Занятие № 9

Тема: **Волны де-Бройля**

Краткая теория

Корпускулярно-волновая двойственность свойств характерна не только для света, она проявляется для всех частиц, обладающих импульсом. Эта идея принадлежит французскому физику Луи де-Бройлю, поэтому волны, которые сопровождают движение любой материальной частицы, носят название волн де-Бройля. Природа этих волн не электромагнитная.

Формула де-Бройля устанавливает зависимость длины волны, связанной с движущейся материальной частицей, от ее импульса *p*.

$$\lambda = h/p = h/(m\upsilon),$$

где m – масса частицы, υ – скорость частицы, h – постоянная Планка.

Если частица релятивистская, т.е. ее скорость υ сравнима со скоростью света в вакууме *c*, то импульс частицы определяется, как

$$p = m\upsilon = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}},$$

где m_0 – масса покоя частицы.

Соответственно изменяется формула де-Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}.$$

Волны де-Бройля, как и любые волны, характеризуются волновым числом, т.е. числом длин волн, укладывающимся на 2π единицах длины:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Объединив это выражение с формулой де-Бройля, получим еще один ее вид:

$$\vec{p} = \frac{h}{2\pi}\vec{k},$$

где $\vec{k}$ – волновой вектор, модуль его равен волновому числу k, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{p}$.

Длина волны де-Бройля для частицы с массой m, имеющей кинетическую энергию $W_к$, определяется из соотношения

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mW_к}}.$$

Для релятивистской частицы связь между кинетической энергией частицы $W_к$, определяется из уравнения

$$p^2c^2 = W_к(W_к + 2m_0c^2) \Rightarrow$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_к(W_к + 2m_0c^2)}\,.$$

У макроскопических тел волновые свойства не проявляются, так как масса их значительна и величина длины волны де-Бройля λ пренебрежимо мала.

Кроме формулы де-Бройля в квантовой механике принимается, что связь энергии частицы W с частотой ее волны де-Бройля ν имеет вид, аналогичный кванту энергии

$$W = h\nu = \hbar\omega,$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота.

Волны де-Бройля имеют специфическую природу, не имеющую аналогии в классической физике. Это так называемые вероятностные волны – квадрат модуля амплитуды волны де-Бройля в данной точке является мерой вероятности того, что частица будет обнаружена в этой точке.

Примеры решения задач

Задача 9.1. Найти длину волны де-Бройля λ для электрона, обладающего кинетической энергией: 1) $W_к$ = 100 эВ, 2) $W_к$ = 3,0 МэВ.

Решение

1) $W_к$ = 100 эВ 2) $W_к$ = 3 МэВ $\lambda_1 - ?\ \lambda_2 - ?$	Для определения того, является или нет электрон релятивистской частицей, необходимо сравнить его энергию с энергией его покоя $E_0 = m_0c^2$

$$E_0 = 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 9\cdot 10^{16} = 81{,}9\cdot 10^{-15}\ \text{Дж} = 0{,}512\ \text{МэВ}.$$

1) 100 эВ << 512000 эВ, т.е. в данном случае электрон является классической частицей, поэтому его импульс $p = \sqrt{2mW_к}$. Из формулы де-Бройля следует

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2mW_к}} = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}}{\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 100\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}} = 1{,}23\cdot 10^{-10}\ \text{м} = 1{,}23\ \mathring{A}.$$

2) 3 МэВ > 0,512 МэВ, поэтому в этом случае электрон надо считать релятивистской частицей, т.е. его импульс

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_к(W_к + 2m_0c^2)},$$

откуда следует, что

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{W_к(W_к + 2m_0c^2)}} \Rightarrow$$

$$\lambda_2 = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{3 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}(3 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} + 2 \cdot 0{,}512 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19})}} =$$

$$= 0{,}62 \cdot 10^{-10}\ м = 0{,}62\ \overset{\circ}{A}.$$

Ответ: $\lambda_1 = 1{,}23\ \overset{\circ}{A}$, $\lambda_2 = 0{,}62\ \overset{\circ}{A}$.

Задача 9.2. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов U = 500 В, имеет длину волны де-Бройля λ = 1,282 пм. Принимая заряд этой частицы равным заряду электрона, определить ее массу.

Решение

Дано
U = 500 В
λ = 1,282 пм
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$m - ?$

Частица с зарядом e, пройдя ускоряющую разность потенциалов U, получает кинетическую энергию

$$W_к = eU \qquad (1)$$

Из выражения (1) определяется импульс частицы

$$p = \sqrt{2mW_к} = \sqrt{2meU}. \qquad (2)$$

С учетом (2) формула де-Бройля запишется так:

$$\lambda = h/p = \frac{h}{\sqrt{2meU}},$$

откуда

$$m = \frac{h^2}{2e\lambda^2U} \Rightarrow$$

$$m = \frac{6{,}62^2 \cdot 10^{-68}}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}282^2 \cdot 10^{-24} \cdot 500} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ кг.$$

Ответ: $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Задача 9.3. Определить длину волны де-Бройля для электрона, находящегося в атоме водорода на третьей боровской орбите.

Решение

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $n = 3$	Электрон в атоме водорода движется по орбите под действием кулоновской силы взаимодействия с ядром
$\lambda - ?$	

$$\frac{m_e \upsilon^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{1}$$

Орбитальный момент электрона квантуется в соответствии с соотношением:

$$m_e \upsilon r = n\hbar \tag{2}$$

Совместное рассмотрение выражений (1) и (2) дает

$$\upsilon = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}. \tag{3}$$

Подставим (3) в формулу де-Бройля

$$\lambda = \frac{h}{m_e \upsilon} = \frac{2h^2 n \varepsilon_0}{m_e e^2} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 6{,}62^2 \cdot 10^{-68} \cdot 3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6^2 \cdot 10^{-38}} = 99{,}89 \cdot 10^{-11} \approx 1 \text{ нм}.$$

Ответ: λ = 1 нм.

Задача 9.4. Найти длину волны де-Бройля для: а) электрона, движущегося со скоростью $\upsilon = 10^6$ м/с, б) атома водорода, движущегося со средней квадратичной скоростью при температуре T = 300 К, в) шарика массой m = 1 г, движущегося со скоростью $\upsilon = 1$ см/с.

Решение

а) $\upsilon = 10^6$ м/с $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг б) T = 300 К $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$	а) В соответствии с формулой де-Бройля $\lambda_1 = \frac{h}{m_e \upsilon} \Rightarrow$

R = 8,31 Дж/(моль · К)
в) m = 1 г
υ = 1 см/с

$\lambda_1 - ?\ \lambda_2 - ?\ \lambda_3 - ?$

$$\lambda_1 = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^6} = 0{,}73 \cdot 10^{-9} = 0{,}73 \text{ нм}.$$

б) Средняя квадратичная скорость атома водорода определяется, как

$$\overline{\upsilon}_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \qquad (1)$$

Масса атома водорода равна

$$m = \frac{\mu}{N_A}. \qquad (2)$$

Подставим (1) и (2) в формулу де-Бройля

$$\lambda_2 = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{hN_A}{\mu}\sqrt{\frac{\mu}{3RT}} = \frac{hN_A}{\sqrt{3\mu RT}} \Rightarrow$$

$$\lambda_2 = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{\sqrt{3 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 300}} 14{,}6 \cdot 10^{-11} \text{ м} = 146 \text{ пм}.$$

в) По формуле де-Бройля

$$\lambda_3 = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{10^{-3} \cdot 10^{-2}} = 6{,}62 \cdot 10^{-29} \text{ м},$$

Ответ: а) $\lambda_1 = 0{,}73$ нм, б) $\lambda_2 = 146$ пм, в) $\lambda_3 = 6{,}62 \cdot 10^{-29}$ м, т.е. волновые свойства шарика обнаружить невозможно.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить импульс и энергию: 1) рентгеновского фотона, 2) электрона, если длина волны того и другого равна 10^{-10} м.

Ответ: 1) $p_\gamma = 6{,}62 \cdot 10^{-24}$ кг · м/с, $W_\gamma = 12{,}4$ кэВ, 2) $p_e = 6{,}62 \cdot 10^{-24}$ кг · м/с, $W_e = 151$ кэВ.

2. Определить длину волны де-Бройля для нейтрона, движущегося со средней квадратичной скоростью при Т = 290 К.

Ответ: λ = 148 пм.

3. Определить, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы длина волны де-Бройля λ для него была равна 1 нм.

Ответ: U = 0,822 мВ.

4. Определить, как изменится длина волны де-Бройля электрона в атоме водорода при переходе его с четвертой боровской орбиты на вторую.

Ответ: $\frac{\lambda_4}{\lambda_2} = 2$.

5. Определить, при каком числовом значении скорости длина волны де-Бройля для электрона равна его комптоновской длине волны.

