

## Лекция 11. Функции нескольких переменных

### Предварительные определения

Все определения и утверждения, как правило, будем приводить для функций двух переменных. Если нет особых оговорок, то определения и утверждения легко переносятся на случай функций большего числа переменных.

Пусть  $R^2$  есть арифметическое 2-мерное векторное пространство,  $R^2 = \{(x, y) | x, y \in R\}$ . Компоненты вектора  $(x, y)$  этого пространства можно понимать как координаты точки плоскости с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат  $Oxy$ . Наоборот, каждой точке  $M(x, y)$  однозначно соответствует элемент  $(x, y)$  пространства  $R^2$ . Тогда подмножество множества  $R^2$  можно изобразить некоторой совокупностью точек плоскости  $Oxy$ , а элементы  $R^2$  обозначать  $M(x, y)$  так же как и точки плоскости  $Oxy$ . Говоря о подмножестве множества  $R^2$ , всегда будем представлять это подмножество как множество точек плоскости  $Oxy$ .

Расстояние между элементами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  пространства  $R^2$  или точками  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  плоскости точками  $Oxy$  есть величина

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Для трех точек  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  и  $M_3(x_3, y_3)$  получаем

$$\begin{aligned} \rho(M_1, M_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_3 + x_3 - x_1)^2 + (y_2 - y_3 + y_3 - y_1)^2} = \\ &= \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2}, \end{aligned}$$

где  $a_1 = x_3 - x_1$ ,  $a_2 = y_3 - y_1$ ,  $b_1 = x_2 - x_3$ ,  $b_2 = y_2 - y_3$ .

С использованием известного неравенства Коши – Буняковского для действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

при  $n = 2$ , получаем:

$$\begin{aligned} \rho(M_1, M_2) &= \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \\ &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} = \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2). \end{aligned}$$

Полученное неравенство

$$\rho(M_1, M_2) \leq \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2)$$

называется неравенством треугольника.

Множества точек

$$U(M_0, \delta) = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \right\}$$

или

$$U(M_0, \delta) = \{(x, y) \mid |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\},$$

где  $M_0(x_0, y_0)$ , называются соответственно *открытым кругом радиуса  $\delta$  с центром в точке  $M_0(x_0, y_0)$*  и *открытым квадратом со сторонами  $2\delta$  и с центром  $M_0(x_0, y_0)$* .

Эти множества часто используются в рассуждениях и носят специальные названия -  $\delta$ -окрестность точки  $M_0(x_0, y_0)$ . Часто вместо обозначения  $U(M_0, \delta)$  будем использовать обозначение  $U(M_0)$ .

Некоторая точка  $M'(x', y')$  по определению есть *внутренняя точка множества  $D$* , если множество  $D$  полностью содержит некоторую окрестность  $U(M', \delta)$  точки  $M'(x', y')$ . Если каждая точка множества  $D$  является внутренней, то  $D$  называется *открытой областью* или, короче, *областью*.

Область  $D$  называется *связной*, если любые ее две точки можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в области  $D$ .

Точка  $M'(x', y')$ , не принадлежащая области  $D$ , называется *граничной* для области  $D$ , если каждая окрестность точки  $M'(x', y')$  содержит точки, принадлежащие  $D$ . Множество всех граничных точек области называется *границей* этой области. Например, границами многоугольника, круга являются соответственно многоугольник, окружность.

Множество, образованное областью и ее границей, называется *замкнутой областью*.

Если  $D$  область, то граница ее обозначается символом  $\partial D$ . Тогда  $\bar{D} = D \cup \partial D$  есть замкнутая область.

Пусть  $D$  есть некоторое множество точек на плоскости с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат  $Oxy$ . Множество  $D$  называется *ограниченным*, если некоторый замкнутый круг  $\bar{U}(M_0, R)$ , где  $M_0$  - фиксированная точка, целиком содержит множество  $D$ .

## 10.2. Последовательности точек. Предел последовательности

Если каждому натуральному числу  $n$  поставлена в соответствие точка  $(x_n, y_n) \in R^2$ , то говорят, что определена *последовательность точек из пространства  $R^2$* :

$$(x_1, y_1) (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$$

Последовательность кратко обозначают символами  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  или  $\{(x_n, y_n)\}$ , а так же  $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  или  $\{M_n\}$ .

