Лекция 8. Приложения двойного и тройного интегралов

Применения двойного интеграла

Приведем некоторые примеры применения двойного интеграла.

1. Если D – ограниченная область плоскости Oxy, то ее площадь S вычисляется по формуле:

$$S = S(D) = \iint\limits_D dxdy,$$

или, в полярных координатах,

$$S = S(D) = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi.$$

2. Пусть $z = f(x, y)$ – неотрицательная, непрерывная функция в замкнутой области D. Если V – тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу – областью D, а сбоку – соответствующей цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси Oz и направляющей, совпадающей с границей области D, то объем этого тела равен

$$V = \iint\limits_D f(x, y) dxdy.$$

3. Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, где функция $f(x, y)$, а также ее частные производные первого порядка, непрерывны в области D. Тогда ее площадь S вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}\, dxdy.$$

4. Предположим, что плоская пластина D имеет поверхностную плотность распределения масс $\gamma(x, y)$ непрерывную в D. Тогда масса m этой пластины вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y) dxdy.$$

5. Статические моменты материальной пластины D с поверхностной плотностью $\gamma(x, y)$ относительно координатных осей Ox, Oy и координаты ее центра тяжести соответственно вычисляются по формулам:

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot \gamma(x, y) dxdy, \; M_y = \iint\limits_D x \cdot \gamma(x, y) dxdy,$$

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

6. Моменты инерции плоской материальной пластины D с поверхностной плотностью $\gamma(x, y)$ относительно координатных осей Ox, Oy и начала координат $O(0,0)$ соответственно вычисляются по формулам:

$$J_x = \iint\limits_D y^2 \cdot \gamma(x,y)dxdy, \ J_y = \iint\limits_D x^2 \cdot \gamma(x,y)dxdy, \ J_0 = \iint\limits_D (x^2+y^2) \cdot \gamma(x,y)dxdy.$$

Пример. Найти координаты центра тяжести пластины, ограниченной параболой $ay = x^2$ и прямой $x + y = 2a$, если плотность пластины постоянная и равна γ_0.

Решение. Изобразим пластину (рис. 1). Находим абсциссы точек пересечения прямой $x + y = 2a$ и параболы $ay = x^2$. Из системы уравнений $\begin{cases} x+y=2a, \\ y = \dfrac{x^2}{a} \end{cases}$ находим $x_1 = -2a, x_2 = a.$

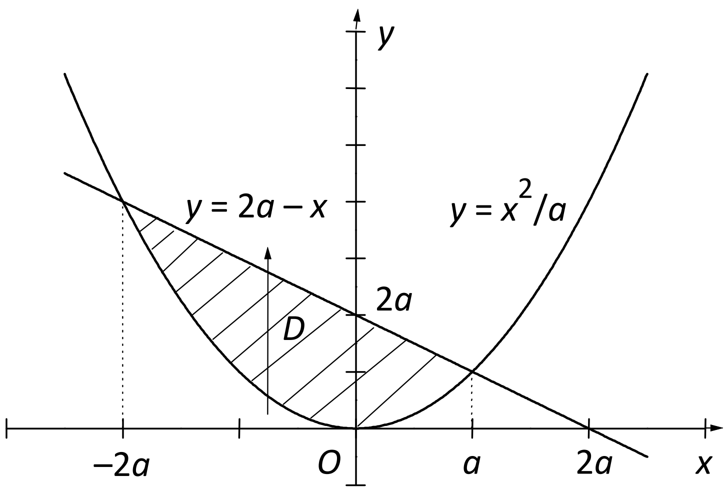

Рис. 1.

Находим массу пластины:

$$m = \iint\limits_D \gamma_0 dxdy = \gamma_0 \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \gamma_0 \int\limits_{-2a}^{a} y\Big|_{x^2/a}^{2a-x} dx = \gamma_0 \int\limits_{-2a}^{a} (2a - x - \frac{x^2}{a})dx =$$

$$= \gamma_0 \left(2ax - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a} \right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \gamma_0 \left(2a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} + 4a^2 + 2a^2 - \frac{8}{3}a^2 \right) = \frac{9}{2}a^2\gamma_0.$$

Вычисляем статические моменты пластины относительно координатных осей, используя соответствующие формулы:

$$M_x = \iint\limits_D \gamma_0 ydxdy = \gamma_0 \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} ydy = \gamma_0 \int\limits_{-2a}^{a} \frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2/a}^{2a-x} dx = \frac{\gamma_0}{2} \int\limits_{-2a}^{a} ((2a-x)^2 - \frac{x^4}{a^2})dx =$$

$$= \frac{\gamma_0}{2} \left(-\frac{(2a-x)^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2} \right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{\gamma_0}{2} \left(-\frac{a^3}{3} + \frac{64a^3}{3} - \frac{a^3}{5} - \frac{32a^3}{5} \right) = \frac{36}{5}\gamma_0 a^3,$$

$$M_y=\iint_D \gamma_0 x dxdy=\gamma_0\int_{-2a}^{a} xdx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy=\gamma_0\int_{-2a}^{a} x\cdot y\Big|_{x^2/a}^{2a-x}dx=\frac{\gamma_0}{2}\int_{-2a}^{a} x((2a-x)-\frac{x^2}{a})dx=$$

$$=\gamma_0\left(ax^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a}=\gamma_0\left(a^3-\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{4}-4a^3-\frac{8a^3}{3}+4a^3\right)=-\frac{9}{4}a^3\gamma_0.$$

Находим координаты центра тяжести пластины

$$x_c=\frac{M_y}{m}=-\frac{a}{2},\quad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{8}{5}a\,.$$

Применения тройного интеграла

Далее приведем некоторые приложения тройных интегралов.

1. Объем V тела V находится по формуле:

$$V=\iiint_V dv=\begin{cases}\iiint_V dxdydz-\text{в декартовых координатах},\\ \iiint_V \rho d\rho d\varphi dz,-\text{в цилиндрических координатах},\\ \iiint_V r^2\sin\theta drd\varphi d\theta-\text{в сферических координатах}.\end{cases}$$

2. Масса m тела V с заданной плотностью $\gamma(x,y,z)$, где функция $\gamma(x,y,z)$ непрерывна, вычисляется по формуле:

$$m=\iiint_V \gamma(x,y,z)dxdydz$$

(*физический смысл тройного интеграла*).

3. Статические моменты M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} тела V относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz и координаты центра тяжести соответственно равны

$$M_{xy}=\iiint_V z\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz, M_{xz}=\iiint_V y\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz, M_{yz}=\iiint_V x\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz,$$

$$x_c=\frac{M_{yz}}{m},\quad y_c=\frac{M_{xz}}{m},\quad z_c=\frac{M_{xy}}{m}\,.$$

4. Моменты инерции J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} тела V с плотностью $\gamma(x,y,z)$ относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz вычисляются по формулам

$$J_{xy}=\iiint_V z^2\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz,\;\; J_{xz}=\iiint_V y^2\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz\,,$$

$$J_{yz} = \iiint\limits_V x^2 \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz\,.$$

Моменты инерции J_x, J_y, J_z тела V с плотностью $\gamma(x, y, z)$ относительно координатных осей Ox, Oy, Oz находятся по формулам

$$J_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz, \quad J_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz,$$

$$J_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz\,.$$