Ответ: $\upsilon = 2{,}12 \cdot 10^8$ м/с.

6. Вывести связь между длиной круговой электронной орбиты и длиной волны де-Бройля.

Ответ: $2\pi r = n\lambda$.

7. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U. Найти длину волны де-Бройля λ для двух случаев: а) $U_1 = 51$ В, б) $U_2 = 510$ кВ.

Ответ: а) $\lambda_1 = 172$ пм, б) $\lambda_2 = 1{,}4$ пм.

8. Определить длину волны де-Бройля λ электрона, если его кинетическая энергия $W_к$ = 1 кэВ.

Ответ: λ = 39 пм.

9. Сравнить длину волны де-Бройля для электрона и шарика массой 0,12 г, имеющих одинаковые скорости.

Ответ: $\frac{\lambda_ш}{\lambda_э} = 9{,}1 \cdot 10^{-27}$.

10. Сравнить длину волны де-Бройля для электрона и протона, прошедших ускоряющую разность потенциалов U = 1000 В.

Ответ: $\frac{\lambda_э}{\lambda_п} = 42{,}8$.

11. Электрон обладает кинетической энергией 1,53 МэВ. Во сколько раз изменится длина волны де-Бройля, если кинетическая энергия электрона уменьшится втрое?

Ответ: n = 2,24.

12. Определить длину волны де-Бройля λ, характеризующую волновые свойства электрона, если его скорость $\upsilon = 1$ Мм/с. Сделать такой же подсчет для протона.

Ответ: $\lambda_э = 727$ пм, $\lambda_п = 0{,}396$ пм.

13. Электрон движется со скоростью $\upsilon = 200$ Мм/с. Определить длину волны де-Бройля λ, учитывая изменение массы электрона в зависимости от скорости.

Ответ: λ = 2,7 пм.

14. Найти длину волны де-Бройля λ для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

Ответ: λ = 0,33 пм.

15. Определить длину волны де-Бройля λ для электрона, находящегося на второй орбите атома водорода.

Ответ: λ = 0,67 нм.

16. Вычислить отношение кинетической энергии электрона к кинетической энергии протона с одинаковой длиной волны де-Бройля. Скорости существенно меньше, чем скорость света.

Ответ: 1836.

17. Какую энергию необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от 100 до 50 пм?

Ответ: 0,45 кэВ.

Занятие № 10

Тема: **Соотношение неопределенностей**

Краткая теория

Благодаря двойственной корпускулярно-волновой природе вещества для описания микрочастиц используют то волновые, то корпускулярные представления. Поведение микрочастиц не может описываться законами классической физики. В классической механике частица движется по определенной траектории и в любой момент времени точно фиксированы ее координаты и импульс. В квантовой физике понятие «длина волны в данной точке» лишено физического смысла, поэтому микрочастица с определенным импульсом имеет неопределенную координату. И наоборот, если микрочастица находится в состоянии с точным значением координаты, то ее импульс является полностью неопределенным.

Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга, неопределенность импульса частицы, обусловленная ее волновыми свойствами, связана с неопределенностью координаты частицы выражением

$$\Delta x \cdot \Delta p \ge \hbar ,$$

где Δx – неопределенность координаты частицы, т.е. интервал возможных значений координаты, определяющей положение частицы в пространстве, Δp – неопределенность импульса частицы, т.е. интервал возможных изменений импульса частицы, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка.

В случае трехмерного пространства соотношение неопределенностей Гейзенберга имеет вид:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar,$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar,$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar.$$

Для энергии и времени соотношение неопределенностей имеет вид:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar,$$

где ΔE – неопределенность энергии данного квантового состояния, Δt – время пребывания системы в данном состоянии.

Примеры решения задач

Задача 10.1. Используя соотношение неопределенностей $\Delta x \cdot \Delta p \geq h$**,** оценить нулевой энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять линейные размеры атома $l \approx 0{,}1$ нм.

Решение

$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг $l = 0{,}01$ нм $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с	$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar.$ Электрон находится в области с неопределенностью координаты
$E_{\min} - ?$	

$$\Delta x = l / 2.$$

Неопределенность в определении импульса не превышает сам импульс частицы: $\Delta p \leq p$. Импульс связан с энергией соотношением

$$p = \sqrt{2mE},$$

тогда

$$\frac{l}{2}\sqrt{2mE} \ge \hbar .$$

Переходя от неравенства к равенству, получаем:

$$E_{\min} = \frac{2\hbar^2}{ml^2},$$

$$E_{\min} = \frac{2\cdot(1{,}05\cdot10^{-34})^2}{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot(0{,}1\cdot10^{-9})^2} = 24{,}2\cdot10^{-19} \text{ Дж} = 15 \text{ эВ}.$$

Ответ: $E_{\min} = 15$ эВ.

Задача 10.2. Во сколько раз длина волны де Бройля λ частицы меньше неопределенности Δx ее координаты, которая соответствует относительной неопределенности импульса в 1 %?

Решение

$\dfrac{\Delta p}{p} = 0{,}01$	Соотношение неопределенности для координаты и импульса частицы:
$\dfrac{\Delta x}{\lambda}$ – ?	$$\Delta x \cdot \Delta p \ge \hbar,$$

по условию, $\Delta p = 0{,}01p$.

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi},\ \ p = \hbar\frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\frac{\Delta x \cdot 0{,}01\cdot\hbar\cdot2\pi}{\lambda} \ge \hbar,$$

$$\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{1}{0{,}01\cdot2\pi} = 16.$$

Ответ: в 16 раз.

Задача 10.3. Определить неточность Δx в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $\upsilon = 1{,}5 \cdot 10^6$ м/с, если допускаемая неточность $\Delta\upsilon$ в определении импульса составляет 10 % от ее величины. Сравнить полученную неточность с диаметром d атома водорода, вычисленным по теории Бора для основного состояния. Указать, применимо ли понятие траектории в данном случае.

Решение

$\upsilon = 1{,}5 \cdot 10^6$ м/с $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг $\dfrac{\Delta\upsilon}{\upsilon} = 0{,}1$	Неопределенность координаты и импульса электрона связаны соотношением:
$\Delta x - ?$	

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar,$$

$$\Delta p = m\Delta\upsilon,$$

по условию задачи $\Delta\upsilon = 0{,}1\upsilon$, тогда

$$\Delta x = \frac{\hbar}{m \cdot 0{,}1\upsilon},$$

$$\Delta x = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}5 \cdot 10^6} = 0{,}77 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 0{,}77 \text{ нм}.$$

Диаметр атома водорода $d = 10{,}5 \cdot 10^{-11}$ м = 0,105 нм. Так как $\Delta x > d$, то понятие траектории в данном случае не применимо.

Ответ: $\Delta x = 0{,}77$ нм, $d = 0{,}105$ нм; так как $\Delta x > d$, то понятие траектории в данном случае не применимо.

Задача 10.4. Используя соотношение неопределенностей, определить наименьшую неточность, с которой можно вычислить координату электрона в атоме. Средняя кинетическая энергия электрона в невозбужденном атоме водорода равна 13,6 эВ.

Решение

$T = 13{,}6$ эВ	Соотношение неопределенностей для координаты и импульса имеет вид
$\Delta x_{\text{наим}} - ?$	

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar.$$

Неточность координаты частицы:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p_x}.$$

Энергия покоя частицы (электрона) $E_0 = m_0 c^2 = 0{,}511$ МэВ, значит, $T << E_0$. При этом условии электрон является нерелятивистской частицей.

Связь импульса с кинетической энергией в нашем случае

$$p = \sqrt{2mT}.$$

Это модуль вектора импульса. Проекция p_x на ось x оказывается неопределенной, так как ее величина изменяется в интервале ($-p$; p).

Поэтому за определенность импульса Δp_x можно взять величину, не превышающую значение самого импульса

$$\Delta p_x \leq p_x.$$

Отсюда величина Δx выразится так:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\sqrt{2mT}},$$

$$\Delta x \geq \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 13{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}} = 0{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Ответ: наименьшая допускаемая соотношением неопределенностей неточность $\Delta x_{\text{наим}}$, с которой можно определить координату электрона в атоме водорода есть величина порядка $5 \cdot 10^{-11}$ м.

Задачи для самостоятельного решения

18. Используя соотношение неопределенностей, оценить кинетическую энергию нуклона в ядре, полагая радиус ядра равным 10^{-12} см.

Ответ: T = 0,21 МэВ.

19. Электрон движется в атоме водорода по первой боровской орбите. Принимая, что допускаемая неопределенность скорости составляет 1 % от ее числового значения, определить неопределенность координаты электрона. Применимо ли в данном случае для электрона понятие траектории?

Ответ: Δx = 0,33 нм; нет.

