

Лекция 4. Методы интегрирования.

Непосредственное интегрирование

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием*.

При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «подведения под знак дифференциала»):

$$\begin{aligned} du &= d(u+a), & a - \text{число}, \\ du &= \frac{1}{a} d(au), & a \neq 0 - \text{число}, \\ du &= \frac{1}{a} d(au+b), & a \neq 0, b - \text{числа}, \\ u du &= \frac{1}{2} d(u^2), & u^n du = \frac{1}{n+1} d(u^{n+1}), \\ \cos u du &= d(\sin u), & \sin u du = -d(\cos u), \\ \frac{1}{u} du &= \frac{du}{u} = d(\ln u), \\ e^u du &= de^u, & a^u du = \frac{1}{\ln a} d(a^u), \\ \frac{1}{\cos^2 u} du &= \frac{du}{\cos^2 u} = d(\operatorname{tg} u), \\ \frac{1}{1+u^2} du &= \frac{du}{1+u^2} = d(\operatorname{arctg} u). \end{aligned}$$

Вообще, формула

$$f'(u) du = d(f(u))$$

очень часто используется при подведении под знак дифференциала.

Примеры:

$$1) \int (3x+2)^{26} dx = \frac{1}{3} \int (3x+2)^{26} d(3x+2) = \frac{1}{3} \frac{(3x+2)^{27}}{27} + C,$$

(использовалась формула 1 таблицы интегралов).

$$\begin{aligned} 2) \int \left(3^{1-x} + \frac{1}{x+2} - \frac{4}{\cos^2(3x)} \right) dx &= \int 3^{1-x} dx + \int \frac{dx}{x+2} - 4 \int \frac{dx}{\cos^2(3x)} = \\ &= -\int 3^{1-x} d(1-x) + \int \frac{d(x+2)}{x+2} - \frac{4}{3} \int \frac{d(3x)}{\cos^2(3x)} = -\frac{3^{1-x}}{\ln 3} + \ln|x+2| - \frac{4}{3} \operatorname{tg}(3x) + C, \end{aligned}$$

(использовались формулы 2, 3, 9).

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2} \cdot x)}{\sqrt{(3)^2 - (\sqrt{2} \cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2} \cdot x}{3} + C,$$

(использовалась формула 13).

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4+(x-1)^2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{2^2+(x-1)^2}} = \ln \left| x-1 + \sqrt{5-2x+x^2} \right| + C,$$

(использовалась формула 14).

$$5) \int \operatorname{tg} u \, du = \int \frac{\sin u \, du}{\cos u} = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C,$$

(вывод формулы 7).

$$\begin{aligned} 6) \int \frac{du}{\sin u} &= \int \frac{\cos^2 \frac{u}{2} + \sin^2 \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} du = \int \frac{\cos^2 \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} du + \int \frac{\sin^2 \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} du = \\ &= \int \operatorname{ctg} \frac{u}{2} d\left(\frac{u}{2}\right) + \int \operatorname{tg} \frac{u}{2} d\left(\frac{u}{2}\right) = \ln \left| \sin \frac{u}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{u}{2} \right| + C = \ln \left| \frac{\sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C, \end{aligned}$$

(вывод формулы 11).

Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т.е. подстановки). При этом заданный интеграл должен приводиться к новому интегралу, который будет табличным или к нему сводящимся. Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \quad (1)$$

Формула (1) также называется *формулой замены переменных* в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x .

Иногда, когда функция $f(x)$ представляется в виде $f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ целесообразно подбирать подстановку в виде $t = \varphi(x)$, тогда

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int g(t)dt$$

Другими словами, формулу (8.4) можно применять справа налево.

Примеры.

1) Найти $\int x \cdot (x+3)^{50} dx$.

Пусть $x + 3 = t$, тогда $x = t - 3$, $dx = dt$. Имеем

$$\int x \cdot (x+3)^{50} dx = \int (t-3) \cdot t^{50} dt = \int t^{51} dt - 3 \int t^{50} dt = \frac{t^{52}}{52} - 3 \frac{t^{51}}{51} + C =$$

$$= \frac{(x+3)^{52}}{52} - \frac{(x+3)^{51}}{17} + C.$$

2) Найти $\int x \cdot \sqrt[3]{x-5} dx$.

