Лекция 2. Элементы теории многочленов.

Многочлен (некоторые сведения справочного характера)

Функция вида:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n , \qquad (1)$$

где n – натуральное число, a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ – постоянные коэффициенты, называется *многочленом* (или *целой рациональной функцией*). Число n называется степенью многочлена.

Корнем многочлена (1) называется такое значение x_0 (вообще говоря, комплексное) переменной x, при котором многочлен обращается в нуль, т.е. $P_n(x_0) = 0$.

Теорема 1. Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делиться без остатка на $x - x_1$, т.е.

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x) ,$$

где $P_{n-1}(x)$ – многочлен степени $(n-1)$.

Возникает вопрос: всякий ли многочлен имеет корень? Положительный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 2 *(основная теорема алгебры).* Всякий многочлен n-й степени $(n > 0)$ имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

Следствие. Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) , \qquad (2)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корни многочлена, a_0 – коэффициент многочлена при x^n.

Например, легко проверить, что выражение $x^3 - x^2 + 9x - 9$ представляется в виде произведения линейных множителей следующим образом: $x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x-1)(x-3i)(x+3i)$.

Если в разложении многочлена (2) какой-либо корень встретился k раз, то он называется *корнем кратности* k. В случае $k=1$ (т.е. корень встретился один раз) корень называется *простым*.

С учетом повторяющихся корней разложение многочлена (2) можно записать в виде

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} ... (x-x_r)^{k_r},$$

если корень x_1 имеет кратность k_1, корень x_2 – кратность k_2 и так далее. При этом $k_1+k_2+...+k_r=n$, а r – число различных корней.

Для многочленов с действительными коэффициентами справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a+ib$, то он имеет и сопряженный корень $a-ib$.

В разложении многочлена (2) комплексные корни входят сопряженными парами. Перемножив линейные множители $(x-(a+ib))\cdot(x-(a-ib))$, получим трехчлен второй степени с действительными коэффициентами x^2+px+q. В самом деле,

$$(x-(a+ib))\cdot(x-(a-ib)) = ((x-a)-ib)((x-a)+ib) = (x-a)^2+b^2$$

$$= x^2-2ax+a^2+b^2 = x^2+px+q,$$

где $p=-2a$, $q=a^2+b^2$.

Таким образом, произведение линейных множителей, соответствующих комплексно-сопряженным корням, можно заменить квадратным трехчленом с действительными коэффициентами.

Теорема 4. Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т.е. многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} ... (x-x_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} ... (x^2+p_mx+q_m)^{s_m},$$

при этом $k_1+k_2+...+k_r+2(s_1+s_2+...+s_m)=n$ и все квадратные трехчлены не имеют вещественных корней.

Примеры разложений:

1) $x^4-16=(x-2)(x+2)(x^2+4)$;

2) $x^3-9x=x(x^2-9)=x(x-3)(x+3)$;

3) $x^5-6x^4+9x^3-x^2+6x-9=x^3(x^2-6x+9)-(x^2-6x+9)=$

$$=(x^2-6x+9)(x^3-1)=(x-3)^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Дробно-рациональная функция

Дробно-рациональной функцией (или *рациональной дробью*) называется функция, равная отношению двух многочленов, т.е. $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m, а $Q_n(x)$ – многочлен степени n.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m<n$; в противном случае (если $m\geq n$) рациональная дробь называется *неправильной*.

Всякую неправильную рациональную дробь $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ *можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена* $L(x)$ *и правильной рациональной дроби* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, т.е $\dfrac{R(x)}{Q(x)}=L(x)+\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Пример. Представить неправильную рациональную дробь $\dfrac{2x^4-4x+7}{x-3}$ в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Разделим числитель на знаменатель уголком:

$$\begin{array}{l|l}
-\,2x^4+0x^3+0x^2-4x+7 & x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4-6x^3} & 2x^3+6x^2+18x+50 \\
\quad -\,6x^3+0x^2-4x+7 & \\
\quad \underline{6x^3-18x^2} & \\
\qquad -\,18x^2-4x+7 & \\
\qquad \underline{18x^2-54x} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r} \_50x+7 \\ \underline{50x-150} \\ 157 \end{array}$$

Получим частное $L(x)=2x^3+6x^2+18x+50$ и остаток $R(x)=157$. Следовательно, $\dfrac{2x^4-4x+7}{x-3}=2x^3+6x^2+18x+50+\dfrac{157}{x-3}$.

Правильные рациональные дроби вида

(I). $\dfrac{A}{x-a}$,

(II). $\dfrac{A}{(x-a)^k}\,(k\geq 2, k\in N)$,

(III). $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т.е. $p^2-4q<0$),

(IV). $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,(k\geq 2,$ корни знаменателя комплексные),

где A, a, M, N, p, q – действительные числа, называются *простейшими рациональными дробями I, II, III и IV типов.*

Теорема 1. Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}...(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}...(x^2+p_mx+q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+$$

$$+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+...+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+...$$

$$\ldots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{M_{1x}+N_1}{x^2+p_mx+q_m}+\frac{M_{2x}+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2}+\ldots+\frac{M_{s_m x}+N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}, \qquad (3)$$

где $A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ..., C_1, D_1, ..., M_1, N_1, ...$ – некоторые действительные коэффициенты.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

1) $\frac{x^2+3}{(x-3)(x-5)^3}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-5}+\frac{C}{(x-5)^2}+\frac{D}{(x-5)^3}$;

2) $\frac{2x^2+5x-1}{x^2(x^2+2)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}+\frac{Fx+P}{(x^2+x+1)^2}$

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ...$ в равенстве (3) можно применить *метод неопределенных коэффициентов*. Суть метода такова:

1. В правой части равенства (1) приведем простейшие дроби к общему знаменателю $Q(x)$; в результате получим тождество $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{S(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители, т.е.

$$P(x)=S(x). \qquad (4)$$

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества (4) получим систему линейных уравнений, из которой и определим искомые коэффициенты $A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ...$