Лекция 1. Числовые ряды.

Сходимость числовых рядов. Необходимый признак сходимости

Бесконечные ряды широко используются в теоретических исследованиях математического анализа, имеют разнообразные практические применения.

Числовым рядом (или просто рядом) называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (1)$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ - действительные или комплексные числа, называемые членами ряда, u_n - общим членом ряда.

Ряд считается заданным, если известен общий член ряда u_n, выраженный как функция его номера n: $u_n = f(n)$.

Сумма первых n членов ряда называется n-й *частичной суммой* ряда и обозначается через S_n, т.е. $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Рассмотрим частичные суммы: $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots$.

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда, то этот предел называют *суммой ряда* и говорят, что ряд *сходится*. Записывают: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называют *расходящимся*. Такой ряд суммы не имеет.

Исследуем сходимость ряда

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \ (a \neq 0),$$

который называется *рядом геометрической прогрессии.*

Как известно, сумма первых n членов прогрессии находится по формуле $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} aq^k = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$, $(q \neq 1)$. Найдем предел этой суммы:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}.$$

Рассмотрим следующие случаи в зависимости от величины q:

1. Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, ряд сходится, его сумма $S = \dfrac{a}{1-q}$;
2. Если $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд расходится;
3. Если $|q| = 1$, то при $q = 1$ ряд принимает вид $a + a + a + \ldots$, для него $S_n = a \cdot n$ и $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится; при $q = -1$ ряд принимает вид $a - a + a - a + \ldots$ - в этом случае $S_n = 0$ при четном n и $S_n = a$ при нечетном n. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует и ряд расходится.

Таким образом, ряд геометрической прогрессии сходится при $|q|<1$ и его сумма равна $S=\dfrac{a}{1-q}$, а расходится при $|q|\ge 1$.

Нахождение n – й частичной суммы S_n и ее предела для произвольного ряда во многих случаях является непростой задачей. Поэтому для выяснения сходимости ряда устанавливают специальные признаки сходимости. Первым из них, как правило, является необходимый признак сходимости.

Теорема 1. (*Необходимый признак сходимости ряда*). Если числовой ряд (1) сходится, то его общий член u_n стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ (при $n\to\infty$ и $(n-1)\to\infty$). Учитывая, что $u_n = S_n - S_{n-1}$ при $n>1$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Следствие (достаточное условие расходимости ряда). Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \ne 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

Теорема 1 дает необходимое условие сходимости ряда, но не достаточное: из условия $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ не следует, что ряд сходится. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

В качестве примера рассмотрим так называемый *гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Необходимый признак сходимости выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$. Однако гармонический ряд расходится. Покажем это.

Как известно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$. Отсюда следует, что при любом $n\in N$ имеет место неравенство $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$. Логарифмируя это неравенство, получим:

$$n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1,$$

т.е.

$$\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n},\quad \frac{1}{n} > \ln(n+1)-\ln n.$$

Подставляя в полученное неравенство поочередно $n = 1, 2, ..., n-1, n$, получим:

$$1>\ln 2,\ \frac{1}{2}>\ln 3-\ln 2,\ \frac{1}{3}>\ln 4-\ln 3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ \frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln n.$$

Сложив почленно эти неравенства, получим

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=S_n>\ln(n+1).$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, т.е. гармонический ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов

Необходимый признак сходимости не дает, вообще говоря, возможности судить о том, сходится ли данный ряд или нет. Сходимость и расходимость ряда во многих случаях можно установить с помощью так называемых *достаточных признаков.*

Рассмотрим некоторые из них для *знакоположительных* рядов, т.е. рядов с неотрицательными членами (знакоотрицательный ряд переходит в знакоположительный путем умножения его на (-1), что, как известно, не влияет на сходимость ряда).

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда часто устанавливается путем сравнения его с другим («эталонным») рядом, о котором известно, сходится он или нет. В основе такого сравнения лежат следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n.$$

Если для всех n выполняется неравенство $u_n\le\upsilon_n$, то из сходимости второго ряда следует сходимость первого ряда, а из расходимости первого ряда следует расходимость второго ряда.

Теорема 3. (**Предельный признак сравнения).** Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n.$$

Если существует конечный, отличный от нуля, предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\upsilon_n}=A \quad (0<A<\infty)$, то эти ряды сходятся или расходятся одновременно.

В качестве “эталонных” рядов при использовании признаков сравнения, как правило, используются ряд геометрической прогрессии и так называемый *обобщенный гармонический ряд (или ряд Дирихле)*:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\frac{1}{4^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots,$$

где $\alpha>0$ - действительное число, который при $\alpha=1$ переходит в гармонический ряд. При изложении интегрального признака Коши мы покажем, что ряд Дирихле сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha\le1$.