20. При движении вдоль оси x скорость определяется с точностью до 1 см/с. Определить неопределенность координаты: 1) для электрона, 2) для дробинки массой 0,1 г.

Ответ: 1) Δx = 1,15 см, 2) Δx = 10^{-26} см.

21. Используя соотношение неопределенностей, оценить ширину одномерного потенциального ящика, в котором минимальная энергия электрона равна 10 эВ.

Ответ: l = 0,123 нм.

22. Электрон с кинетической энергией T = 15 эВ находится в металлической пылинке диаметром d = 1 мкм. Определить относительную неточность $\frac{\Delta\upsilon}{\upsilon}$, с которой может быть определена скорость электрона.

Ответ: $\frac{\Delta\upsilon}{\upsilon} = 1\cdot 10^{-4}$.

23. Сравнить неопределенность при измерении скорости электрона атома водорода с величиной его скорости на первой боровской орбите.

Ответ: $\Delta\upsilon = \upsilon$.

Занятие № 11

Тема: **Уравнение Шредингера.**

Краткая теория

Основное уравнение нерелятивистской квантовой механики сформулировано Э. Шредингером и носит его имя. Уравнение Шредингера, зависящее от времени, имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(x,y,z,t)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, m – масса частицы, Δ – оператор Лапласа $\left(\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)$, i – мнимая единица $\left(i^2 = -1\right)$, $U(x,y,z,t)$ – потенциальная энергия частицы в силовом поле, в котором она движется, $\psi(x,y,z,t)$ – искомая волновая функция частицы, описывающая ее состояние.

Одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний:

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi(x)=0,$$

где E – полная энергия частицы, $U(x)$ – потенциальная энергия, $\psi(x)$ – координатная (или амплитудная) часть волновой функции.

Волновая функция, описывающая одномерное движение свободной частицы:

$$\psi(x,t)=A\exp\left[\frac{t}{\hbar}(px-Et)\right],$$

где A – амплитуда волны де Бройля, p – импульс частицы, E – энергия частицы.

Уравнение Шредингера справедливо для любой частицы, движущейся с малой (по сравнению со скоростью света) скоростью $\upsilon \ll c$. На волновую функцию ψ накладываются условия: 1) волновая функция должна быть конечной, однозначной и непрерывной, 2) производные $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ должны быть непрерывны, 3) функция $|\psi|^2$ должна быть интегрируема (условие нормировки вероятностей).

Квадрат модуля ψ функции $|\psi|^2$ имеет смысл плотности вероятности, т.е. определяет вероятность нахождения микрочастицы в единичном объеме в окрестности точки с координатами (x,y,z). Таким образом, физический смысл имеет не сама ψ-функция, а квадрат ее модуля $|\psi|^2$, которым задается интенсивность волн де Бройля.

Частица на скачке потенциальной энергии (рис. 11.1).

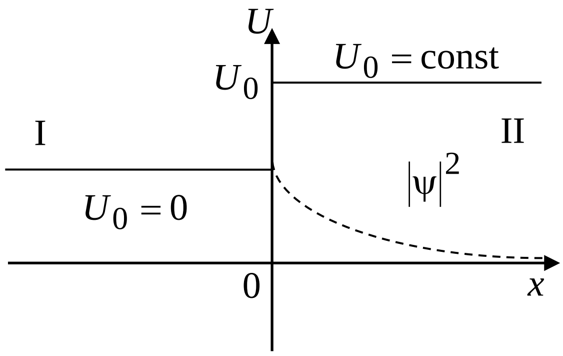

Рис. 11.1

$$U(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ U_0=\text{const при } x>0.\end{cases}$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний:

а) в области I $(x<0)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}=E\psi;$$

б) в области II $(x>0)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}+U_0\psi=E\psi.$$

Решение уравнения Шредингера (волновая функция)

а) в области I $(x<0)$:

$$\psi=A_1e^{ikx}+A_2e^{-ikx},$$

где $k^2=\dfrac{2mE}{\hbar^2}$;

б) в области II $(x>0)$ решение уравнения зависит от знака разности $(E-U_0)$:

1) если полная энергия частицы E больше потенциальной U_0, то уравнение Шредингера имеет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0,$$

где $k^2=\dfrac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)$, решение качественно аналогично решению для области I;

2) если полная энергия E меньше потенциальной, то уравнение Шредингера имеет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}-\chi^2\psi=0,$$

где $\chi^2=\dfrac{2m}{\hbar^2}(U_0-E)$.

Волновая функция в области II в случае $E < U_0$ монотонна:

$$\psi = B_1 e^{-\chi x} + B_2 e^{\chi x}.$$

В силу требования конечности волновой функции следует положить $B_2 = 0$.

Плотность вероятности $|\psi|^2$:

а) для области I $(x < 0)$:

$$|\psi|^2 = \text{const};$$

б) для области II $(x > 0)$:

1) в случае $E > U_0$:

$$|\psi|^2 = \text{const};$$

2) в случае $E < U_0$ экспоненциально убывает

$$|\psi|^2 = B_1^2 e^{-2\chi x}.$$

Примеры решения задач

Задача 11.1. Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике шириной *l*. Написать уравнение Шредингера и его решение для области II ($0 \le x \le l$).

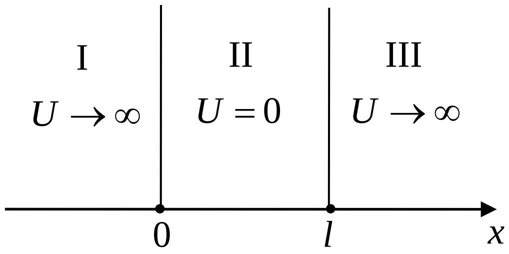

Рис. 11.1

Решение

В области II потенциальная энергия $U = 0$. Одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний при $U = 0$ имеет вид:

$$\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi(x) = 0.$$

Решение $\psi(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$. Константы C_1 и C_2 определяем следующим образом. На границе «ямы» (при $x = 0$, $x = l$) непрерывная волновая функция должна обращаться в нуль. Граничные условия имеют вид:

$$\psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Т.е. $C_2 = 0$. Тогда $\psi(x) = C_1 \sin kx$. Условие $\psi(l) = C_1 \sin kl = 0$ выполняется при $kl = n\pi$, где n – целые числа, т.е. $k = \frac{n\pi}{l}$.

Постоянную C_1 находим из условия нормировки, которое для данного случая запишется в виде:

$$C_1^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = 1.$$

Делаем преобразования левой части уравнения

$$C_1^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = C_1^2 \int_0^l \frac{1 - \cos \frac{2\pi n x}{l}}{2} dx =$$

$$C_1^2 \left[\frac{1}{2} x \Big|_0^l - \frac{1}{2} \frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l} \Big|_0^l \right] = C_1^2 \frac{1}{2} l.$$

Получаем

$$C_1^2 \frac{1}{2} l = 1,$$

отсюда

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Ответ: $\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi(x) = 0$, $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \; (n = 1, 2, 3, ...)$.

Задача 11.2. Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике шириной l. Вычислить вероятность того, что электрон, находящийся в возбужденном состоянии ($n = 2$), будет обнаружен в средней трети ящика.

Решение

$n = 2$ $x_1 = \frac{l}{3}$ $x_2 = \frac{2l}{3}$	Вероятность W обнаружить частицу в интервале $x_1 < x < x_2$ определяется равенством:
$W - ?$	$$W = \int\limits_{x_1}^{x_2} \lvert\psi_n(x)\rvert^2 dx,$$

где $\psi_n(x)$ – нормированная собственная волновая функция, отвечающая данному состоянию.

Нормированная собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в потенциальном ящике, имеет вид:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Возбужденному состоянию ($n = 2$) отвечает собственная функция

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{2\pi}{l}x.$$

Подставляем $\psi_2(x)$ в подинтегральное выражение для функции W

$$W = \frac{l}{2}\int\limits_{x_1}^{x_2} \sin^2\frac{2\pi}{l}xdx.$$

Согласно условию задачи, $x_1 = \frac{l}{3}$ и $x_2 = \frac{2l}{3}$. Подставим эти пределы интегрирования в выражение для W, произведем замену $\sin^2\frac{2\pi}{l}x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{4\pi}{l}x\right)$ и разобьем интеграл на два:

$$W = \frac{2}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3} \sin^2\frac{2\pi}{l}xdx = \frac{1}{l}\left\{\int\limits_{l/3}^{2l/3} dx - \int\limits_{l/3}^{2l/3} \cos\frac{4\pi}{l}xdx\right\} =$$

$$= \frac{1}{l}\left\{\frac{l}{3} - \frac{l}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{l}x\Bigg|_{l/3}^{2l/3}\right\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\left(\sin\frac{8\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{4}\right).$$

Так как $\sin\frac{8\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3}$, а $\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3}$, получим:

$$W = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\cdot 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0{,}195.$$

Ответ: $W = 0{,}195$.

