Лекция 2.

1. Гидродинамические модели потоков неравновесной плазмы в каналах с электрическим током

Полная система гидродинамических уравнений для потоков термически неравновесной плазмы в каналах с электрическим током представляет собой математическую запись законов сохранения заряда, числа частиц, массы, количества движения и энергии для каждой компоненты и плазмы в целом. К ним добавляется еще система уравнений электродинамики Максвелла. Систему гидродинамических уравнений можно достаточно строго получить, исходя из кинетических представлений. Однако из-за сложностей в аналитическом представлении интеграла столкновений вывод их на основании кинетических представлений довольно трудоемкий и громоздкий. Мы не ставим перед собой задачу теоретически строгого изложения перехода из кинетических уравнений типа (4.12) и (4.13) к уравнениям гидродинамических моделей. В известных учебниках по физической кинетике и теории плазмы вывод этих уравнений изложен достаточно подробно [2, 14, 21, 27 и др.].

Рассмотрим основные методические приемы, используемые при получении гидродинамических уравнений для двухтемпературной модели плазмы, содержащей свободные электроны, положительно заряженные ионы одного сорта и нейтральные атомы и молекулы. Вначале определим связь между кинетической функцией распределения и макроскопическими параметрами.

Используя выражение (5.2), путем перехода из пространства импульсов dP в пространство скоростей dv, запишем выражения для средней концентрации частиц данного сорта j , их массовой плотности и массовой (гидродинамической) скорости

$$n_j\,(r,t) = \int f_1\,\{r,v,t)dv, \qquad \rho_j = m_j\, n_j\,,$$

$$u_j = [v\, f_1\,\{r,v,t)dv]/[\, f_1\,\{r,v,t)dv]. \qquad (5.6)$$

Поток частиц данного сорта j определится выражением $(n_j\ u_j)$, а поток массы —$(m_j n_j u_j) = (\rho_j u_j)$.

Как известно, **термодинамическая температура** есть величина, определяемая средней кинетической энергией поступательного движения частиц,

$$w_j =(m_j v_j)/2 = 3/2\, kT_j, \qquad (5.7)$$

где выражение для средней квадратичной скорости имеет вид

$$v^2_j = (1/n_j) \int v^2 f_1 \{r,v,t)dv . \qquad (5.8)$$

Теперь температура определится формулой

$$T_j = (1/3k)\ v^2_j = (1/3k)\, m_j \int v^2 f_1 \{r,v,t)dv \qquad (5.9)$$

Согласно определению гидродинамическое давление частиц данного сорта определяется известной формулой

$$P_j = n_j kT_j = (1/3)\, m_j n_j v^2_j . \qquad (5.10)$$

Приведенные формулы (5.6)—(5.10) мы используем в процессе перехода от кинетических уравнений к уравнениям гидродинамических моделей плазмы.

2. Уравнения неразрывности для электронного и ионного газов

Запишем кинетическое уравнение типа (4.13) для совокупности свободных электронов

$$\partial f_1/\partial t + v\partial f_1/\partial r - eE/m_i\,(\partial f_1/\partial v) = St(f_1) \qquad (5.11)$$

где f_1 — функция распределения по скоростям для электронного газа, E — напряженность электрического поля, усредненная в единице объема, содержащего много частиц.

Проинтегрируем это уравнение по всему пространству скоростей теплового движения с учетом независимости переменных x, y, z, t, v_x, v_y, v_z, в кинетической теории.

В соответствии с формулами (5.6) первое и второе слагаемые в левой части уравнения (5.11) преобразуются к виду

$$\int(\partial f_1/\partial t)\,dv = \partial/\partial t \int f_1 dv = \partial n_e/\partial t\,,$$

$$\int(v\partial f_1/\partial r)\,dv = \ldots\ldots\ = div(n_e\, u_{e.}). \qquad (5.12)$$

Здесь u_e имеет смысл гидродинамической скорости.

Преобразуем третий член в уравнении (5.11), который учитывает ускорение из-за действия электромагнитных сил. Имея в виду, что электрон ускоряется в течение времени свободного пробега, приобретая при этом скорость направленного движения (дрейфа), умножим и поделим это слагаемое на τ_e (время свободного пробега) . Тогда, с учетом формулы скорости дрейфа (3.14), получим

$$(eE/m_e)(\tau_e/\tau_e)(\partial f_1/\partial v) = u_{др.}\,\partial f_1/\partial r\ . \qquad (5.13)$$

Интегрируя (5.13) по пространству скоростей теплового движения, находим

$$\int u_{др.}\,(\partial f_1/\partial r)\,dv = div(n_e\,u_{др.}). \qquad (5.14)$$

Математические трудности интегрирования правой части уравнения (5.11) обусловлены сложностью представления в явном виде интеграла столкновений. В общем случае столкновительный член уравнения представляют как сумму упругой и неупругой составляющих. В нашем случае можно записать

$$St(f_1) = St(f_{неупр.}) + St(f_{упр.}).$$

Неупругая составляющая учитывает процессы возбуждения, диссоциации и ионизации, а также процессы гибели свободных зарядов — рекомбинации. Второе слагаемое здесь учитывает упругие столкновения, протекающие с обменом количества движения и энергией поступательного движения частиц. В настоящее время нет всеобщей теории, учитывающей все возможные взаимодействия частиц в плазме. С методикой вычислений интеграла столкновений для различных частных случаев плазменного состояния вещества можно познакомиться в известных трудах по кинетической теории плазмы. Здесь мы воспользуемся конечными результатами, приведенными в [2, 10, 21 и др.].

$$\int St(f_1)dv = div(D_e\ grad\ n_e) + \nu_i\,n_e - \beta\,n_e\,n_i \qquad (5.15)$$

Таким образом, результатом интегрирования уравнения (5.11) по скоростям теплового движения будет уравнение, которое в векторной форме, с применением векторных операторов div и grad, запишется в виде

$$dn_e / dt + \mathrm{div}(n_e u_e - n_e u_{\text{др.}}) = \mathrm{div}(D_e \,\mathrm{grad}\, \text{п}_e) + \nu_i n_e - \beta n_e n_i \qquad (5.16)$$

Уравнение (5.16) представляет собой уравнение неразрывности для электронного газа, где n_e имеет смысл статистически средней концентрации электронов. Определим физический смысл членов этого уравнения. Первый член в левой части определяет изменение пе со временем. Второе слагаемое учитывает конвективный перенос электронов и поток (дрейф) за счет действия сил поля Е. Первое слагаемое в правой части уравнения учитывает диффузионный перенос заряда, а второй и третий слагаемые — рождение электронов в объеме за счет ионизации и гибель их в процессах объемной рекомбинации, ν_i — частота ионизации электронным ударом, β — коэффициент объемной рекомбинации.

Проделав аналогичные математические преобразования с кинетическим уравнением для ионного газа, получим уравнение неразрывности для положительно заряженных ионов одного сорта

$$dn_i / dt + \mathrm{div}(n_i u_i - n_i u_{\text{др.}}) = \mathrm{div}(D_i \,\mathrm{grad}\, n_i) + \nu_i n_e - \beta n_e n_i \qquad (5.17)$$

В уравнениях неразрывности для свободных носителей заряда мы учли только те процессы, которые вносят наибольший вклад в баланс носителей заряда в условиях существования плазмы в технологических плазмотронах.