Теорема 4. (Признак Даламбера). Пусть дан числовой ряд с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$ Тогда ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$.

Замечания.

1. Если $l = 1$, то числовой ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

2. Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида $n\,!$ или a^n.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$.

Решение. Находим

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+2)!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0.$$

Так как $l = 0 < 1$, то данный ряд по признаку Даламбера сходится.

Иногда удобно пользоваться радикальным признаком Коши для исследования сходимости знакоположительного ряда. Этот признак во многом схож с признаком Даламбера, о чем говорят его формулировка и доказательство.

Теорема 5. (*Радикальный признак Коши*)**.** Пусть дан ряд с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$ Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Как и для признака Даламбера, в случае, когда $l = 1,$ вопрос о сходимости ряда остается открытым. Доказательство теоремы полностью аналогично доказательству признака Даламбера. Поэтому позволим себе опустить его.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2},$$

то применим радикальный признак Коши к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Вычисляем

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ сходится, а значит, сходится и исходный ряд, согласно свойству рядов.

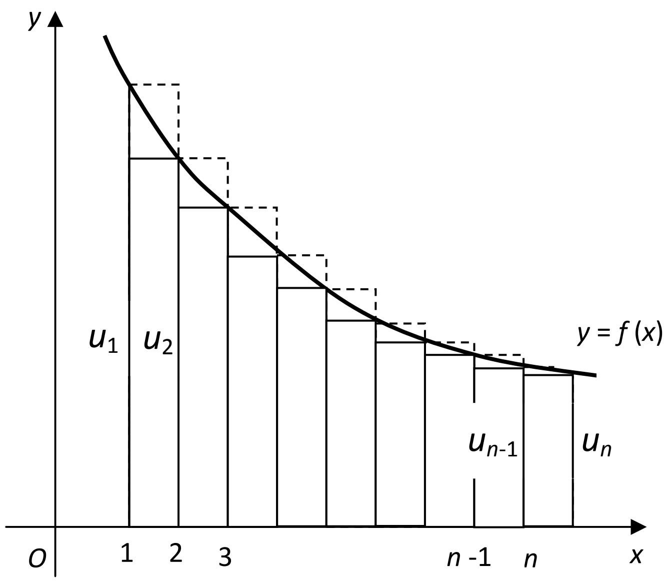
Теорема 6. (*Интегральный признак Коши*)**.** Если члены знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1;+\infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1 = f(1), u_2 = f(2), \dots, u_n = f(n), \dots$, то:

1) если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд;

2) если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится также и ряд.

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, основанием которой служит отрезок оси Ox от $x=1$ до $x=n$ (см. рис. 1). Строим входящие и выходящие прямоугольники, основаниями которых служат отрезки $[1;2], [2;3], \dots$. Учитывая геометрический смысл определенного интеграла, запишем:

Рис. 1



$$f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \dots + f(n)\cdot 1 < \int\limits_1^n f(x)dx < f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \dots + f(n-1)\cdot 1,$$

или

$$u_2 + u_3 + \dots + u_n < \int\limits_1^n f(x)dx < u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1},$$

или

$$S_n - u_1 < \int\limits_1^n f(x)dx < S_n - u_n. \qquad (2)$$

Случай 1. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, т.е. $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = A$. Поскольку $\int\limits_1^n f(x)dx < \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = A$, то с учетом неравенства (2) имеем: $S_n - u_1 < A$, т.е. $S_n < u_1 + A$. Так как последовательность частичных сумм монотонно возрастает и ограничена сверху (числом

$u_1 + A$), то, по признаку существования предела, имеет предел ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$). Следовательно, ряд сходится.

Случай 2. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Тогда $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ и интегралы $\int\limits_1^{n} f(x)dx$ неограниченно возрастают при $n \to \infty$. Учитывая, что $S_n > \int\limits_1^{n} f(x)dx + u_n$ (см. 2), получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Следовательно, данный ряд расходится.

Теперь рассмотрим вопрос о сходимости ряда Дирихле, который был упомянут выше. Для исследования ряда на сходимость применим интегральный признак Коши.

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает на промежутке $[1;+\infty)$ и $f(n) = \dfrac{1}{n^{\alpha}} = u_n$. При $\alpha \neq 1$ имеем:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{если } \alpha < 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ имеем гармонический ряд $u_n = \dfrac{1}{n}$, который расходится. Итак, ряд Дирихле сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$.

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Рассмотрим важный класс рядов, называемых знакочередующимися.
Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \qquad (3)$$

где $u_n > 0$ для всех $n \in \mathrm{N}$ (т.е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следует друг за другом поочередно).

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости (установленный в 1714 г. Лейбницем).