Задача 11.3. Частица находится в возбужденном состоянии (n = 3) в одномерном потенциальном ящике шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками $(0 < x < l)$. Определить вероятность обнаружения частицы в средней трети ящика.

Решение

Дано	
$n = 3$ $x_1 = \frac{l}{3}$ $x_2 = \frac{2l}{3}$	В одномерном случае вероятность dW обнаружения частицы в интервале dx можно определить по формуле:
$W - ?$	$$dW = \left\|\psi(x)\right\|^2 dx,$$

где $|\psi(x)|^2$ – плотность вероятности.

Вероятность обнаружения частицы в средней трети ящика $(l/3 < x < 2l/3)$ выражается через интеграл:

$$W = \int\limits_{l/3}^{2l/3} |\psi(x)|^2 dx.$$

Собственная функция, описывающая возбужденное состояние частицы (n = 3) в потенциальном ящике, имеет вид:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{3\pi}{l}x.$$

Находим искомое значение вероятности W

$$W = \frac{2}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}\sin^2\frac{3\pi}{l}x dx = \frac{2}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{6\pi x}{l}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{l}\left[\frac{l}{3} - \frac{l}{6\pi}(\sin 4\pi - \sin 2\pi)\right] = 0{,}33.$$

Ответ: W = 0,33.

Задачи для самостоятельного решения

24. Записать уравнение Шредингера для стационарных состояний электрона, находящегося в атоме водорода.

25. Вычислить отклонение вероятностей $\frac{W_1}{W_2}$ нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях в интервале $\frac{l}{4}$, равноудаленном от стенок одномерной потенциальной ямы шириной l.

Ответ: $\frac{W_1}{W_2} = 5{,}24$.

26. Оценить значение n, для которого можно считать справедливым приближение бесконечно высокой стенки, если на самом деле высота стенок ящика U конечна. Приняв $l = 10^{-10}$ м.

Ответ: $n << 14$.

27. Электрон находится в одномерном потенциальном ящике шириной l. Определить среднее значение координаты $\langle x \rangle$ электрона ($0 < x < l$).

Ответ: $\langle x \rangle = \frac{l}{2}$.

Занятие № 12

Тема: **Периодическая система элементов Д.И. Менделеева**

Краткая теория

Состояние каждого электрона в атоме однозначно характеризуется четырьмя квантовыми числами:

- главным n (n = 1, 2, 3, …);
- орбитальным (азимутальным) l (l = 0, 1, 2, 3, …, n – 1);
- магнитным m_l (m_l = 0, ±1, ±2, …, ±l);
- магнитным спиновым m_s =1/2, –1/2).

Распределение электронов в атоме подчиняется принципу Паули: в одном и том же атоме не может быть более одного электрона с одинаковым набором четырех квантовых чисел n, l, m_l, m_s, т.е.

$$Z(n, l, m_l, m_s) = 0 \text{ или } 1,$$

где $Z(n, l, m_l, m_s)$ – число электронов, находящихся в квантовом состоянии, описываемом набором четырех квантовых чисел n, l, m_l, m_s.

Число возможных состояний, соответствующих данному n:

$$Z(n) = \sum_{i=1}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2 .$$

Совокупность электронов в многоэлектронном атоме, имеющих одно и то же главное квантовое число n называется электронной оболочкой. В каждой из оболочек электроны распределяются по подоболочкам, соответствующим данному l. Число подоболочек равно порядковому номеру n оболочки. Количество электронов в подоболочке определяется магнитным и магнитным спиновым квантовыми числами: максимальное число электронов в подоболочке с данным l равно $2(2l+1)$.

Обозначение оболочек, распределение электронов по оболочкам и подоболочкам (табл. 12.1).

Таблица 12.1

Главное квантовое число n	1	2		3			4				5				
Символ оболочки	K	L		M			N				O				
Максимальное число электронов в оболочке	2	8		18			32				50				
Орбитальное квантовое число l	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
Символ подоболочки	$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$3d$	$4s$	$4p$	$4d$	$4f$	$5s$	$5p$	$5d$	$5f$	$5g$
Максимальное число электронов в подоболочке	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	18

Принцип Паули позволяет объяснить Периодическую систему элементов Д.И. Менделеева, которая является основой химии, атомной и ядерной физики.

Атомный номер равен заряду ядра в единицах элементарного заряда. При обозначении расположения электронов в атоме по оболочкам ставят главное квантовое число перед обозначением подгруппы, в которой находятся электроны; число электронов в этой подгруппе пишут как показатель степени: например, $2p^3$ означает три электрона в оболочке с $n = 2$ и подгруппе с $l = 1$.

Примеры решения задач

Задача 12.1. Указать (с учетом принципа Паули), какое максимальное количество электронов в атоме может иметь следующие одинаковые квантовые числа: 1) n, l, m_l, 2) m_l, m_s, если $n = 2$.

Решение

По принципу запрета Паули, в атоме не может быть двух и более электронов с одинаковыми квантовыми числами. Если три квантовых числа одинаковы, то электроны отличаются спином (собственным механическим моментом импульса), который может принимать для электронов только два значения:

$$L_s = m_s\hbar, \text{ где } m_s = \pm 1/2.$$

Значит:

а) электронов с тремя одинаковыми квантовыми числами n, l, m_l может быть не более двух;

б) квантовому числу $n = 2$ соответствуют два значения орбитального квантового числа $l(0;1)$. Каждому числу l соответствует набор значений магнитного квантового числа m_l ($m_l = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l$). С учетом того, что спин электронов с таким набором квантовых чисел должен быть одинаков, получим, что число таких электронов может быть не более двух. Набор квантовых чисел для этих электронов:

для 1: 2, 0, 0, +1/2;

для 2: 2, 1, 0, +1/2.

Задача 12.2. Чему равен квадрат орбитального момента импульса для электронных состояний: а) $2p$; б) $5f$?

Решение

Квадрат орбитального момента импульса определяется выражением

$$M^2 = l(l+1)\hbar^2,$$

где l – азимутальное квантовое число, принимающее целочисленные значения в интервале $0 = l = n-1$; n – главное квантовое число.

Совокупность электронов с одним и тем же значением главного квантового числа называется электронной оболочкой. Электроны с одинаковыми значениями главного и азимутального квантовых чисел образуют подоболочку, обозначаемую буквами латинского алфавита s, p, d, f и далее по алфавиту в порядке возрастания числа l. Значение главного квантового числа n указывается перед условным обозначением азимутального квантового числа l.

Поскольку l всегда меньше n, возможны следующие состояния электрона:

$n = 1: 1s(l = 0)$;

$n = 2: 2s(l = 0), 2p(l = 1)$;

$n = 3: 3s(l = 0), 3p(l = 1), 3d(l = 2)$;

$n = 4: 4s(l = 0), 4p(l = 1), 4d(l = 2), 4f(l = 3)$;

$n = 5: 5s(l = 0), 5p(l = 1), 5d(l = 2), 5f(l = 3), 5g(l = 4)$;

и так далее.

Следовательно, в случае:

а) электронное состояние задано в виде $2p$, т.е. $n = 2, l = 1$, тогда

$$M^2 = 1(1+1)\hbar^2 = 2\hbar^2;$$

б) электронное состояние задано в виде $5f$, т.е. $n = 5, l = 3$, тогда

$$M^2 = 3(3+1)\hbar^2 = 12\hbar^2.$$

Ответ: а) $M^2 = 2\hbar^2$; б) $M^2 = 12\hbar^2$.

Задача 12.3. Состояние атома характеризуется квантовыми числами L и S, равными: а) 2 и 2; б) 3 и 2; в) 2 и 3; г) 1 и 3/2. Написать возможные значения квантового числа J при данных значениях L и S.

Решение

а) $L = 2; S = 2$;
б) $L = 3; S = 2$;
в) $L = 2; S = 3$;
г) $L = 1; S = 3/2$;

$J - ?$

Квантовое число L характеризует суммарный орбитальный момент импульса электронов в атоме

$$M = \hbar\sqrt{L(L+1)},$$

Оно может принимать целочисленные неотрицательные значения.

Квантовое число S определяет результирующий спиновый момент импульса электронов в атоме:

$$M_S = \hbar\sqrt{S(S+1)}.$$

Спиновое число S может быть целым либо полуцелым неотрицательным числом в зависимости от того, четным или нечетным является число электронов в атоме. При четном числе электронов N квантовое число S принимает все полученные значения от $N/2$ (одинаковая ориентация спиновых моментов всех электронов) до 1/2 (все спиновые моменты, кроме одного, попарно компенсируют друг друга). В зависимости от относительной ориентации орбитального M_l и спинового моментов импульса M_S, квантовое число J результирующего момента импульса атома M_J может принимать одно из следующих значений:

$$J = L + S;\ L + S - 1;....;\ |L - S|.$$

Следовательно, в случае:

а) $J_{\max} = 4;\ J_{\min} = 0$;

б) $J_{\max} = 5;\ J_{\min} = 1$;

в) $J_{\max} = 5;\ J_{\min} = 1$;

г) $J_{\max} = 5/2;\ J_{\min} = 1/2$.

