dN, если интервал скоростей $d\upsilon$ значительно меньше υ.

Примеры решения задач

Задача 1. В сосуде содержится 1 моль идеального газа. Найти число ΔN молекул, скорости которых лежат в пределах от 0 до υ_{max}, причем $\upsilon_{max} = 0{,}001\upsilon_в$, где $\upsilon_в$ – наиболее вероятная скорость молекул.

Решение. Согласно (11.1) доля dN молекул, имеющих скорость, лежащую в пределах от υ до $\upsilon + d\upsilon$, равна

$$\frac{dN}{N} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \upsilon^2 \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right) d\upsilon, \qquad (11.7)$$

где N – число всех молекул в объеме.

В этой задаче удобно воспользоваться понятием относительной скорости $U = \upsilon / \upsilon_в$. Согласно (11.2) $\upsilon_в = (2kT/m)^{1/2}$, тогда

$$\upsilon = U\sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Подставив это выражение в (11.7), получим закон Максвелла для распределения молекул по относительным скоростям U:

$$dN(U) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} U^2 \exp(-U^2) dU, \qquad (11.8)$$

где $dN(U)$ – число молекул, относительные скорости U которых заключены в пределах от U до $U + dU$.

По условию максимальная скорость интересующих нас молекул

$$\upsilon_{\text{max}} = 0{,}001\upsilon_{\text{в}},$$

откуда

$$U_{\text{max}} = \frac{\upsilon_{\text{max}}}{\upsilon_{\text{в}}} = 0{,}001.$$

Для таких значений U выражение (11.8) можно упростить. Для $U << 1$

$$e^{-U^2} \approx 1 - U^2.$$

Пренебрегая значением $U^2 = (0{,}001)^2 = 10^{-6}$ по сравнению с единицей, выражение (11.8) запишем в виде

$$dN(U) = \frac{4N_{\text{A}}}{\sqrt{\pi}} U^2 dU.$$

Интегрируя последнее выражение по U в пределах от 0 до U_{max}, получим

$$\Delta N = \frac{4N_{\text{A}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{U_{\text{max}}} U^2 dU = \frac{4N_{\text{A}}}{\sqrt{\pi}} \left| \frac{U^3}{3} \right|_0^{U_{\text{max}}},$$

или, окончательно,

$$\Delta N = \frac{4N_{\text{A}}}{3\sqrt{\pi}} U_{\text{max}}^3.$$

Произведя вычисления, получим $\Delta N = 4{,}53 \cdot 10^{17}$ молекул.

Задача 2 (опыт Перрена). При наблюдении в микроскоп взвешенных частиц гуммигута было обнаружено, что значения среднего числа их в слоях, отстоящих друг от друга на h = 40 мкм, различаются в η = 2 раза. Температура среды $T = 290$ К. Диаметр частиц $d = 0{,}4$ мкм, и их плотность $\Delta\rho = 0{,}2$ г/см^3 больше плотности окружающей жидкости. Определить число Авогадро N_A.

Решение. Частицы, находящиеся в поле сил тяжести, подчиняются распределению Больцмана (11.6). Отношение средних концентраций частиц $\langle n_1\rangle/\langle n_2\rangle$ в слоях на двух уровнях h_1 и h_2 (рис. 11.1), где потенциальные энергии равны U_1 и U_2, соответственно, согласно (11.6), равно

$$\frac{\langle n_1\rangle}{\langle n_2\rangle} = \exp\left(-\frac{U_1 - U_2}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{(U_1 - U_2)N_A}{RT}\right), \qquad (11.9)$$

где $R = kN_A$ – газовая постоянная, а U_1 и U_2 неизвестны. Для нахождения их используем связь между силой F, действующей на частицу, и ее потенциальной энергией U:

$$F = -dU/dh, \text{ или } Fdh = -dU.$$

Проинтегрируем последнее равенство с учетом того, что при изменении h от h_1 до h_2 U изменяется от U_1 до U_2, приняв $F = \text{const}$;

$$\int_{h_1}^{h_2} Fdh = -\int_{U_1}^{U_2} dU, \text{ или } Fh = U_1 - U_2.$$

На частицу массой m и объемом V, находящуюся в жидкости во взвешенном состоянии и подчиняющуюся распределению Больцмана, действует сила F, определяемая разницей между силой тяжести $mg = \rho Vg$ и силой Архимеда $\rho_0 Vg$ (g – ускорение свободного падения):

$$F = \rho Vg - \rho_0 Vg = Vg(\rho - \rho_0) = Vg\Delta\rho.$$

Объем частицы $V = \pi d^3/6$.

Тогда $F = \pi d^3 \Delta\rho g/6$ и $U_1 - U_2 = Fh = \pi d^3 \Delta\rho g h/6$.

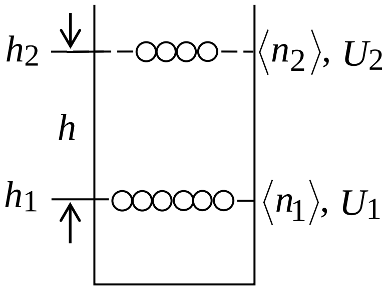

Рис. 11.1

Подставив $(U_1 - U_2)$ в (11.9), получим

$$\frac{\langle n_1 \rangle}{\langle n_2 \rangle} = \exp\left(-\frac{\pi d^3 \Delta\rho g h N_\text{A}}{6RT} \right).$$

После логарифмирования этого выражения получим

$$\ln\frac{\langle n_1 \rangle}{\langle n_2 \rangle} = -\frac{\pi d^3 \Delta\rho g h N_\text{A}}{6RT},$$

откуда

$$N_\text{A} = \frac{6RT \ln \eta}{\pi d^3 \Delta\rho g h} = 6{,}4 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Таким образом, $N_\text{A} = 6{,}4 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, полученное Перреном, можно считать удовлетворительно совпадающим с $N_\text{A} = 6{,}025 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, полученным более точными методами.

Задача 3. Установленная вертикально и закрытая с обоих концов труба наполнена газообразным кислородом O_2. Высота трубы $h_1 = 200$ м, объем $V = 200$ л. Стенки трубы имеют всюду одинаковую температуру $T = 293$ К. Давление газа внутри трубы вблизи ее основания равно $p_0 = 10^5$ Па. Найти: 1) давление p_1 в трубе вблизи ее верхнего конца; 2) количество N молекул кислорода, содержащихся в трубе.

Решение. 1) Для расчета давления p_1 в трубе вблизи ее верхнего конца (рис. 11.2) используем барометрическую формулу (11.5)

$$p_1 = p_0 e^{-Mg(h_1 - h_0)/(RT)}, \tag{11.10}$$

где p_1 и p_0 – давление газа в трубе вблизи ее верхнего конца и нижнего основания соответственно. Произведя вычисления, получим

$$p_1 = 0{,}97 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0{,}97\, p_0.$$

2) Концентрация $n(h)$ молекул газа на произвольной высоте h трубы, согласно (11.6),

$$n(h) = n_0 \exp(-Mgh/(RT)), \tag{11.11}$$

где n_0 – концентрация молекул газа в трубе вблизи ее основания.