Теорема 7 (*Признак Лейбница***)**. Знакочередующийся ряд (3) сходится, если:

1. Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т.е. $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$;

2. Общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

При этом сумма S ряда удовлетворяет неравенствам $0 < S < u_1$.

Доказательство. Рассмотрим сначала частичную сумму четного числа ($2m$) членов ряда (3). Имеем

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + u_{2m-1} - u_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + ... + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Выражение в каждой скобке, согласно первому условию теоремы, положительно. Следовательно, сумма $S_{2m} > 0$ и возрастает с возрастанием номера $2m$.

С другой стороны, S_{2m} можно переписать так:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Легко видеть, что $S_{2m} < u_1$. Таким образом, последовательность $S_2, S_4, S_6, \ldots, S_{2m}, \ldots$ возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, причем $0 < S < u_1$.

Рассмотрим теперь частичные суммы нечетного числа ($2m+1$) членов ряда (3). Очевидно, что $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. Отсюда следует, что

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} \left(S_{2m} + u_{2m+1}\right) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + 0 = S,$$

т.к. $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$ в силу второго условия теоремы. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ как при четном n, так и при нечетном n. Следовательно, ряд (3) сходится, причем $0 < S < u_1$.

Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется *знакопеременным*.

Для знакопеременных рядов имеет место следующий общий достаточный признак сходимости.

Теорема 8. (*Признак абсолютной сходимости ряда*)**.** Пусть дан знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{4}$$

Если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \tag{5}$$

составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов рядов (4) и (5):

$$(u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \ldots + (u_n + |u_n|) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|).$$

Очевидно, что $0 \le u_n + |u_n| \le 2|u_n|$ для всех $n \in N$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2|u_n|$ сходится в силу условия теоремы и свойства 1 числовых рядов. Следовательно, на основании признака сравнения (см. теорема 2) сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$. Поскольку данный знакопеременный ряд представляет собой разность двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

то, на основании свойства 2 числовых рядов, ряд сходится.

Отметим, что обратное утверждение несправедливо: если сходится ряд (4), то это не означает, что будет сходиться ряд (5).

Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+1}$

Решение. Ряд, составленный из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2+n+1}$ можно сравнить с (расходящимся) гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. В самом деле, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n^2+n+1} : \dfrac{1}{n} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n}{n^2+n+1} = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2+n+1}$ расходится, а исходный ряд абсолютно не сходится. Исследуем его на условную сходимость. Это можно сделать с помощью признака Лейбница:

1) ряд знакочередующийся;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2+n+1} = 0$;

3) $\dfrac{n+1}{n^2+n+1} > \dfrac{n+2}{(n+1)^2+(n+1)+1}$ для любого n, так как

$$\frac{n+1}{n^2+n+1} - \frac{n+2}{(n+1)^2+(n+1)+1} = \frac{n+1}{n^2+n+1} - \frac{n+2}{n^2+3n+3} = \frac{n^2+3n+1}{\left(n^2+n+1\right)\left(n^2+3n+3\right)} > 0.$$

Таким образом, ряд сходится условно.

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место: на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм (переместительность, сочетательность, распределительность).

Основные свойства абсолютно сходящихся рядов:

1. Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд (теорема Дирихле).

2. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 + S_2$ (или соответственно $S_1 - S_2$)

3. Под произведением двух рядов $u_1 + u_2 + \ldots$ и $\upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots$ понимают ряд вида

$$(u_1\upsilon_1) + (\upsilon_1\upsilon_2 + u_2\upsilon_1) + (u_1\upsilon_3 + u_2\upsilon_2 + u_3\upsilon_1) + \ldots + (u_1\upsilon_n + u_2\upsilon_{n-1} + \ldots + u_n\upsilon_1) + \ldots$$

Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 \cdot S_2$.

Таким образом, абсолютно сходящиеся ряды суммируются, вычитаются, перемножаются как обычные суммы. Суммы таких рядов не зависят от порядка записи членов.

В случае условно сходящихся рядов соответствующие утверждения (свойства), вообще говоря, не имеют места.

Так, переставляя члены условно сходящегося ряда, можно добиться того, что сумма ряда изменится. Например, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ условно сходится по признаку Лейбница. Пусть его сумма равна S. Перепишем его члены так, что после одного положительного члена будут идти два отрицательных. Получим ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right)=\frac{1}{2}S.$$

Сумма уменьшилась вдвое!

Более того, путем перестановки членов условно сходящегося ряда можно получить сходящийся ряд с заранее заданной суммой или расходящийся ряд (теорема Римана).

Поэтому действия над рядами нельзя производить, не убедившись в их абсолютной сходимости. Для установления абсолютной сходимости используют все признаки сходимости знакоположительных рядов, заменяя всюду общий член ряда его модулем.