Ответ: а) 4, 3, 2, 1, 0; б) 5, 4, 3, 2, 1; в) 5, 4, 3, 2, 1; г) 5/2, 3/2, 1/2.

Задачи для самостоятельного решения

28. Определите суммарное максимальное число *s*-, *p*-, *d*-, *f*- и *g*-электронов, которые могут находиться в *N*- и *O*-оболочках атома.

Ответ: 82.

29. Запишите квантовые числа, определяющие внешний, или валентный, электрон в основном состоянии атома натрия.

30. Пользуясь Периодической системой элементов, запишите символически электронную конфигурацию следующих атомов в основном состоянии: 1) неона; 2) аргона; 3) криптона.

31. Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число $n = 4$. Определите число электронов в этой оболочке, которые имеют одинаковые следующие квантовые числа: 1) $m_l = -3$; 2) $m_s = 1/2$, $l = 2$; 3) $m_s = -1/2$, $m_l = 1$.

Ответ: 1) 2; 2) 5; 3) 3.

32. Пользуясь Периодической системой элементов, запишите символически электронную конфигурацию атома меди в основном состоянии.

33. Определите в Периодической системе элементов порядковый номер элемента, у которого в основном состоянии заполнены K-, L-, M-оболочки, а также $4s$-подоболочка.

34. Электронная конфигурация некоторого элемента $1s^2 2s^2 3s^2 3p$. Определите, что это за элемент.

35. Сколько s-, p- и d-электронов находится в атоме на первом, втором и третьем энергетических уровнях?

36. Основное состояние атома цезия обозначается символически следующим образом: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6 6s$. Определить число слоев и оболочек, количество электронов в каждом слое и оболочке и общее число электронов.

Занятие № 13

Тема: **Центральное симметричное силовое поле. Атом водорода**

Краткая теория

По теории Бора электрон в атоме водорода и водородоподобных систем движется по круговой орбите радиуса r, на которой его удерживает кулоновская сила притяжения электрона к ядру, играющая роль центростремительной силы. Энергия электрона в атоме водорода складывается из кинетической энергии и потенциальной энергии в центральном симметричном силовом поле ядра.

Согласно первому постулату Бора, движение электрона вокруг ядра возможно только по определенным орбитам, радиусы которых удовлетворяют соотношению

$$m\upsilon_k r_k = k\frac{h}{2\pi},$$

где m – масса электрона, υ_k – его скорость на k-ой орбите, r_k – радиус этой орбиты, h – постоянная Планка, k – любое целое число (квантовое число).

Согласно второму постулату Бора, частота излучения, соответствующая переходу электрона с одной орбиты на другую, определяется формулой

$$h\nu = E_n - E_k,$$

где k и n – номера соответствующих орбит ($n > k$), E_k и E_n – значения энергии электрона на соответствующих орбитах.

Частота или длина волны λ, соответствующие линиям водородного спектра:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = Rc\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где k и n – номера орбит, c – скорость света в вакууме, R – постоянная Ридберга, равная

$$R = \frac{e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1{,}097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1},$$

где e – заряд электрона, m – его масса, ε_0 – электрическая постоянная.

Частота ν или длина волны для водородоподобных ионов:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = Rcz^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где z – порядковый номер элемента в таблице Менделеева.

Радиус n-ой стационарной орбиты:

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{m_e z e^2},$$

где n = 1, 2, 3,…, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Полная энергия электрона в водородоподобной системе

$$E = \frac{m_e \upsilon^2}{2} - \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{2}\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Энергия электрона может принимать только следующие дозволенные дискретные значения:

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{z^2 m_e e^4}{8\hbar^2 \varepsilon_0^2}, \ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Примеры решения задач

Задача 13.1. Определить первый боровский радиус орбиты в атоме водорода и скорость движения электрона по этой орбите.

Решение

$z = 1$	Радиус n-ой орбиты в водородоподобном атоме, заряд которого равен z_e, определяется по формуле
$n = 1$	
$r_1, \upsilon - ?$	

$$r_n = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{mze^2} n^2 = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi mze^2} n^2,$$

где n – номер орбиты, m – масса электрона.

При $n = 1$ и $z = 1$

$$r_1 = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi me^2} = \frac{6{,}63^2 \cdot 10^{-68} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{3{,}14 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-38}} = 0{,}53 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

По второму постулату Бора момент импульса на n-ой орбите равен

$$m\upsilon r_n = n\frac{h}{2\pi},$$

тогда

$$\upsilon = \frac{nh}{2\pi m r_n} = \frac{1 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}53 \cdot 10^{-10}} = 2{,}2 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Ответ: $r_1 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ м, $\upsilon = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

Задача 13.2. Определить длину волны спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода с шестой орбиты на вторую.

Решение

$m = 2$	Длина волны фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода, определяется по обобщенной формуле Бальмера
$n = 6$	
$R = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$	
$\lambda - ?$	

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{1}{R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right)} = 4{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Ответ: $\lambda = 4{,}1 \cdot 10^{-7}$ м.

Задача 13.3. Сколько линий спектра атома водорода попадает в видимую область ($\lambda = 0{,}4 \div 0{,}76$ мкм)? Вычислить длины волн этих линий. Каким цветам они соответствуют?

Решение

$0{,}4 \le \lambda \le 0{,}76$ мкм
$R = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$
$\lambda - ?$

Длины волн спектра атома водорода определяются по формуле:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где n = 1, 2, 3, …, $m = n + 1, n + 2$, ….

В видимой области спектра находятся первые четыре линии Бальмера (n = 2, m = 3, 4, 5, 6). Длины волн этих линий будут равны

$$\lambda_1 = \frac{1}{R_1\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)} = 6{,}56 \cdot 10^{-7} \text{ м – красная линия,}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)} = 4{,}86 \cdot 10^{-7} \text{ м – голубая линия,}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right)} = 4{,}34 \cdot 10^{-7} \text{ м – фиолетовая линия,}$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right)} = 4{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ м – фиолетовая линия.}$$

Задачи для самостоятельного решения

37. Атом водорода испустил фотон с длиной волны $4{,}86 \cdot 10^{-7}$ м. На сколько изменилась энергия электрона в атоме?

Ответ: $\Delta E = 2{,}56$ эВ.

38. Найти кинетическую, потенциальную и полную энергии электрона на первой боровской орбите.

Ответ: $E_к = 13{,}6$ эВ, $E_п = -27{,}2$ эВ, $E = -13{,}6$ эВ.

39. Вычислить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.

Ответ: $E = 12{,}1$ эВ.

40. Найти потенциал ионизации U_i атома водорода.

Ответ: $U_i = 13{,}6$ В.

41. Определить скорость электрона на третьей орбите атома водорода. Ответ: $\upsilon = 0{,}73 \cdot 10^6$ м/с.

42. Определить частоту вращения электрона по третьей орбите атома водорода в теории Бора.

Ответ: $\nu = 2{,}42 \cdot 10^{14}$ Гц.

43. Вычислить длину волны, которую испускает ион гелия He^+ при переходе со второго энергетического уровня на первый.

Ответ: $\lambda = 3{,}03 \cdot 10^{-8}$ м.

44. Найти энергию E_i и потенциал U_i ионизации ионов He^+ и Li^{2+}.

Ответ: гелий: $E_i = 54$ эВ, $U_i = 54$ В; литий: $E_i = 122$ эВ, $U_i = 122$ В.

45. Найти радиус r_1 первой боровской электронной орбиты для однократно ионизированного гелия и скорость υ_1 электрона на ней.

Ответ: $r_1 = 26{,}6$ пм, $\upsilon_1 = 4{,}37 \cdot 10^6$ м/с.

46. Найти длину волны фотона, соответствующего переходу электрона со второй боровской орбиты на первую в однократно ионизованном атоме гелия.

Ответ: $\lambda = 30{,}4$ нм.

Занятие № 14

Тема: **Законы радиоактивного распада**

Краткая теория

Радиоактивностью называется превращение неустойчивых изотопов одного химического элемента в изотопы другого элемента, сопровождающееся испусканием некоторых частиц.

Естественной радиоактивностью называется радиоактивность существующих в природе неустойчивых изотопов.

Искусственной радиоактивностью называется радиоактивность изотопов, полученных в результате ядерных реакций.

Самопроизвольный распад атомных ядер подчиняется закону радиоактивного распада.