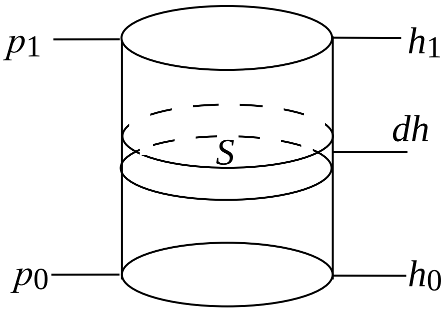

Рис. 11.2

Выделим на некоторой высоте трубы (рис. 11.2) бесконечно малый объем $dV = Sdh$, где S – площадь основания трубы, dh – высота выделенного слоя, причем $dh \ll (h_1 - h_2)$. Тогда количество N молекул кислорода, содержащихся в трубе, равно:

$$N = \int_{h_0}^{h_1} n(h)dV. \tag{11.12}$$

Подставим (11.11) в (11.12):

$$N = \int_{h_0}^{h_1} n_0 e^{-Mgh/(RT)} dV = Sn_0 \int_{h_0}^{h_1} e^{-Mgh/(RT)} dh. \tag{11.13}$$

Введем новую переменную $x = -Mgh/(RT)$, тогда

$$dx = -\frac{Mg}{RT}dh, \text{ откуда } dh = -\frac{RT}{Mg}dx.$$

При изменении h от $h_0 = 0$ до h_1 переменная x меняется от 0 до $(-Mgh_1/(RT))$.

Перейдем в (11.13) к новой переменной x:

$$N = Sn_0\left(-\frac{RT}{Mg}\right)\int_0^{-Mgh_1/(RT)} e^x dx = \frac{Sn_0 RT}{Mg}\left(1 - e^{-Mgh_1/(RT)}\right). \tag{11.14}$$

Учтем, что $p_0 = n_0 kT$, $V = S\,h_1$ и $k = R/N_A$, тогда (11.14) окончательно будет иметь вид

$$N = \frac{Vp_0 N_A}{Mgh_1}\left(1 - e^{-Mgh_1/(RT)}\right).$$

Произведя вычисления, получим: $N = 4{,}9 \cdot 10^{24}$.

Задачи для самостоятельного решения

11.1. (Опыт Штерна). Для непосредственного определения скорости молекул газа Штерн пользовался прибором, поперечное сечение которого схематически изображено на рис. 11.3. По оси цилиндра A, из которого выкачан воздух, натянута серебряная проволока. Эта проволока окружена вторым (внутренним) цилиндром B с прорезью в виде узкой щели C, параллельной общей оси цилиндров. При нагревании проволоки на $t = 1200$ °С внутренний цилиндр заполняется атомами испарившегося с проволоки серебра. Благодаря малой ширине щели через нее проходит узкий пучок атомов, скорости которых имеют направление OC. При неподвижном наружном цилиндре прибора атомы этого пучка оседают на его поверхности, образуя полоску D параллельно оси O. При вращении наружного цилиндра полоска смещается (D'). Радиус наружного цилиндра $R = 10$ см, радиус внутреннего цилиндра $r = 1{,}0$ см, число оборотов при вращении наружного цилиндра $n = 50$ об/с, смещение полоски серебра $S = 5{,}4$ мм (DD'). Молярная масса серебра $M = 108$ г/моль. Определить: 1) скорость $\upsilon_{оп}$ атомов серебра по опытным данным; 2) скорость атомов серебра по формуле $\langle\upsilon\rangle$ – средней арифметической скорости.

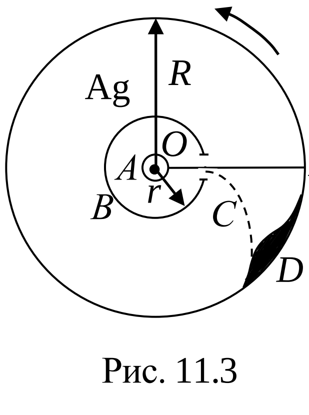

Рис. 11.3

Ответ: 1) $\upsilon_{оп} = 5{,}2 \cdot 10^2$ м/с; 2) $\langle\upsilon\rangle = 5{,}4 \cdot 10^2$ м/с.

11.2. В опыте Штерна (рис. 11.3) на поверхности внешнего вращающегося цилиндра молекулы серебра конденсируются с разными скоростями. Определить скорости молекул, попадающих на пластину DD'.

Ответ: $\upsilon = \sqrt{5/2} \cdot \upsilon_в$, где $\upsilon_в$ – наиболее вероятная скорость, равная

$4{,}75 \cdot 10^2$ м/с.

11.3. Рассчитать, какой процент молекул равновесного газа обладает скоростями, отличающимися от наиболее вероятной не более чем на 1 %.

Ответ: $\Delta N/N$ = 1,7 %.

11.4. Используя идею установки Перрена для определения числа Авогадро и применив к частицам краски, взвешенным в воде, больцмановское распределение, найти объем V частиц, если при расстоянии между двумя слоями h = 80 мкм число взвешенных частиц в одном слое вдвое больше, чем в другом. Плотность растворенной краски ρ = 1700 кг/м^3, температура окружающей среды T = 300 К.

Ответ: $V = 5{,}22 \cdot 10^{-21}$ м^3.

11.5. Зависимость потенциальной энергии молекул газа в некотором центральном поле от расстояния r от центра поля $U(r) = ar^2$, где a = 12 кг/с^2 – постоянная. Температура газа T = 300 К, концентрация молекул в центре поля $n_0 = 3 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. Найти: 1) наиболее вероятное расстояние $r_в$ молекул от центра поля; 2) концентрацию n_1 молекул в центре поля при уменьшении температуры в η = 2 раза; 3) наиболее вероятное значение потенциальной энергии $U_в$.

Ответ: 1) $r_в = \sqrt{kT/a} = 0{,}2 \cdot 10^{-10}$ м; 2) $n_1 = 8{,}5 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$;

3) $U_в = kT/2 = 2 \cdot 10^{-21}$ Дж.

11.6. Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление p = 596 мм рт.ст., благодаря чему летчик считает высоту h полета неизменной. Однако температура воздуха изменилась от $t_1 = 2\,°C$ до $t_2 = 1°C$. Давление у поверхности Земли считать нормальным. Рассчитать ошибку Δh в определении высоты.

Ответ: Δh = 20 м.

