

## Лекция 5. Интегрирование дробно-рациональных функций.

### Интегрирование простейших рациональных дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей.

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C \quad (\text{формула (2) таблицы интегралов});$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \cdot \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C \quad (\text{формула (1)});$$

$$3. \text{Рассмотрим интеграл } J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx.$$

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим:

$$J = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx,$$

причем  $q - \frac{p^2}{4} > 0$ . Сделаем подстановку  $x + \frac{p}{2} = t$ . Тогда  $x = t - \frac{p}{2}$ ,  $dx = dt$ .

Положим  $q - \frac{p^2}{4} = a^2$ . Следовательно, используя формулы (2) и (15) таблицы интегралов, получаем:

$$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2} dt = M \int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2} \ln(t^2+a^2) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C,$$

т.е. возвращаясь к переменной  $x$ ,

$$J = \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C$$

**Пример.** Найти  $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+13} dx$ .

Выделим полный квадрат в знаменателе:  $x^2 + 4x + 13 = (x+2)^2 + 9$ . Сделаем подстановку  $x+2 = t$ . Тогда  $x = t-2$ ,  $dx = dt$  и

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+4x+13} dx &= \int \frac{2(t-2)+1}{t^2+9} dt = \int \frac{2tdt}{t^2+9} - 3 \int \frac{dt}{t^2+9} = \\ &= \ln(t^2+9) - \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \ln(x^2+4x+13) - \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C. \end{aligned}$$

4. Рассмотрим интеграл вида  $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx$ ,  $k \geq 2$ ,  $q - \frac{p^2}{4} > 0$ .

Данный интеграл подстановкой  $x + \frac{p}{2} = t$  сводится к сумме двух интегралов:

$$M \int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

Первый интеграл легко вычисляется:

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2} \int (t^2+a^2)^{-k} d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + C.$$

Вычислим второй интеграл:

$$\begin{aligned}
J_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(t^2 + a^2) - t^2}{(t^2 + a^2)^k} dt = \\
&= \frac{1}{a^2} \left( \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} \right) = \frac{1}{a^2} \left( J_{k-1} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} \right).
\end{aligned} \tag{3}$$

К последнему интегралу из (3) применим формулу интегрирования по частям.  
Положим

$$u = t, \quad dv = \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^k}, \quad du = dt,$$

$$v = \frac{1}{2} \int (t^2 + a^2)^{-k} d(t^2 + a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}},$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} &= \frac{t}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}} = \\
&= \frac{t}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)} \cdot J_{k-1}.
\end{aligned}$$

Подставляя данный интеграл в равенство (3), получаем

$$J_k = \frac{1}{a^2} \left( J_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)} \cdot J_{k-1} \right),$$

т.е.

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{2k-3}{2k-2} J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2 + a^2)^{k-1}} \right)$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл  $J_k$  для любого натурального числа  $k > 1$ .

**Пример.** Найти интеграл  $J_3 = \int \frac{dt}{(t^2 + 4)^3}$ .

Здесь  $a=2$ ,  $k=3$ . Так как  $J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C$ , то

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + 4)^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} J_1 + \frac{t}{2 \cdot (2-1)(t^2 + 4)} \right) = \frac{1}{16} \operatorname{arctg} t + \frac{t}{8(t^2 + 4)} + C,$$

$$J_3 = \frac{3}{16} J_2 + \frac{t}{16(t^2 + 4)^2} = \frac{t}{16(t^2 + 4)^2} + \frac{3}{16} \left( \frac{1}{16} \operatorname{arctg} t + \frac{t}{8(t^2 + 4)} \right) + C.$$

## Интегрирование рациональных дробей

Рассмотренный выше материал позволяет сформулировать *общее правило интегрирования рациональных дробей*.

1. Если дробь неправильная, то необходимо представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби;
2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;
3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Отметим, что любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

**Пример.** Найти интеграл  $\int \frac{x^6 - 3x^3 + 2x^2 - 2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx$ .

Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель. Получим

$$\frac{x^6 - 3x^3 + 2x^2 - 2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x^2 - 2x + 2 + \frac{-3x^3 - 2x^2 - 2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{-3x^3 - 2x^2 - 2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{-3x^3 - 2x^2 - 2}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2},$$

$$-3x^3 - 2x^2 - 2 \equiv Ax(x^2 + 2x + 2) + B(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)x^2,$$

т.е.

$$-3x^3 - 2x^2 - 2 \equiv (A + C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (2A + 2B)x + 2B.$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} A + C = -3, \\ 2A + B + D = -2, \\ 2A + 2B = 0, \\ 2B = -2, \end{cases}$$

из которой находим коэффициенты:  $B = -1$ ,  $A = 1$ ,  $C = -4$ ,  $D = -3$ . Таким образом

$$\frac{-3x^3 - 2x^2 - 2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{4x + 3}{x^2 + 2x + 2}$$

и

$$\frac{x^6 - 3x^3 + 2x^2 - 2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x^2 - 2x + 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{4x + 3}{x^2 + 2x + 2}.$$

Интегрируем полученное равенство:

$$\int \frac{x^6 - 3x^3 + 2x^2 - 2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx = \int \left( x^2 - 2x + 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{4x+3}{x^2 + 2x + 2} \right) dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + \ln|x| + \frac{1}{x} - \int \frac{4x+3}{(x+1)^2 + 1} dx.$$

Обозначим  $x+1=t$ , тогда  $x=t-1$  и  $dx=dt$ . Таким образом,

$$\int \frac{4x+3}{(x+1)^2 + 1} dx = \int \frac{4t-4+3}{t^2 + 1} dt = 4 \int \frac{tdt}{t^2 + 1} - \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$
$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) - \operatorname{arctg} t + C = 2 \cdot \ln(x^2 + 2x + 2) - \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^6 - 3x^3 + 2x^2 - 2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + \ln|x| + \frac{1}{x} - 2 \ln(x^2 + 2x + 2) + \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$