Число атомов радиоактивного вещества dN, распадающихся за время dt, пропорционально числу имеющихся атомов и определяется соотношением

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

где λ – постоянная радиоактивного распада, интегрируя, получим

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N_0 – число атомов в момент времени t = 0, N – число их по истечении времени t.

Число распадов, происходящих в препарате за единицу времени, называется активностью радиоактивного препарата (1 Бк = 1 расп/с)

$$a\ [\text{Бк}] = \frac{dN}{dt} = -\lambda N.$$

Период полураспада $T_{1/2}$ и постоянная распада λ связаны соотношением

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

Величина $T = \frac{1}{\lambda}$, обратная постоянной распада, называется средним временем жизни радиоактивного атома.

Активность образца в начальный момент (при t = 0)

$$a_0 = \lambda N_0.$$

Если имеется смесь ряда радиоактивных веществ, образующихся одно из другого, то в смеси устанавливается состояние радиоактивного равновесия, при котором активности всех членов ряда равны между собой

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \ldots \lambda_k N_k.$$

Примеры решения задач

Задача 14.1. За год распалось 60 % некоторого исходного радиоактивного элемента. Определить период полураспада этого элемента.

Решение

t = 1 год $\dfrac{N_0 - N}{N_0} = 0{,}6$	По закону радиоактивного распада
$T_{1/2}$ – ?	$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Постоянная радиоактивного распада связана с полупериодом распада соотношением

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

По условию задачи

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - \frac{N}{N_0} = 1 - \frac{N_0 e^{-\lambda t}}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = 0{,}6;$$

$$e^{-\lambda t} = 0{,}4;$$

$$e^{\lambda t} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5;$$

$$\lambda t = \ln 2{,}5, \ \lambda = \frac{\ln 2{,}5}{t}.$$

Тогда

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2 \cdot t}{\ln 2{,}5} = \frac{\ln 2 \cdot 1}{\ln 2{,}5} = 0{,}76 \text{ года}.$$

Ответ: $T_{1/2} = 0{,}76$ года.

Задача 14.2. Определить постоянную распада и число атомов радона, распавшихся в течение суток, если первоначальная масса радона 10 г. Период полураспада $^{222}_{86}\mathrm{Ra}$ равен 3,82 сут.

Решение

t = 1 сут $T_{1/2} = 3{,}82$ сут $m = 10$ г = 10^{-2} кг	Число атомов радона $$N_0 = N_A \frac{m}{M},$$
λ – ? N_1 – ?	

где N_A – число Авогадро, M – молярная масса радона, M = 222 кг/моль, m – масса радона.

Число атомов, распавшихся за t = 1 сут, будет

$$N_1 = N_0 - N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right) = N_A \frac{m}{M}\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot t}\right) =$$

$$= 6{,}02 \cdot 10^{26} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-2}}{222}\left(1 - e^{-\frac{0{,}693}{3{,}82}\cdot 1}\right) = 4{,}3 \cdot 10^{21} \text{ атомов.}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{3{,}82} = 0{,}181 \text{ сут}^{-1}.$$

Ответ: $\lambda = 0{,}181$ сут$^{-1}$, $N = 4{,}3 \cdot 10^{21}$ атомов.

Задача 14.3. Масса препарата радиоактивного магния $^{27}\mathrm{Mg}$ равна 0,2 мкг. Определить начальную активность препарата.

Решение

$m = 0{,}2$ мкг = = $0{,}2 \cdot 10^{-9}$ кг	Начальная активность препарата
$a_0 - ?$	$$a_0 = \lambda N_0.$$

Постоянная радиоактивного распада

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}},$$

где $T_{1/2}$ = 10 мин (табличные данные).

Количество атомов в препарате в начальный момент

$$N_0 = \frac{m_0}{M} N_A,$$

где $M = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Тогда

$$a_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m_0}{M} N_A = \frac{0{,}693 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-9} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{600 \cdot 27 \cdot 10^{-3}} = 5{,}15 \cdot 10^{12} \text{ расп/с.}$$

Ответ: $a_0 = 5{,}15 \cdot 10^{12}$ расп/с.

Задачи для самостоятельного решения

47. Сколько ядер, содержащихся в 1 г трития ${}_{1}^{3}\mathrm{H}$, распадается за среднее время жизни этого изотопа?

Ответ: $N' = 1{,}27 \cdot 10^{23}$.

48. Период полураспада радиоактивного аргона ${}_{18}^{41}\mathrm{Ar}$ равен 110 мин. Определить время, в течение которого распадается 25 % начального количества ядер.

Ответ: t = 46 мин.

49. За восемь суток распалось 75 % начального количества радиоактивного нуклида. Определить период полураспада.

Ответ: $T_{1/2}$ = 4 сут.

50. За один год начальное количество радиоактивного нуклида уменьшилось в 3 раза. Во сколько раз оно уменьшается за 2 года?

Ответ: в 9 раз.

51. За какое время распадается 1/4 начального количества ядер радиоактивного нуклида, если период его полураспада 24 ч?

Ответ: $t = 10{,}5$ ч.

52 Период полураспада ${}_{27}^{60}\mathrm{Co}$ равен 5,3 года. Определить, какая доля первоначального количества ядер этого изотопа распадается через 5 лет.

Ответ: $\dfrac{N_0 - N}{N_0} = 0{,}48$.

53. Найти массу радона, активность которого $a = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк. Ответ: $m = 6{,}5 \cdot 10^{-9}$ кг.

54. Найти активность a радона, образовавшегося из массы m = 1 г радия за время t = 1 ч.

Ответ: $a = 2{,}8 \cdot 10^{8}$ Бк.

55. Вычислить массу радона ${}^{222}\mathrm{Ra}$, находящегося в радиоактивном равновесии с 1 г радия ${}^{222}\mathrm{Ra}$.

Ответ: m = 6,33 мкг.

56. На сколько процентов снизится активность изотопа иридия ${}^{192}\mathrm{Ir}$ через месяц?

Ответ: на 24 %.

Занятие № 15

Тема: **Элементарные частицы**

Краткая теория

Мельчайшие микрочастицы вещества, не являющиеся молекулами, атомами или ядрами называются *элементарными частицами*. Термин *элементарные* является условным, т.е. не означает, что частицы не могут быть структурированы. Характерной особенностью элементарных частиц является их способность к взаимным превращениям.

Элементарные частицы принято делить на три группы:

фотоны; эта группа состоит из одной частицы – фотона – кванта электромагнитного излучения;

лептоны, участвующие только в электромагнитном и слабом взаимодействиях – электронное и мюонное нейтрино, электрон, мюон, π-лептон, таонное нейтрино;

адроны, обладающие сильным взаимодействием наряду с электромагнитным и слабым – протон, нейтрон, ионы и каоны.

Для всех типов взаимодействия элементарных частиц выполняются законы сохранения энергии, импульса, момента импульса и электрического заряда.

Для процессов взаимопревращаемости элементарных частиц, обусловленных сильными взаимодействиями, выполняются все законы сохранения – энергии, рядов (электрического, лептонного и барионного), изоспина, странности и четности. В процессах, обусловленных слабыми взаимодействиями, не сохраняются только изоспин, странность и четность.

Согласно модели Гелл-Манна-Цвейга, все известное адроны можно построить, постулировав существование трех типов кварков (u, d, s), и соответствующих антикварков ($\tilde{u}$, $\tilde{d}$, $\tilde{s}$), имеющих дробные электрические и барионные заряды (табл. 15.1)

Таблица 15.1.

Характеристики кварков (антикварков)

Тип кварка	Электрический заряд, q	Барионное число, B	Спин	Странность, S	Очарование, c	Цвет
u	+2/3	+1/3	1/2	0	0	желтый
d	-1/2	+1/3	1/2	0	0	-“-
s	-1/2	+1/3	1/2	-1	0	-“-
c	+2/3	+1/3	1/2	0	1	-“-
b	-1/3	+1/3	1/2	0	0	-“-
t	+2/3	+1/3	1/2	0	0	-“-
$\tilde{u}$	-2/3	-1/2	1/2	0	0	фиолетовый, оранжевый, зеленый
$\tilde{d}$	+1/3	-1/3	1/2	0	0	-“-
$\tilde{s}$	+1/3	-1/3	1/2	1	0	-“-
$\tilde{c}$	-2/3	-1/3	1/2	0	-1	-“-
$\tilde{b}$	+1/3	-1/3	1/2	0	0	-“-
$\tilde{t}$	-2/3	-1/3	1/2	0	0	-“-

Примеры решения задач

Задача 15.1. Известно, что в углеродно-азотном, или углеродном, цикле число ядер углерода остается неизменным. В результате этого цикла четыре ядра водорода ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$ (протона) превращаются в ядро гелия ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, а также образуются три γ-кванта, два позитрона и два нейтрино. Записав эту реакцию, определите выделяющуюся в этом процессе энергию.