11.7. Вблизи поверхности Земли температура $t_1 = 15\,°C$, давление $p_1 = 760$ мм рт.ст., на высоте $h = 10000$ м температура $t_2 = -50\,°C$, давление $p_2 = 198$ мм рт.ст. Найти изменение высоты Δh, соответствующее изменению давления Δp = 1 мм рт.ст. вблизи поверхности Земли.

Ответ: $h_1 = 10{,}7$ м, $h_2 = 34{,}6$ м, $\Delta h = h_2 - h_1$.

11.8. Отношение барометрического давления у поверхности Земли к давлению на некоторой высоте равно 1,8. Найти: 1) высоту, которую покажет в этой точке прибор со шкалой, проградуированной по барометрической формуле, при t = 5 °C, если у Земли стрелка прибора стоит на нуле; 2) относительную погрешность измерения высоты $\Delta h / h$, вызванную допущением $T = \text{const}$, по сравнению с погрешностью, вычисляемой по формуле

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\alpha h}{T_0} \right)^{Mg/R\alpha}.$$

Температурный градиент $dT/dh = \alpha = -0{,}006$ К/м, температура у поверхности Земли равна градуировочной.

Ответ: 1) h = 4800 м; 2) $\Delta h / h$ = 5,7 %.

11.9. Идеальный газ с молярной массой $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль находится в очень высоком вертикальном цилиндрическом сосуде в однородном поле тяжести, для которого ускорение свободного падения равно $g = 9{,}8$ м/с^2. Определить высоту $h_{\text{ц.т.}}$, на которой находится центр тяжести газа, считая температуру газа всюду одинаковой и равной T = 300 К.

Ответ: $h_{\text{ц.т.}}$ = 9085,3 м.

11.10. Идеальный газ с молярной массой $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль находится в высоком вертикальном цилиндрическом сосуде, площадь основания которого S = 5 см^2 и высота h = 10 м. Температура газа T = 300 К, его давление на нижнее основание $p_0 = 10^5$ Па. Определить массу газа в сосуде, полагая, что температура и ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2 не зависят от высоты.

Ответ: $m = 5 \cdot 10^{-3}$ кг.

---

12. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Основные формулы и методические указания

Закон теплопроводности Фурье

$$q_{\text{т}} = -\lambda \frac{dT}{dx}, \qquad (12.1)$$

где $q_{\text{т}}$ – плотность теплового потока, dT/dx – градиент температуры в направлении x, λ – коэффициент теплопроводности.

Закон диффузии Фика

$$q_m = -D\frac{d\rho}{dx}, \qquad (12.2)$$

где q_m – плотность потока массы вещества, $d\rho/dx$ – градиент плотности в направлении x, D – коэффициент диффузии.

Плотность потока количества движения (импульса) L, переносимого в направлении x, перпендикулярном скорости υ_z потока массы вещества, определяется законом Ньютона:

$$L = -\eta\frac{d\upsilon_z}{dx}. \qquad (12.3)$$

Соотношение (12.3) можно записать через значение силы трения $F_{тр}$, действующей на единицу площади поверхности, разделяющей два соседних слоя:

$$F_{тр} = -\eta\frac{d\upsilon_z}{dx}, \qquad (12.4)$$

где $d\upsilon_z/dx$ – - градиент скорости, η – коэффициент динамической вязкости.

Как видно из формул (12.1) - (12.4), явления переноса, возникающие в термодинамически неравновесных системах, в результате которых происходит пространственный перенос энергии, массы, импульса, могут быть описаны одним общим выражением

$$C = -A\frac{dB}{dx},$$

где знак «минус» указывает на то, что перенос осуществляется в направлении уменьшения градиента dB/dx.

В разделе приведены, в основном, задачи на явление теплопроводности, имеющее наибольшее практическое значение. Однако, подходы к решению этих задач могут быть использованы и для задач, описывающих процессы диффузии при замене T на ρ и λ на D.

Примеры решения задач

Задача 4. Стена нагревательной печи толщиной d = 0,75 м выполнена целиком из огнеупорного шамотного кирпича с коэффициентом теплопроводности $\lambda_1 = 1$ Вт/(м · К). Определить толщину стены, если ее выполнить двухслойной, сохранив первый слой из того же материала толщиной $d_1 = 0{,}25$ м, а второй сложив из кирпича, изготовленного из неогнеупорного, но малотеплопроводного материала, у которого коэффициент теплопроводности $\lambda_2 = 0{,}1$ Вт/(м · К). Тепловой поток и температуры наружных поверхностей у двухслойной стены те же, что и у однослойной.

Решение. Используем закон теплопроводности Фурье

$$q_т = -\lambda \frac{dT}{dx}.$$

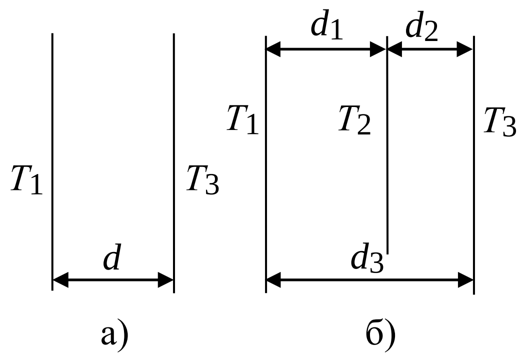

Рис. 12.1

Плотность теплового потока через однослойную стену (рис. 12.1а)

$$q_т = \lambda_1 (T_1 - T_3)/d\,, \tag{12.5}$$

через первый слой d_1 двухслойной стены (рис. 12.1б)

$$q_т = \lambda_1 (T_1 - T_2)/d_1, \tag{12.6}$$

через второй слой d_2 двухслойной стены

$$q_т = \lambda_2 (T_2 - T_3)/d_2. \tag{12.7}$$

При записи уравнений (12.5)-(12.7) учтено, что тепловой поток $q_т$ и температуры T_1 и T_3 наружных поверхностей у двухслойной стены те же, что и у однослойной.

Переписываем уравнения (12.5), (12.6), (12.7) в виде

$$T_1 - T_3 = q_т \frac{d}{\lambda_1};\; T_1 - T_2 = q_т \frac{d_1}{\lambda_1};\; T_2 - T_3 = q_т \frac{d_2}{\lambda_2}.$$

Складываем левые и правые части уравнений:

$$2(T_1 - T_3) = q_т\left(\frac{d}{\lambda_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}\right).$$

Подставим в последнее выражение значение $q_т$ из выражения (12.5) и, преобразования его, получим

$$d_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(d - d_1).$$

Произведя вычисления, получим

$$d_3 = d_1 + d_2 = 0{,}3 \text{ м}.$$

Таким образом, толщина двухслойной стенки печи, сделанной из неогнеупорного, но малотеплопроводного материала (равная 0,3 м), значительно меньше толщины однослойной стены (равной 0,75 м), сделанной целиком из огнеупорного кирпича.