Пусть $\sqrt[3]{x-5} = t$, тогда $x = t^3 + 5$, $dx = 3t^2 dt$. Имеем

$$\int x \cdot \sqrt[3]{x-5} dx = \int (t^3 + 5) \cdot t \cdot 3t^2 dt = 3 \int t^6 dt + 15 \int t^3 dt = 3 \frac{t^7}{7} + 15 \frac{t^4}{4} + C =$$

$$= \frac{3}{7} (x-5)^{7/3} + \frac{15}{4} (x-5)^{4/3} + C.$$

3) Получить формулу $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C$.

Обозначим $t = \sqrt{u^2 + a^2} + u$ (подстановка Эйлера). Тогда

$$dt = \frac{2u}{2\sqrt{u^2 + a^2}} du + du = \frac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{u^2 + a^2}} du.$$

Отсюда

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{dt}{\sqrt{u^2 + a^2} + u} = \frac{dt}{t}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C.$$

Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv) = u dv + v du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (2)$$

Полученная формула называется *формулой интегрирования по частям*. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения v и du , используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x)a^{kx} dx$, $\int P(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$, где $P(x)$ – многочлен, k – число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители. Формула (8.5) применяется один раз, если многочлен $P(x)$ первой степени, в противном случае каждое применение формулы (8.5) понижает степень многочлена $P(x)$ на единицу.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin kx dx$, $\int P(x)\arccos kx dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} kx dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} kx dx$, $\int P(x)\ln x dx$. Удобно положить $P(x)dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, где a и b – числа. За u можно принять любую из функций $u = e^{ax}$, $u = \sin bx$ или $u = \cos bx$. Данные интегралы относятся к тому типу интегралов, вычисление которых приводит к исходному интегралу, после чего исходный интеграл может быть выражен из полученного уравнения (см. пример 4).

Примеры.

1) Найти $\int (3x+1)e^{2x} dx$.

Пусть $\left[\begin{array}{l} u = 3x+1 \Rightarrow du = 3dx \\ dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right]$ (можно положить $C=0$). Следовательно, по

формуле интегрирования по частям:

$$\int (3x+1)e^{2x} dx = (3x+1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} 3dx = \frac{1}{2}(3x+1)e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C.$$

2) Найти $\int x^2 \cos(x-1) dx$.

Пусть $\left[\begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = \cos(x-1) dx \Rightarrow v = \int \cos(x-1) dx = \sin(x-1) \end{array} \right]$. Поэтому

$$\int x^2 \cos(x-1) dx = x^2 \sin(x-1) - 2 \int x \sin(x-1) dx.$$

Для вычисления интеграла $\int x \sin(x-1) dx$ снова применим метод интегрирования по

частям: $\left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin(x-1) dx \Rightarrow v = -\cos(x-1) \end{array} \right]$. Тогда

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(x-1) dx &= x^2 \sin(x-1) + 2x \cos(x-1) - 2 \int \cos(x-1) dx = \\ &= x^2 \sin(x-1) + 2x \cos(x-1) - 2 \sin(x-1) + C. \end{aligned}$$

3) Найти $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

Пусть $\left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right]$. Поэтому,

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{arctg} x dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.\end{aligned}$$

4) Найти $I = \int e^{2x} \cos x dx$.

Будем применять формулу (2) непосредственно, подводя под дифференциал экспоненту. Имеем

$$\begin{aligned}I &= \int e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{2} \int \cos x de^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x - \frac{1}{2} \int e^{2x} d \cos x = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin x dx.\end{aligned}$$

Применим формулу (2) еще раз, подводя под дифференциал снова экспоненту. Получим

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{4} \int \sin x de^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{4} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} \int e^{2x} d \sin x = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{4} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} \int e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{4} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} \cdot I.\end{aligned}$$

Итак, мы получили уравнение относительно неизвестного интеграла I :

$$I = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{4} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} \cdot I.$$

Выражая из этого уравнения I , получим

$$I = \frac{2}{5} e^{2x} \cos x + \frac{1}{5} e^{2x} \sin x.$$