Решение

$m_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_{{}^{4}_{2}\mathrm{He}} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_{e^+} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

$Q - ?$

$$4{}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + 2{}^{\;\;0}_{+1}e + 2{}^{0}_{0}\nu_e + 3\gamma + Q,$$

$$\Delta m = 4m_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}} - \left(m_{{}^{4}_{2}\mathrm{He}} + 2m_{e^+}\right),$$

$$Q = \Delta mc^2 = \left(4m_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}} - m_{{}^{4}_{2}\mathrm{He}} - 2m_{e^+}\right)c^2 =$$

$$=\left(4\cdot 1{,}6736\cdot 10^{-27}-6{,}6467\cdot 10^{-27}-2\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}\right)\cdot 9\cdot 10^{16}=$$

$$=4{,}129\cdot 10^{10}\text{ Дж}=25{,}8\text{ МэВ}.$$

Ответ: Q = 25,8 МэВ.

Задача 15.2. Известно, что продукты распада заряженных пионов испытывают дальнейший распад. Запишите цепочку реакций для π^{+} и π^{-} мезонов.

Решение

$$\pi^{+}\to\mu^{+}+{}_{0}^{0}\nu_{\mu},\ \mu^{+}\to{}_{+1}^{0}e+{}_{0}^{0}\nu_{e}+{}_{0}^{0}\tilde{\nu}_{\mu},$$

$$\pi^{-}\to\mu^{-}+{}_{0}^{0}\tilde{\nu}_{\mu},\ \mu^{-}\to{}_{-1}^{0}e+{}_{0}^{0}\tilde{\nu}_{e}+{}_{0}^{0}\nu_{\mu}.$$

Задача 15.3. Сконструировать из трех кварков протон и нейтрон.

Решение

Согласно модели Гелл-Манна-Цвейга, все известные адроны можно построить из трех типов кварков (u, d, s), и соответствующих антикварков ($\tilde{u}$, $\tilde{d}$, $\tilde{s}$).

Протон имеет кварковую структуру – *uud*, нейтрон – *udd*.

Задачи для самостоятельного решения

57. Запишите схемы распада положительного и отрицательного мюонов.

Ответ: $\mu^{+}\to{}_{+1}^{0}e+{}_{0}^{0}\nu_{e}+{}_{0}^{0}\tilde{\nu}_{\mu}$, $\mu^{-}\to{}_{-1}^{0}e+{}_{0}^{0}\tilde{\nu}_{e}+{}_{0}^{0}\nu_{\mu}$.

58. При захвате протоном отрицательного мюона образуется нейтрон и еще одна частица. Запишите эту реакцию и определите, что это за частица.

Ответ: $\mu^{-}+{}_{1}^{1}p\to{}_{0}^{1}n+{}_{0}^{0}\nu_{\mu}$.

59. π^{0}-мезон распадается в состоянии покоя на два γ-кванта. Принимая массу покоя пиона равной $264{,}1\,m_e$, определите энергию каждого из возникших γ-квантов.

Ответ: $E_{\gamma}=67{,}7$ МэВ.

60. При столкновении нейтрона и антинейтрона происходит их аннигиляция, в результате чего возникают два γ-кванта. Определите энергию каждого из возникших γ-квантов, принимая, что кинетическая энергия нейтрона и позитрона до их столкновения пренебрежимо мала.

Ответ: $E_\gamma = 942$ МэВ.

61. Выбрав из четырех типов нейтрино (ν_e, $\tilde{\nu}_e$, ν_μ , $\tilde{\nu}_\mu$) правильное, напишите недостающие обозначения (x) в каждой из приведенных реакций:

1) $x+{}_0^1n\rightarrow{}_1^1p+{}_{-1}^{0}e$,

2) $x+{}_0^1n\rightarrow{}_1^1p+\mu^-$,

3) $x+{}_1^1p\rightarrow{}_0^1n+{}_{+1}^{0}e$.

Ответ: 1) ${}_0^0\nu_e+{}_0^1n\rightarrow{}_1^1p+{}_{-1}^{0}e$, 2) ${}_0^0\nu_\mu+{}_0^1n\rightarrow{}_1^1p+\mu^-$, 3) ${}_0^0\tilde{\nu}_e+{}_1^1p\rightarrow{}_0^1n+{}_{+1}^{0}e$.

62. Примените операцию зарядового сопряжения к следующим процессам: 1) $\pi^\circ \rightarrow 2\gamma$, 2) $p + k^- \rightarrow \varepsilon^\circ + \pi^+ + \pi^-$.

Ответ: 1) $\pi^\circ \rightarrow 2\gamma$, 2) $\tilde{p} + k^- \rightarrow \tilde{\varepsilon}^\circ + \pi^- + \pi^+$.

63. Запишите, какие комбинации известных в настоящее время кварков воспроизводят свойства: 1) π^+-мезона, 2) π^--мезона, 3) ε°-гиперона.

Ответ: 1) π^+ -мезона ($u\tilde{d}$), 2) π^- -мезона ($\tilde{u}d$), 3) ε°-гиперона (uds).

64. Запишите продукты распада антинейтрино.

Ответ: ${}_0^1\tilde{n}\rightarrow{}_{-1}^{1}\tilde{p}+{}_1^0e+{}_0^0\nu_e$.

65. k^+ -мезон распадается (в состоянии покоя) на два пиона. Принимая массу покоя каона равной 966,2 m_e и пренебрегая разностью масс заряженного и нейтрального пионов, определите энергию каждого из возникших пионов.

Ответ: E = 247,5 МэВ.

66. Известно, что распад нейтрального короткоживущего каона происходит по схеме $k_S^\circ \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Принимая, что до момента распада каон покоился и его масса покоя составляет $974\,m_e$, определите массу покоя образовавшихся заряженных π-мезонов, если известно, что масса каждого образовавшегося пиона в 1,783 раза больше его массы покоя.

Ответ: $m_\pi = 273{,}1 m_e$.

67. Построить из кварка и антикварка мезоны: π^+ , k^- и k°.

Ответ: π^+ $(u\tilde{d})$, k^- $(\tilde{u}d)$, k° $(\tilde{d}s)$.

68. При упругом центральном столкновении нейтрона с неподвижным ядром замедляющего вещества, кинетическая энергия нейтрона уменьшилась в 1,4 раза. Найти массу m ядер замедляющего вещества.

Ответ: m = 12 а.е.м. (графит).

69. Какую часть первоначальной скорости будет составлять скорость нейтрона после упругого центрального столкновения с неподвижным ядром изотопа ${}^{23}_{11}\mathrm{Na}$?

Ответ: 92 %.

70. Для получения медленных нейтронов их пропускают через вещества, содержащие водород (например, парафин). Какую наибольшую часть своей кинетической энергии нейтрон массой m_0 может передать: а) протону (масса m_0), б) ядру атома свинца (масса $207m_0$)? Наибольшая часть передаваемой энергии соответствует упругому центральному столкновению.

Ответ: а) 100 %, б) 1,9 %.

71. Найти в предыдущей задаче распределение энергии между нейтроном и протоном, если столкновение неупругое. Нейтрон при каждом столкновении отклоняется в среднем на угол φ = 45°.

Ответ: энергия распределяется поровну между нейтроном и протоном.

72. Нейтрон, обладающий энергией W_0 = 4,6 МэВ, в результате столкновений с протонами замедляется. Сколько столкновений он должен испытать, чтобы его энергия уменьшилась до W = 0,23 эВ? Нейтрон отклоняется при каждом столкновении в среднем на угол φ = 45°.

Ответ: n = 24.

Занятие № 16

Тема: **Энергия связи ядра. Деление ядер. Цепная ядерная реакция**

Краткая теория

Энергия связи ядра определяется соотношением

$$W = c^2 \Delta m,$$

где Δm – разность между массой частиц, составляющих ядро, и массой самого ядра (дефект массы):

$$\Delta m = zm_p + (A - z)m_n - m_я,$$

где z – порядковый номер изотопа, A – массовое число, m_p – масса протона, m_n – масса нейтрона, $m_я$ – масса ядра изотопа.

Изменение энергии при ядерной реакции

$$Q = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right),$$

где $\sum m_1$ – сумма масс частиц до реакции, $\sum m_2$ – сумма масс частиц после реакции.

Символическая запись ядерной реакции может быть дана в развернутом виде, например,

$$^{9}_{2}\mathrm{Be} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{6}_{3}\mathrm{Li}$$

или сокращенно

$$^{9}\mathrm{Be}(p, \alpha)^{6}\mathrm{Li}.$$

В ядерных реакциях выполняются законы сохранения:

числа нуклонов

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4;$$

заряда

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_4;$$

релятивистской полной энергии

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4;$$

импульса

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}_3 + \bar{p}_4.$$

Цепная реакция деления характеризуется коэффициентом размножения k нейтронов, который равен отношению числа нейтронов в данном поколении к их числу в предыдущем поколении.