Задача 5. Газ заполняет пространство между двумя длинными коаксиальными цилиндрами, радиусы которых R_1 = 10 см и R_2 = 10,5 см. Внутренний цилиндр неподвижен, а внешний вращают с угловой скоростью w = 80 рад/с (рис. 12.2). Момент сил трения, действующих на единицу длины внутреннего цилиндра, M_1 = 0,2 Н · м. Сила трения, действующая на единицу площади цилиндрической поверхности радиуса r, определяется формулой $f_{тр} = \eta r(\partial w / \partial r)$. Определить вязкость газа.

Решение. По условию задачи сила трения, действующая на единицу площади цилиндрической поверхности произвольного радиуса r, определяется формулой

$$f_{тр} = \eta \cdot r(\partial w / \partial r).$$

Тогда сила трения, действующая на всю площадь поверхности цилиндрического пояса радиусом r единичной высоты, будет равна:

$$F_{тр} = f_{тр} l = \eta \cdot r(\partial w / \partial r) \cdot 2\pi r,$$

где $l = 2\pi r$ –длина окружности радиуса r.

Момент силы трения $M_{тр}$, действующий на эту поверхность, равен:

$$M_{тр} = F_{тр} r = 2\pi\eta \cdot r^3(\partial w / \partial r).$$

По условию задачи

$$M_{\text{тр}} = M_1,\ \text{т.е.}\ M_1 = 2\pi\eta \cdot r^3(\partial w/\partial r).$$

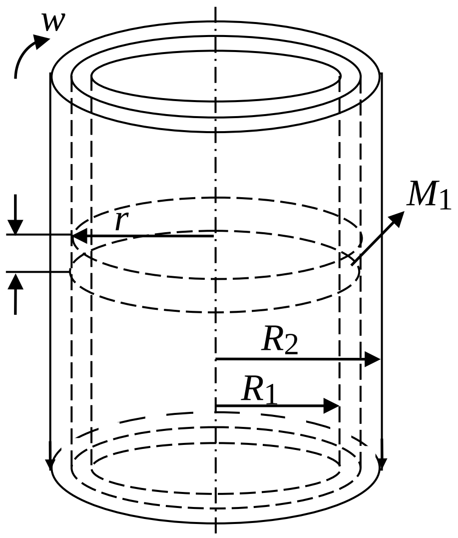

Рис. 12.2

Разделим переменные в этом выражении:

$$\eta \cdot dw = (M_1/2\pi)\cdot(dr/r^3).$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства в пределах, данных в задаче:

$$\eta\int_0^w dw = \frac{M_1}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^3}.$$

Окончательно получим выражение для вычисления вязкости газа η:

$$\eta = \frac{M_1}{4\pi w}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Подставив данные в это выражение и вычислив, найдем $\eta = 9{,}5\cdot 10^{-6}$ кг/(м · с).

Задачи для самостоятельного решения

12.1. Какой толщины должна быть деревянная стена здания, чтобы она давала такую же потерю теплоты, как кирпичная стена толщиной d = 40 см при одинаковой температуре внутри и снаружи здания. Коэффициенты теплопроводности кирпича и дерева равны соответственно: $\lambda_к = 0{,}70$ Вт/(м · К), $\lambda_д = 0{,}175$ Вт/(м · К).

Ответ: $d_д$ = 0,1 м.

12.2. Толщина стены d = 50 см, температура стены внутри и снаружи здания равна соответственно t_1 = 18 °С и t_2 = –30 °С, коэффициент теплопроводности стены λ = 0,20 Вт/(м · К). Рассчитать потерю теплоты 1 м^2 стены здания в течение суток.

Ответ: Q = 1,66 МДж.

12.3. Потолочное перекрытие парового котла состоит из двух слоев тепловой изоляции (рис. 12.3). Температура наружных поверхностей перекрытия t_1 = 800 °С и t_3 = 60 °С. Толщина и теплопроводность каждого слоя равны соответственно: d_1 = 500 мм, λ_1 = 1,3 Вт/(м · К), d_2 = 200 мм, λ_2 = 0,16 Вт/(м · К). Определить температуру t_2 на границе между слоями.

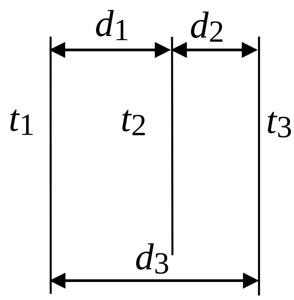

Рис. 12.3

Ответ: t_2 = 626 °С

12.4. Стальная стена котла толщиной d_1 = 1,5 мм покрыта с внутренней стороны слоем котельной накипи толщиной d_2 = 1 мм. Температура наружной поверхности стенки t_1 = 250 °С и t_2 = 200 °С. Коэффициент теплопроводности накипи λ = 0,6 Вт/(м · К). Определить: 1) тепловой поток, проходящий через 1 м^2 стенки котла; 2) температуру стального листа под накипью.

Ответ: 1) q = 29400 Вт/м^2, 2) t_2 = 249 °С.

12.5. Площадь акватории Азовского моря S = 38 · 103 км^2. Толщина h слоя льда, прокрывающего море, равна 200 мм. Температура на нижней и верхней поверхностях льда t_1 = 0 °С и t_2 = –15 °С. Во сколько раз мощность теплового потока, передаваемого водой в атмосферу, превышает мощность электростанций $N = 10^6$ кВт.

Ответ: n = 7125 раз.

12.6. Из комнаты размерами $5 \times 5 \times 4$ м^3 наружу через два окна с рамами площадью $1{,}5 \times 2{,}0$ м^2, расположенными на расстоянии 0,2 м друг от друга, вытекает тепловой поток. Температура комнатного воздуха + 20 °С, наружного –20 °С. Определить: 1) тепловой поток из комнаты; 2) время, в течение которого температура в комнате уменьшится на 1 °С.

Ответ: 1) W = 12 Вт, 2) t = 2 ч.

12.7. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено водородом при нормальном давлении. Внутренний цилиндр полностью охвачен внешним. Радиусы цилиндров: r_1 = 10 см и r_2 = 10,5 см. Длина внутреннего цилиндра l = 30 см. Коэффициент внутреннего трения водорода $\eta = 8{,}5 \cdot 10^{-6}$ кг/(м · с). Определить число оборотов в секунду, которое должен сделать внешний цилиндр, чтобы момент силы внутреннего трения, действующий на поверхность неподвижного внутреннего цилиндра, равнялся бы $M = 3 \cdot 10^{-4}$ Н · м. (При расчете сил внутреннего трения приближенно можно считать, что скорость слоя газа является линейной функцией расстояния этого слоя от поверхности внутреннего цилиндра).

Ответ: n = 14 об/с.