По определению последовательность называется *ограниченной*, если ограниченным является множество

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots\}.$$

Точка  $M_0(x_0, y_0)$  по определению является *пределом последовательности*  $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется натуральное число  $N$ , зависящее от числа  $\varepsilon$ , такое, что для всякого  $n \geq N$  верно неравенство  $\rho(M_0, M_n) < \varepsilon$ .

Последовательность, обладающая пределом, называется *сходящейся*, и в этом случае пишут  $M_n \rightarrow M_0, n \rightarrow \infty$ .

**Пример.** Показать, что последовательность  $\left\{ \left( \frac{1}{n}, \frac{2}{n+1} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$  сходится к точке  $(0, 0)$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$  и произвольно,  $M_n \left( \frac{1}{n}, \frac{2}{n+1} \right)$  и  $M_0(0, 0)$ . Следуя определению предела последовательности, получаем неравенство:

$$\rho(M_0, M_n) = \sqrt{\left( \frac{1}{n} - 0 \right)^2 + \left( \frac{2}{n+1} - 0 \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{(n+1)^2}} < \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \frac{\sqrt{5}}{n}.$$

Полагаем:  $\frac{\sqrt{5}}{n} < \varepsilon$ . Последнее неравенство равносильно неравенству  $n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}$ . Если  $\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} < 1$  или  $\varepsilon \geq \sqrt{5}$ , то полагаем:  $N = 1$  и тогда для всех  $n \geq N$  верно  $n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}$  или  $\frac{\sqrt{5}}{n} < \varepsilon$ .

Отсюда  $\rho(M_0, M_n) < \varepsilon$ . Если  $\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} \geq 1$  или  $0 < \varepsilon \leq \sqrt{5}$ , то полагаем:  $N = \left[ \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} \right] + 1$ . Тогда из

неравенства  $n \geq N$  следует неравенство  $n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}$  и, следовательно, неравенство  $\frac{\sqrt{5}}{n} < \varepsilon$ .

Отсюда  $\rho(M_0, M_n) < \varepsilon$ .

Таким образом, для произвольного и положительного  $\varepsilon$  нашлось натуральное число

$$N = \begin{cases} 1, & \varepsilon > \sqrt{5}, \\ \left[ \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} \right] + 1, & 0 < \varepsilon \leq \sqrt{5}, \end{cases}$$

такое, что для всех  $n \geq N$  выполняется неравенство  $\rho(M_0, M_n) < \varepsilon$ . По определению данная последовательность сходится к точке  $M_0(0, 0)$ .

Поскольку  $\{\rho(M_0, M_n)\}$  есть числовая последовательность, то можно так сформулировать определение предела: точка  $M_0(x_0, y_0)$  является пределом последовательности  $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(M_0, M_n) = 0$ .

**Теорема 1.** Для того чтобы последовательность  $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  имела своим пределом точку  $M_0(x_0, y_0)$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

**Доказательство.** Доказательство основано на неравенствах: для любых чисел  $a_1$  и  $a_2$  верно

$$|a_i| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \leq |a_1| + |a_2|, \quad i = 1, 2,$$

справедливость которых проверяется непосредственным возведением в квадрат.

В силу этих неравенств для точек  $M_0(x_0, y_0)$ ,  $M_n(x_n, y_n)$  справедливы неравенства

$$|x_n - x_0| \leq \rho(M_0, M_n) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0|,$$

$$|y_n - y_0| \leq \rho(M_0, M_n) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$$

Пусть  $M_n \rightarrow M_0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Это означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(M_0, M_n) = 0$ . Тогда переходим к пределу в неравенстве  $|x_n - x_0| \leq \rho(M_0, M_n)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(M_0, M_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0|, \quad 0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = 0,$$

где последнее равенство равносильно  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

Аналогично устанавливаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ .

Пусть теперь верны равенства  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ , которые равносильны соответственно равенствам  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y_0| = 0$ . Переходим к пределу в неравенстве  $\rho(M_0, M_n) \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(M_0, M_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (|x_n - x_0| + |y_n - y_0|) = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| + \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y_0| = 0.$$

Получили:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(M_0, M_n) = 0$ . Теорема доказана.