Число нейтронов N в момент времени t определяется по формуле

$$N = N_0 e^{\frac{(k-1)t}{T}},$$

где N_0 – число нейтронов в начальный момент времени, T – среднее время жизни одного поколения.

Примеры решения задач

Задача 16.1. Вычислить энергию ядерной реакции ${}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \to p + {}^7_3\mathrm{Li}$. Выделяется или поглощается энергия при этой реакции?

Решение

Энергия ядерной реакции определяется по формуле:

$$Q = c^2\left(m_1 + m_2 - \sum m_i'\right), \tag{1}$$

где m_1 и m_2 – массы частиц, вступающих в реакцию, $\sum m_i'$ – сумма масс частиц, образовавшихся в результате реакции.

Если массу частиц выражать в а.е.м., а энергию реакции в МэВ, то формула (1) примет вид

$$Q = 931(m_1 + m_2 - \sum m_i'). \tag{2}$$

При вычислении энергии ядерной реакции можно использовать массы атомов вместо масс их ядер. Из справочных данных находим

$$m_{{}^4_2\mathrm{He}} = 4{,}00260 \text{ а.е.м.};$$

$$m_{{}^1_1\mathrm{H}} = 1{,}00783 \text{ а.е.м.};$$

$$m_{{}^7_3\mathrm{Li}} = 7{,}01601 \text{ а.е.м.}$$

Дефект массы реакции равен

$$2m_{{}^4_2\mathrm{He}} - m_{{}^1_1\mathrm{H}} - m_{{}^7_3\mathrm{Li}} = -0{,}01864 \text{ а.е.м.}$$

Подставляя значения дефекта массы реакции в (2), получим

$$Q = 931(-0{,}01864) = -17{,}4 \text{ МэВ}.$$

Поскольку $Q < 0$, то энергия в результате реакции поглощается.

Ответ: $Q = -17{,}4$ МэВ. Энергия поглощается.

Задача 16.2. Найти энергию реакции ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{6}_{3}\mathrm{Li}$, если известно, что кинетические энергии протона $T_{\mathrm{H}} = 5{,}45$ МэВ, ядра гелия $T_{\mathrm{He}} = 4$ МэВ и что ядро гелия вылетело под углом 90° к направлению движения протона. Ядро мишень ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}$ неподвижно.

Решение

$T_{\mathrm{H}} = 5{,}45$ МэВ $T_{\mathrm{He}} = 4$ МэВ	Энергия реакции Q есть разность между суммой кинетических энергий ядер продуктов в реакции и кинетической энергией налетающего ядра:
$Q - ?$	

$$Q = T_{\mathrm{Li}} + T_{\mathrm{He}} - T_{\mathrm{H}}.$$

Для определения T_{Li} лития воспользуемся законом сохранения импульса

$$\overline{P}_{\mathrm{H}} = \overline{P}_{\mathrm{He}} + \overline{P}_{\mathrm{Li}}.$$

Векторы $\overline{P}_{\mathrm{H}}$ и $\overline{P}_{\mathrm{He}}$ по условию задачи взаимно перпендикулярны, поэтому

$$P_{\mathrm{Li}}^2 = P_{\mathrm{He}}^2 + P_{\mathrm{H}}^2.$$

Выразим импульсы ядер через их кинетические энергии. Можно воспользоваться классической формулой

$$p^2 = 2mT.$$

Тогда

$$m_{\mathrm{Li}} T_{\mathrm{Li}} = m_{\mathrm{He}} T_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{H}} T_{\mathrm{H}}.$$

Откуда

$$T_{Li} = \frac{m_{\mathrm{He}} T_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{H}} T_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{Li}}} = \frac{4 \cdot 4 + 1 \cdot 5{,}45}{6} = 3{,}58 \text{ МэВ}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$Q = T_{\mathrm{He}} + T_{\mathrm{Li}} - T_{\mathrm{H}} = (3{,}58 + 4 - 5{,}45) = 2{,}13 \text{ МэВ}.$$

Ответ: $Q = 2{,}13$ МэВ.

Задача 16.3. Какую энергию W (в киловатт-часах) можно получить от деления массы $m = 1$ г урана $^{235}_{92}\text{U}$, если при каждом акте распада выделяется энергия $Q = 200$ МэВ?

Решение

$m = 1$ г урана $^{235}_{92}\text{U}$	
$Q = 200$ МэВ	
$W - ?$	

Полученная энергия W может быть представлена как

$$W = QN,$$

где N – число атомов, содержащихся в 1 г урана.

$$N = \frac{m}{M} N_A,$$

где M – молярная масса урана, N_A – число Авогадро.

Тогда

$$W = Q\frac{m}{M} N_A = 200 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \frac{1 \cdot 10^{-3}}{235 \cdot 10^{-3}} 6{,}02 \cdot 10^{23} = 8{,}2 \cdot 10^{12} \text{ Дж.}$$

Учитывая, что 1 кВт · ч = 3,6 · 10^6 Дж, получим

$$W = \frac{8{,}2 \cdot 10^{12}}{3{,}6 \cdot 10^6} = 2{,}3 \cdot 10^4 \text{ кВт · ч.}$$

Ответ: $W = 2{,}3 \cdot 10^4$ кВт · ч.

Задача 16.4. Определите, во сколько раз увеличится число нейтронов в цепной ядерной реакции за время t = 10 с, если среднее время жизни T одного поколения составляет 80 мс, а коэффициент размножения нейтронов k = 1,002.

Решение

T = 10 с	
T = 80 мс = 8 · 10^{-2} с	
k = 1,002	
$N / N_0 - ?$	

Из формулы для числа нейтронов в момент времени t получим отношение N / N_0:

$$N = N_0 e^{\frac{(k-1)t}{T}},$$

$$\frac{N}{N_0}=e^{\frac{(k-1)t}{T}}=e^{\frac{(1{,}002-1)\cdot 10}{8\cdot 10^{-2}}}=1{,}284.$$

Ответ: $\dfrac{N}{N_0}=1{,}284$.

Задачи для самостоятельного решения

73. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра элемента ${}^{24}_{12}\mathrm{Mg}$.

Ответ: $\Delta m = 3{,}5\cdot 10^{-28}$ кг, $E_{\text{св}}=3{,}2\cdot 10^{-11}$ Дж.

74. Найти энергию Q, выделяющуюся при реакции ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}+{}^{1}_{1}\mathrm{H}\rightarrow{}^{4}_{2}\mathrm{He}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

Ответ: $Q=17{,}3$ МэВ.

75. Найти энергию Q, поглощенную при реакции ${}^{14}_{7}\mathrm{N}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow{}^{1}_{1}\mathrm{H}+{}^{17}_{8}\mathrm{O}$.

Ответ: $Q=1{,}18$ МэВ.

76. Вычислить энергию термоядерной реакции ${}^{2}_{1}\mathrm{H}+{}^{3}_{1}\mathrm{H}\rightarrow{}^{4}_{2}\mathrm{He}+{}^{1}_{0}n$.

Ответ: E = 17,6 МэВ.

77. Какое количество энергии освобождается при соединении одного протона и двух нейтронов в одно ядро?

Ответ: E = 8 МэВ.

78. При делении одного ядра урана-235 выделяется энергия 200 МэВ. Каждую долю энергии покоя ядра урана-235 составляет выделившаяся энергия?

Ответ: 0,00091.

79. Какая масса m урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$. расходуется за время t = 1 сут на атомной электростанции мощностью P = 5000 кВт? КПД принять равным 17 %. Считать, что в каждом акте распада выделяется энергия Q = 200 МэВ.

Ответ: m = 31 г.

80. Найти электрическую мощность атомной электростанции, расходующей 0,1 кг урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ в сутки, если КПД станции 16 %.

Ответ: N = 15 МВт.

81. Сколько ядер урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$. должно делится в 1 с, чтобы тепловая мощность ядерного реактора была равна 1 Вт?

Ответ: $3{,}1 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$.

82. Определить суточный расход ядерного горючего $^{235}_{92}\mathrm{U}$ в ядерном реакторе атомной электростанции. Тепловая мощность электростанции 10000 кВт. Принять энергию, выделяющуюся при одном акте деления, равной 200 МэВ и КПД электростанции 20 %.

Ответ: m = 53 г.

83. В ядерном реакторе на тепловых нейтронах среднее время жизни одного поколения нейтронов составляет T = 90 мс. Принимая коэффициент размножения нейтронов k = 1,003, определить период τ реактора, т.е. время, в течение которого поток тепловых нейтронов увеличится в e раз.

Ответ: τ = 30 с.