12.8. Горизонтально расположенный диск радиусом R = 0,200 м подвешен на тонкой упругой нити над таким же укрепленным на вертикальной оси диском (рис. 12.4). Коэффициент кручения нити (отношение приложенного вращающего момента к углу закручивания) $k = 3{,}62 \cdot 10^{-4}$ Н · м/рад. Зазор между дисками a = 5,00 мм. Найти угол α, на который закрутится нить, если нижний диск привести во вращение с угловой скоростью w = 20,0 рад/с.

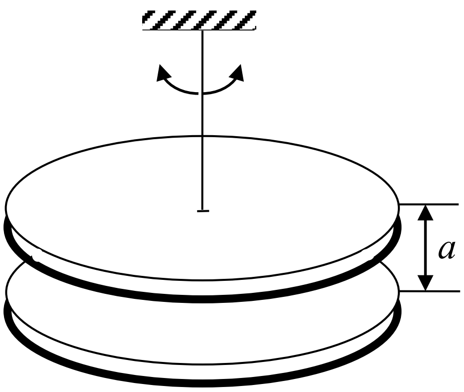

Рис. 12.4

Ответ: α = 0,48 рад.

12.9. Поезд метро движется в туннеле со скоростью υ = 60 км/ч. Расстояние от крыши поезда до поверхности туннеля l = 1 м. Вследствие различия скоростей в слоях воздуха в направлении, перпендикулярном к плоскости крыши, при отсутствии вихревых движений воздуха возникает сила трения. Коэффициент внутреннего трения воздуха $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с). Определить силу трения на каждый квадратный метр крыши поезда.

Указание. Градиент скорости можно оценить, если считать, что слой воздуха, примыкающий к крыше поезда, движется со скоростью υ, а слой, примыкающий к потолку туннеля, имеет скорость, равную нулю.

Ответ: $F_{\text{тр}} / S = 3 \cdot 10^{-4}$ Н/м^2.

12.10. Водяной пар диффундирует из пространства над широким сосудом с теплой водой, где его плотность $\rho_1 = 25$ г/м^3, в окружающий его объем воздуха. На расстоянии $l = 1$ м пар конденсируется на холодном стекле, около которого плотность насыщенного пара $\rho = 7{,}5$ г/м^3. Процесс диффузии пара установившийся. Среднее значение коэффициента диффузии $D = 2{,}4 \cdot 10\text{-}5$ м^2/с. Определить время, в течение которого на поверхности $S = 1$ дм^2 стекла осаждается $m = 0{,}2$ мг влаги.

Ответ: $t = 50$ с.

---

13. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Основные формулы и методические указания

В общем случае:

$$Q = \Delta U + A,$$

т.е. теплота Q, сообщенная газу, идет на изменение ΔU его внутренней энергии и на работу A, совершаемую газом против внешних сил.

Применение первого начала термодинамики к изопроцессам:

а) изохорический процесс (V = const)

$$\Delta V = 0, \; A = 0,$$

следовательно,

$$Q = \Delta U,$$

т.е. теплота, сообщенная газу, полностью идет на изменение его внутренней энергии, или

$$Q = \frac{m}{M} C_V \Delta T ,$$

где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме, равная $C_V = i/(2) \cdot R$, где i – число степеней свободы.

б) изобарический процесс (p = const)

$$A = p\Delta V = \frac{m}{M} R\Delta T ,$$

поэтому

$$Q = \frac{m}{M} C_V \Delta T + \frac{m}{M} R\Delta T ;$$

в) изотермический процесс (T = const)

$$\Delta T = 0 ,\ \Delta U = 0 ,\ A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} ,$$

следовательно,

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} ,$$

т.е. теплота, сообщенная газу, полностью идет на совершение газом работы против внешних сил;

г) адиабатический процесс (Q = 0)

$$A = -\Delta U ,$$

т.е. работа совершается газом за счет изменения внутренней энергии, или

$$A = -\frac{m}{M} C_V \Delta T ,$$

или
$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma - 1} \right] ,$$

где γ – отношение молярной теплоемкости газа при постоянном давлении и молярной теплоемкости при постоянном объеме:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}.$$

Уравнения Пуассона. При адиабатическом процессе давление газа и его объем связаны соотношением

$$pV^{\gamma} = \text{const},$$

Начальное и конечное значения давления, объема и температуры связаны соотношениями:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Примеры решения задач

Задача 6. Сколько теплоты поглощают 200 г водорода, нагреваясь от 0 до 100 °C при постоянном давлении? Каков прирост внутренней энергии газа? Какую работу совершает газ?

Решение. Теплота Q, поглощаемая газом при изобарическом нагревании, равна

$$Q = C_p m \Delta T,$$

где m – масса газа, C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, ΔT – изменение температуры.

Как известно,

$$C_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}$$

где i – число степеней свободы молекулы газа (5 – для двухатомного газа), μ – масса киломоля газа, R – универсальная постоянная.

Получим для Q:

$$Q = m\frac{i+2}{2}\frac{R}{M}\Delta T = 2{,}91\cdot 10^5 \text{ Дж} = 291 \text{ кДж}.$$

Изменение внутренней энергии:

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\Delta T = 2{,}08\cdot 10^5 \text{ Дж} = 208 \text{ кДж}.$$

Работу расширения газа найдем по формуле, выражающей первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

откуда

$$A = Q - \Delta U = 8{,}3\cdot 10^4 = 83 \text{ кДж}$$

Задача 7. Кислород массой m = 2 кг занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $p_1 = 0{,}2$ МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м^3, а затем при постоянном объеме до давления $p_3 = 0{,}5$ МПа. Найти изменение внутренней энергии газа, совершенную им работу и количество теплоты, переданное газу. Построить график процесса.

Решение. Изменение внутренней энергии газа выражается формулой:

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\Delta T,$$

где i – число степеней свободы молекул газа (для двухатомных молекул кислорода i = 5), μ – молярная масса.