Некоторые свойства сходящихся последовательностей.

**1)** Сходящаяся последовательность имеет только единственный предел.

**Доказательство.** Пусть  $M_n \rightarrow M_0$  и  $M_n \rightarrow M'_0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда имеем неравенство

$$\rho(M_0, M'_0) \leq \rho(M_0, M_n) + \rho(M'_0, M_n).$$

Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(M_0, M_n) = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(M'_0, M_n) = 0$ , то  $\rho(M_0, M'_0) \leq 0$ . Отсюда  $\rho(M_0, M'_0) = 0$  и тогда  $M_0 = M'_0$ . Свойство доказано.

2) Сходящаяся последовательность ограничена.

**Доказательство.** В силу определения предела последовательности и, если  $M_n \rightarrow M_0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , то для некоторого значения  $\varepsilon$  и его соответствующего значения  $N$  внутри окрестности

$$U(M_0, \varepsilon) = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon \right\}$$

окажутся все элементы последовательности с номерами большими или равными  $N$ , вне этой окрестности только лишь  $N - 1$  членов последовательности. Положим:

$$d = \max\{\rho(M_0, M_1), \rho(M_0, M_2), \dots, \rho(M_0, M_{N-1}), \varepsilon\}.$$

Тогда все элементы последовательности будут принадлежать замкнутому кругу

$$\bar{U}(M_0, d) = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq d \right\}.$$

Это означает ограниченность последовательности. Свойство доказано.

*Последовательность  $\{M_n\}$  называется фундаментальной, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует натуральное  $N$  такое, что для любых натуральных  $n \geq N$  и  $m \geq N$  выполняется неравенство  $\rho(M_n, M_m) < \varepsilon$ .*

Из неравенств

$$|x_m - x_n| \leq \rho(M_n, M_m) \leq |x_m - x_n| + |y_m - y_n|,$$

$$|y_m - y_n| \leq \rho(M_n, M_m) \leq |x_m - x_n| + |y_m - y_n|$$

следует, что для того чтобы последовательность  $\{M_n\}$  была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы числовые последовательности  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  были фундаментальными. Тогда в силу теоремы 1 и критерия Коши сходимости числовых последовательностей справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** (критерий сходимости последовательности точек из пространства  $R^2$ ). Для того чтобы последовательность  $\{M_n\}$  была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Аналогично случаю числовых последовательностей определяется понятие подпоследовательности. Если из некоторых членов последовательности  $\{M_n\}$  составлена новая последовательность  $\{M_{n_k}\}$ , в которой порядок следования ее членов совпадает с порядком их следования в исходной последовательности (из неравенства  $k' > k''$  следует неравенство  $n_{k'} > n_{k''}$ ), то последовательность  $\{M_{n_k}\}$  называется *подпоследовательностью* последовательности  $\{M_n\}$ .

**Теорема 3.** Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится.

**Доказательство.** Пусть  $\{M_{n_k}\}$  - произвольная подпоследовательность сходящейся к точке  $M_0$  последовательности  $\{M_n\}$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется натуральное  $N$  такое, что неравенство  $\rho(M_0, M_n) < \varepsilon$  имеет место для всех  $n \geq N$ . Следовательно, найдется элемент  $M_{n_{k'}}$  последовательности  $\{M_n\}$  с номером  $n_{k'} > N$  и тогда для всех элементов подпоследовательности  $\{M_{n_k}\}$  с номерами  $k > k'$  справедливо неравенство  $\rho(M_0, M_{n_k}) < \varepsilon$ . По определению последовательность  $\{M_{n_k}\}$  сходится к точке  $M_0$ . Теорема доказана.

**Теорема 4.** Из любой ограниченной последовательности точек  $R^2$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

**Доказательство.** Пусть последовательность  $M_n(x_n, y_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ограничена. Тогда найдется замкнутая окрестность  $\bar{U}(M_0(x_0, y_0), R)$  такая, что  $M_n \in \bar{U}(M_0, R)$  для всех  $n$  и тогда верны неравенства

$$|x_n - x_0| \leq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \leq R,$$

$$|y_n - y_0| \leq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \leq R.$$

Неравенства  $|x_n - x_0| \leq R$ ,  $|y_n - y_0| \leq R$ , выполнимые для всех  $n$ , означают, что последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  ограничены.

Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса для числовой последовательности из числовой последовательности  $\{x_n\}$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ . Подпоследовательность  $\{y_{n_k}\}$  ограниченной последовательности  $\{y_n\}$  также ограничена и поэтому содержит сходящуюся подпоследовательность  $\{y_{n_{k_1}}\}$ . Поскольку всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, то сходится подпоследовательность  $\{x_{n_{k_1}}\}$ . Таким образом, последовательность  $\{M_n\}$  имеет сходящуюся подпоследовательность  $\{M_{n_{k_1}}\}$ . Теорема доказана.

Как и в случае множества действительных чисел в пространстве  $R^2$  вводится понятие бесконечно удаленной точки  $\infty$ . Эта воображаемая точка плоскости определяется с помощью окрестности.

По определению *бесконечно удаленной точки* является такая точка, для которой любое множество  $U(\infty, \varepsilon) = \left\{ M \mid \rho(O, M) > \frac{1}{\varepsilon} \right\}$  (где число  $\varepsilon > 0$  любое) является окрестностью.

Отметим, что бесконечно удаленная точка определяется без знака.

По определению *последовательность  $\{M_n\}$  сходится (или стремится) к бесконечно удаленной точке  $\infty$* , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется натуральное число  $N$  такое, что для любого  $n \geq N$  верно  $\rho(O, M_n) > \frac{1}{\varepsilon}$ .

Если последовательность сходится к бесконечно удаленной точке, то пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \infty$$

Некоторое множество  $D$  из пространства  $R^2$  называется *неограниченным множеством*, если для любого  $\varepsilon > 0$  верно  $D \cap U(\infty, \varepsilon) \neq \emptyset$ .



Последовательность  $\{M_n\}$  по определению является *неограниченной последовательностью*, если множество

$$\{M_1, M_2, \dots, M_n, \dots\}$$

неограниченно.

**Теорема 5.** Всякая неограниченная последовательность содержит подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности.

**Доказательство.** Пусть последовательность  $M_n(x_n, y_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , неограниченная. Тогда найдется точка  $M_{n_1}$  такая, что  $\rho(O, M_{n_1}) > 1$ . Среди точек  $M_{n_1+1}, M_{n_1+2}, \dots$  исходной последовательности найдется точка  $M_{n_2}$  такая, что  $\rho(O, M_{n_2}) > 2$ . Вообще существует точка  $M_{n_k}$  такая, что

$$n_k > n_{k-1}, \rho(O, M_{n_k}) > k, k = 2, 3, \dots$$

Таким образом, построена подпоследовательность  $\{M_{n_k}\}$ . Покажем, что она неограниченная.

Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольное. Всегда найдется натуральное число  $N$  такое, что  $N - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor < N$ . Все точки  $M_{n_k}$  номерами  $k \geq N$  принадлежат  $U(\infty, \varepsilon)$ . По определению последовательность  $\{M_{n_k}\}$  является неограниченной. Теорема доказана.

### Понятие функции нескольких переменных

Пусть  $D$  - произвольное множество точек пространства  $R^2$ . Если каждой точке  $M$  множества  $D$  поставлено в соответствие некоторое число из множества действительных чисел  $R$  (см. рисунок 1), то говорят, что на множестве  $D$  определена *функция*. Пусть числовые переменные  $x$  и  $y$  принимают соответственно значения первой и второй координат точек множества  $D$ , числовая переменная  $z$  - значения, равные числам, которые ставятся в соответствие точкам множества  $D$ . Функцию, определенную выше, записывают в виде  $z = f(x, y)$  или  $z = f(M)$  и называют *функцией двух независимых переменных  $x$  и  $y$  или аргументов  $x$  и  $y$* . Переменная  $z$  называется *зависимой*

переменной или функции. Множество  $D$  называется *областью определения функции*  $z = f(M)$ , а совокупность всех значений зависимой переменной  $z$  - *областью значений*.