Начальную и конечную температуру найдем, используя уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

откуда

$$T = \frac{pVM}{mR}.$$

Подставляя численные значения в формулу, получим

$$T_1 = \frac{2\cdot 10^5\cdot 1\cdot 32}{2\cdot 8{,}31\cdot 10^3} = 385 \text{ К},$$

$$T_2 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32}{2 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3} = 1155 \text{ К},$$

$$T_3 = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 32}{2 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3} = 2888 \text{ К},$$

Подставляя числовые значения, находим:

$$\Delta U = \frac{5}{2}\frac{2 \cdot 8{,}31}{32}(2888 - 385) = 3{,}25 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Работа расширения газа при постоянном давлении:

$$A = \frac{m}{M} R\Delta T = \frac{2}{32} 8{,}31 \cdot 10^3 (1155 - 385) = 0{,}4 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Работа газа, нагреваемого при постоянном объеме, равна нулю, т.е. $A_2 = 0$. Следовательно, полная работа,

$$A = A_1 + A_2 = 0{,}4 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Согласно первому началу термодинамики,

$$Q = \Delta U + A = 3{,}65 \text{ МДж}.$$

График процесса приведен на рис. 1.1

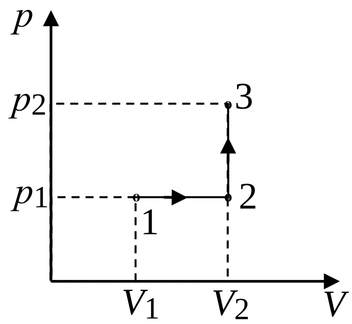

Рис. 13.1

Задачи для самостоятельного решения

13.1. Азот массой $m = 5$ кг, нагретый на $\Delta T = 150$ К, сохранил неизменный объем V. Найти теплоту, сообщенную газу, изменение внутренней энергии и совершенную газом работу.

Ответ: Q = 7,75 МДж, ΔU = 7,75 МДж, A = 0.

13.2. Какая работа совершается при изотермическом расширении водорода массой m = 5 г, взятом при температуре T = 290 К, если объем газа увеличивается в три раза?

Ответ: A = 6,62 кДж.

13.3. Водород массой m = 10 г нагрели на $\Delta T = 200$ К, причем газу была передана теплота $Q = 40$ кДж. Найти изменение внутренней энергии водорода и совершенную им работу.

Ответ: ΔU = 20,8 кДж.

13.4. Сколько теплоты выделится, если азот массой m = 1 г, взятый при температуре Т = 280 К под давлением $p_1 = 0{,}1$ МПа, изотермически сжать до давления $p_2 = 1$ МПа?

Ответ: Q = 191 Дж.

13.5. При адиабатическом сжатии кислорода массой m = 1 кг совершена работа A = 100 кДж. Какова будет конечная температура T_2 газа, если до сжатия кислород находился при температуре T_1 = 300 К?

Ответ: T_2 = 454 К.

13.6. При адиабатическом расширении кислорода с начальной температурой $T = 320$ К внутренняя энергия уменьшилась на 8,4 кДж. Определить массу кислорода, если его объем при сжатии увеличился в n = 10 раз.

Ответ: m = 6,71 г.

13.7. При адиабатическом сжатии газа его объем V уменьшился в n = 10 раз, а давление p увеличилось в $k = 21{,}4$ раза. Определить отношение $\gamma = C_p/C_V$ теплоемкостей газа.

Ответ: γ = 1,33.

13.8. Из баллона, содержавшего водород под давлением p_1 = 1 МПа при температуре T_1 = 300 К, выпустили половину находившегося в нем количества газа. Определить конечную температуру T_2 и p_2, считая процесс адиабатическим.

Ответ: T_2 = 224 К, p_2 = 379 кПа.

13.9. Азот массой $m = 2$ г, имевший температуру $T_1 = 300$ К, был адиабатически сжат так, что объем уменьшился в $n = 10$ раз. Определить конечную температуру T_2 газа и работу A сжатия.

Ответ: T_2 = 754 К, A = 674 Дж.

13.10. Водород при нормальных условиях имел объем V_1 = 100 м^3. На сколько изменилась внутренняя энергия U газа при адиабатическом изменении его объема до V_2 = 150 м^3?

Ответ: ΔU = – 3,8 МДж.

14. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ К.П.Д. ЦИКЛ КАРНО. ЭНТРОПИЯ

Основные формулы и методические указания

Термодинамический к.п.д. (η) характеризует степень использования теплоты при превращении ее в работу, или, совершенство цикла, по которому работает тепловой двигатель

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – теплота, полученная рабочим веществом (газом) от нагревателя, Q_2 – теплота, переданная рабочим веществом (газом) охладителю.

Термический к.п.д. обратимого цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – абсолютная температура нагревателя, T_2 – абсолютная температура охладителя.

Приведенная теплота (Q/T) для любых изотермических переходов между двумя адиабатами есть величина постоянная.

Изменение энтропии системы при ее переходе из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}.$$

Формула Больцмана

$$S = k \ln W,$$

где k – постоянная Больцмана, W – термодинамическая вероятность состояния системы.

Примеры решения задач

Задача 1. Тепловая машина работает по циклу Карно. При изотермическом расширении двухатомного газа его объем увеличивается в 3 раза, а при последующем адиабатическом расширении – в 5 раз. Определить к.п.д. цикла. Какую работу совершает 1 кмоль газа за один цикл, если температура нагревателя 300 К.

Решение. К.п.д. цикла Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_3}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя, T_3 – температура холодильника.

При адиабатическом процессе 2-3 (рис. 14.1)

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1},$$

где γ – показатель степени адиабаты (для двухатомного газа γ = 1,4). Тогда

$$T_3 = T_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} = T_2 n^{1-\gamma}.$$

Так как $T_1 = T_2$, то получаем

$$\eta = \frac{T_2 - T_2 n^{1-\gamma}}{T_2} = 1 - n^{1-\gamma},$$

где $n^{1-\gamma} = 5^{1-1,4} = 0,525$.

Следовательно,

$$\eta = 1 - 0,525 = 0,475; \ \eta = 47,5\ \%.$$

Работа в цикле Карно определяется разностью количества теплоты Q_1, полученного в процессе 1-2, и Q_2, отданного в процессе 3-4:

$$A = Q_1 - Q_2.$$

При изотермическом процессе

$$Q_1 = \nu k T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = \nu R T_1 \ln k,$$

$$Q_2 = \nu k T_3 \ln\frac{V_4}{V_3} = -\nu R T_3 \ln k,$$

так как $\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$. Знак минус показывает, что теплота отдается холодильнику.

Следовательно,

$$A = \nu R \ln k (T_1 - T_3) = \nu R \ln k \Delta T,$$

где $\Delta T = T_1 - T_3 = T_1 - T_1 n^{1-\gamma} = T_1(1 - n^{1-\gamma}) = T_1\eta = 300 \cdot 0{,}475 = 142{,}5$ К, тогда $T_3 = 157{,}5$ К.

Подставив числовые значения, получаем:

$$A = 1{,}3 \text{ МДж}.$$

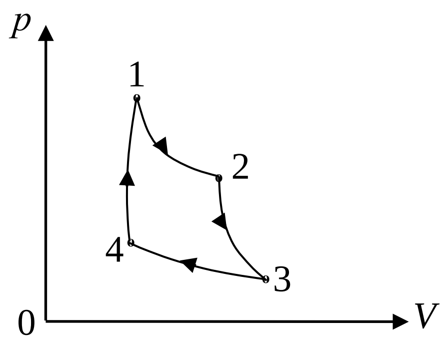

Рис. 14.1

Задача 2. Лед массой 2 кг, находящийся при температуре – 13 °С, нагрели до 0 °С и расплавили. Определить изменение энтропии.

Решение. Изменение энтропии

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T},$$

где dQ – количество теплоты, сообщенное телу; T – термодинамическая температура тела, S_1 и S_2 – соответственно значения энтропии в начальном и конечном состоянии системы. Общее изменение энтропии равно:

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i,$$

где ΔS_i – изменение энтропии, происходящее на отдельных этапах процесса.

Разделим этот процесс на два этапа. На первом – происходит нагревание льда от начальной температуры $T_1 = 260$ К до температуры плавления льда $T_2 = 273$ К

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Так как $dQ_1 = mc_1 dT$,

$$\Delta S_1 = mc_1 \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

На втором этапе имеет место плавление льда. В этом случае

$$\Delta Q_2 = m\lambda.$$

Тогда

$$\Delta S_2 = \frac{m\lambda}{T_2}.$$

Общее изменение энтропии

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m\left(c_1 \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda}{T_2}\right) =$$

$$= 2\left(2{,}1 \cdot 10^3 \ln \frac{273}{260} + \frac{3{,}35 \cdot 10^5}{273}\right) = 2{,}66 \cdot 10^3 \text{ Дж/К}.$$

Задача 3. При температуре 250 К и давлении $1{,}013 \cdot 10^5$ Па двухатомный газ занимает объем 80 л. Как изменится энтропия газа, если давление увеличить вдвое, а температуру повысить до 300 К?

Решение. Изменение энтропии определяется:

$$S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \qquad (14.1)$$

Изменение количества теплоты находим из первого закона термодинамики:

$$dQ = \frac{m}{\mu} C_V dT + pdV, \tag{14.2}$$

где $C_V = \frac{5}{2} R$ для двухатомных газов.

Величины $\frac{m}{\mu}$ и p найдем из уравнения Менделеева-Клапейрона и объединенного газового закона:

$$\frac{m}{p} = \frac{p_1 V_1}{T_1 R}; \; p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \frac{T}{V}. \tag{14.3}$$

Подставляя, находим:

$$dQ = \frac{p_1 V_1}{T_1} \frac{5R}{2} dT + \frac{p_1 V_1}{T_1} \frac{T}{V} dV = \frac{p_1 V_1}{T_1} \left(\frac{5}{2} dT + T \frac{dV}{V} \right) \tag{14.4}$$

Подставляя (14.4) в (14.1), находим

$$\Delta S = \frac{p_1 V_1}{T_1} \left(\frac{5}{2} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \right) = \frac{p_1 V_1}{T_1} \left(\frac{5}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln \frac{V_2}{V_1} \right),$$

но $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1}$, тогда

$$\Delta S = \frac{p_1 V_1}{T_1} \left(\frac{5}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln \frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{p_1 V_1}{T_1} \left(\frac{5}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln \frac{T_2}{T_1} - \ln \frac{p_2}{p_1} \right) =$$

$$= \frac{p_1 V_1}{T_1} \left(\frac{7}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} - \ln \frac{p_2}{p_1} \right) = -182 \text{ Дж/К}.$$

Задачи для самостоятельного решения

14.1. Совершая замкнутый цикл, газ получил от нагревателя теплоту $Q_1 = 4$ кДж. Какую работу A совершил газ в результате цикла, если термический к.п.д. цикла $\eta = 0{,}12$.

Ответ: A = 400 Дж.

14.2. Один моль идеального двухатомного газа, находящийся под давлением $p_1 = 0{,}1$ МПа при температуре $T_1 = 300$ К, нагревают при постоянном объеме до давления $p_2 = 0{,}2$ МПа. После этого газ изотермически расширился до начального давления и затем изобарически был сжат до начального объема V_1. Начертить график цикла. Определить температуру газа для характерных точек цикла и его термический к.п.д.

Ответ: $T_2 = T_3 = 600$ К, $\eta = 0{,}099$.

14.3. Кислород массой $m = 1$ кг совершает цикл Карно. При изотермическом расширении газа его объем увеличивается в 2 раза, а при последующем адиабатическом расширении совершается работа 3000 Дж. Определить работу, совершенную за цикл.

Ответ: A = 831,6 Дж.

14.4. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Воздух при давлении $p_1 = 708$ кПа и температуре $T_1 = 400$ К занимает объем $V_1 = 2$ л. После изотермического расширения воздух занял объем $V_2 = 5$ л, после адиабатического расширения объем возрос до $V_3 = 8$ л. Найти: а) параметры пересечения изотерм и адиабат; б) работу, совершаемую на каждом участке цикла; в) полную работу в цикле; г) к.п.д. цикла; д) количества теплоты Q_1 и Q_2, Q_1 – полученное в цикле от нагревания и Q_2 – отданное холодильнику.

Ответ: а) $V_1 = 2$ л, $p_1 = 708$ кПа, $V_2 = 5$ л, $p_2 = 284$ кПа; б) $A_1 = 1{,}3$ кДж, $A_2 = 620$ Дж, $A_3 = -1{,}07$ кДж, $A_4 = -620$ Дж; в) A = 230 Дж; г) $\eta = 0{,}175$; д) Q_1 = 1,3 кДж; Q_2 = 1,07 кДж.

14.5. Смешано $m_1 = 5$ кг воды при температуре $T_1 =$ К с $m_2 = 8$ кг воды при температуре $T_2 = 350$ К. Найти: а) температуру смеси; б) изменение ΔS энтропии, происходящее при смешивании.

Ответ: T = 323 К, ΔS = 0,3 кДж/К.

14.6. В результате изохорического нагревания водорода массой $m = 1$ г давление p газа увеличилось в 2 раза. Определить изменение ΔS энтропии газа.

Ответ: ΔS = 7,2 Дж/К.

14.7. Найти изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении азота массой m = 4 г от объема $V_1 = 5$ л до объема $V_2 = 9$ л.

Ответ: ΔS = 2,43 Дж/К.

14.8. Кусок льда массой m = 200 г, взятый при температуре $t_1 = -10$ °С был нагрет до $t_2 = 0$ °С и расплавлен, после чего образовавшаяся вода была нагрета до температуры $t_2 = 10$ °С. Определить изменение ΔS энтропии льда.

Ответ: ΔS = 291Дж/К.

14.9. Масса m = 6,6 г водорода изобарически расширяется от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Найти изменение ΔS энтропии при этом расширении.

Ответ: ΔS = 66,3 Дж/К.

14.10. Газ совершает цикл Карно. Работа изотермического расширения газа $A_1 = 5$ Дж. Определить работу A_2 изотермического сжатия, если термический к.п.д. цикла $\eta = 0,2$.

Ответ: $A_2 = 4$ Дж.

---

15. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

Основные формулы и методические указания

Уравнение состояния реальных газов (уравнение Ван-дер-Ваальса) для одного моля газа имеет вид:

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT,$$

где V_0 – молярный объем газа, p – давление, T – термодинамическая температура, R – газовая постоянная, a и b – постоянные, различные для разных газов.

Уравнение Ван-дер-Ваальса для любой массы m газа имеет вид:

$$\left(p + \frac{m^2}{M^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{M}b\right) = \frac{m}{M}RT,$$

где V – объем всего газа, M – молярная масса газа.

Постоянные a и b данного газа связаны с его критическим давлением $p_к$ и критическим молярным объемом $V_{0к}$ соотношениями:

$$V_{0к} = 3b,\ p_к = \frac{a}{27b^2},\ T_к = \frac{8a}{27bR}.$$

Эти уравнения можно решить относительно постоянных a и b

$$a = \frac{27T_к^2R^2}{64p_к},\ b = \frac{T_кR}{8p_к}.$$

Если ввести приведенные величины

$$\tau = \frac{T}{T_к}, \ \pi = \frac{p}{p_к}, \ \omega = \frac{V_0}{V_{0к}},$$

то уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа примет вид

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau.$$

Примеры решения задач

Задача 4. Углекислый газ массой m = 88 г находится в сосуде емкостью V = 10 л. Определить внутреннее давление газа и собственный объем молекул.

Решение. По уравнению Ван-дер-Ваальса выражение добавочного давления p' имеет вид

$$p' = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{a}{V^2},$$

где a – постоянная Ван-дер-Ваальса, V – объем.

$$p' = \left(\frac{8{,}8 \cdot 10^{-2}}{4{,}4 \cdot 10^{-2}}\right)^2 \frac{0{,}361}{10^{-4}} = 14{,}4 \text{ кПа.}$$

Постоянная Ван-дер-Ваальса b учитывает поправку на собственный объем молекул V', и, как следует из уравнения Ван-дер-Ваальса, произведение $\frac{m}{M}b$ равно учетверенному объему молекул $\frac{m}{M}b = 4V'$, откуда

$$V' = \frac{m}{M}\frac{b}{4} = \frac{8{,}8 \cdot 10^{-2}}{4{,}4 \cdot 10^{-2}} \frac{4{,}28 \cdot 10^{-5}}{4} = 0{,}021 \text{ л.}$$

Задача 5. В сосуде под давлением p = 8 МПа содержится кислород, плотность которого $\rho = 100$ кг/м^3. Считая газ реальным, определить его температуру и сравнить ее с температурой идеального газа при тех же условиях.

Решение. Температуру идеального газа найдем из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M}RT, \ \rho = \frac{m}{V}, \ pM = \rho RT,$$

откуда

$$T_1 = \frac{pM}{\rho R} = \frac{8 \cdot 10^8 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{10^2 \cdot 8{,}31} = 308 \text{ К}.$$

Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса) для произвольного количества газа имеет вид:

$$\left(p + \frac{m^2}{M^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(\frac{VM}{m} - b\right) = RT.$$

Преобразуем уравнение с учетом того, что $\rho = \frac{m}{V}$,

$$\left(p + \frac{\rho^2 a}{M^2}\right)\left(\frac{m}{\rho} - b\right) = RT,$$

откуда

$$T_2 = \frac{\left(p + \frac{\rho^2 a}{M^2}\right)\left(\frac{M}{\rho} - b\right)}{R} =$$

$$= \frac{\left(8 \cdot 10^6 + \frac{10^4 \cdot 0{,}136}{32^2 \cdot 10^{-6}}\right)\left(\frac{32 \cdot 10^{-3}}{10^2} - 3{,}17 \cdot 10^{-5}\right)}{8{,}31} = 324 \text{ К}.$$

Задачи для самостоятельного решения

15.1. В сосуде объемом $V = 10$ л находится азот массой $m = 0{,}15$ кг. Определить: а) внутреннее давление газа; б) собственный объем молекул.

Ответ: а) $p' = 104$ кПа, б) $V = 82{,}5$ см^3.

15.2. В сосуде емкостью $V = 0{,}3$ л находится один моль углекислого газа при температуре $T = 304$ К. Определить давление p газа: а) по уравнению Клапейрона-Менделеева; б) по уравнению Ван-дер-Ваальса.

Ответ: а) $p = 8{,}31$ МПа, б) $p = 5{,}67$ МПа.

15.3. Даны постоянные a и b, входящие в уравнение Ван-дер-Ваальса: $a = 1{,}36 \cdot 10^5$ Н · м^4/кмоль, $b = 0{,}0322$ м^3/кмоль. Определить значения критической температуры и критического давления аргона.

Ответ: $T_к = 151$ К, $p_к = 4{,}86 \cdot 10^6$ Па.

15.4. Углекислый газ массой 6,6 кг занимает объем $V = 3{,}75$ м^3 при давлении $p = 0{,}1$ МПа. Определить температуру газа, считая его идеальным; реальным.

Ответ: $T_{ид} = 301$ К, $T_р = 302$ К.

15.5. В сосуде, объемом $V = 10$ л находится масса $m = 0{,}25$ кг азота при температуре $t = 27$ °С. Какую часть давления газа составляет давление, обусловленное силами взаимодействия молекул? Какую часть объема сосуда составляет собственный объем молекул?

Ответ: $p_i / p = 4{,}95$ %, $V_i / V = 0{,}86$ %.

15.6. Количество $\nu = 1$ кмоль кислорода находится при температуре $t = 27$ °С и давлении $p = 5$ МПа. Найти объем V газа, считая, что кислород при данных условиях ведет себя как реальный газ.

Ответ: $V = 231$ л.

15.7. Количество $\nu = 1$ кмоль гелия занимает объем $V = 0{,}237$ м^3 при температуре $t = -200$ °С. Найти давление газа, пользуясь уравнением Ван-дер-Ваальса в приведенных величинах.

Ответ: $p = 2{,}7$ МПа.

15.8. Масса $m = 20$ кг азота адиабатически расширяется в вакуум от объема $V_1 = 1$ м^3 до объема $V_2 = 2$ м^3. Найти понижение ΔT температуры при этом расширении, считая известной для азота постоянную a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Ответ: $\Delta T = 2{,}33$ К.

15.9. Количество $\nu = 0{,}5$ кмоль трехатомного газа адиабатически расширяя в вакуум от объема $V_1 = 0{,}5$ м^3 до объема $V_2 = 3$ м^3. Температура газа при этом понижается на $\Delta T = 12{,}2$ К. Найти постоянную a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Ответ: $a = 0{,}364$ Па · м^6/кмоль^2.

15.10. Найти плотность $\rho_к$ гелия в критическом состоянии, считая известным для гелия критического значения $T_к$ и $p_к$.

Ответ: $\rho_к = 57$ кг/м^3.