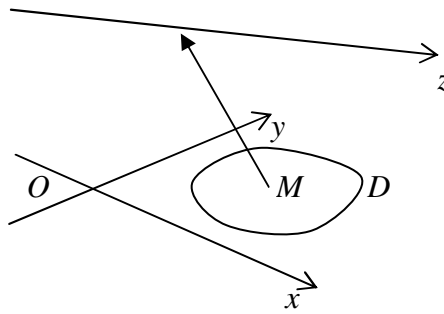


Рисунок 1

Множеством  $D$  обычно является открытая или замкнутая область.

Геометрическим изображением функции  $z = f(x, y)$  может служить поверхность  $S = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$  в пространстве с прямоугольной декартовой системой координат  $Oxyz$ .

Приведем примеры функций и их геометрические изображения.

**Пример.** 1) Пусть  $z = x^2 + y^2$ ,  $D = R^2$ . Для данной функции выражение  $f(x, y) = x^2 + y^2$  определяет правило, по которому точка  $M(x, y)$  сопоставляется числу  $z$ . Областью значений функции является множество  $E = [0; +\infty)$ , поверхность  $S$  - параболоид (см. рисунок 2).

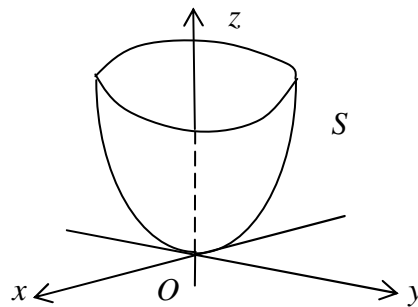


Рисунок 2

**Пример.** 2)  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Область  $D$  не задана. Областью определения функции является область определения выражения  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Она задается неравенством  $1 - x^2 - y^2 \geq 0$  или неравенством  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Последнее неравенство определяет замкнутый круг в координатной плоскости  $Oxy$ . Область значений функции есть отрезок  $E = [0; 1]$ . Поверхность  $S$  - верхняя половина сферы (см. рисунок 3).



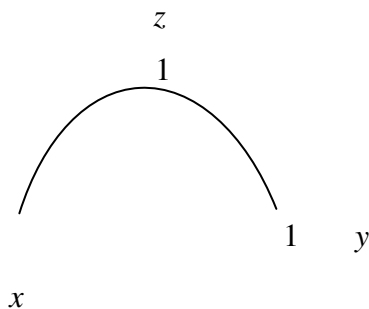


Рисунок .3

Функция  $z = f(x, y)$  по определению является элементарной функцией, если выражение  $f(x, y)$  предписывает выполнение конечного числа только арифметических действий над значениями переменных  $x$ ,  $y$  и константами, а также конечного числа операций, определяемых элементарными функциями одной переменной.

**Примеры.** 1)  $P(x, y) = y^4 + 2x^2y^2 - y + \sqrt{2}$ ,  $Q(x, y) = x^5 - x^2y - 1$  - целые функции или многочлены от двух переменных соответственно 4-ой и 5-ой степени.

2)  $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{y^4 + 2x^2y^2 - y + \sqrt{2}}{x^5 - x^2y + 1}$  - дробно рациональная функция.

3)  $f(x, y) = x + \sqrt{x^2 + 2y^2 + 1}$  - иррациональная функция.

4)  $f(x, y) = x^2 + \sin(x^2 + y^2 + 1)$  - трансцендентная функция.

### Предел функции в точке

*Проколотой*  $\delta$  - *окрестностью* точки  $M_0(x_0, y_0)$  называется множество  $\overset{\circ}{U}(M_0, \delta) = U(M_0, \delta) \setminus \{M_0\}$ . Для проколотой окрестности будем использовать также обозначение  $\overset{\circ}{U}(M_0)$ .

По определению точка  $M_0(x_0, y_0)$  является *предельной для множества*, если любая ее проколотая окрестность содержит хотя бы одну точку этого множества.

Пусть функция  $z = f(x, y)$  определена на некоторой области  $D$ , точка  $M_0(x_0, y_0)$  является предельной точкой области  $D$ . По определению *число  $a$  является пределом  $z = f(x, y)$  в точке  $M_0$  или, что то же самое при  $M \rightarrow M_0$* , если какова бы ни была последовательность  $\{M_n\}$  принадлежащая  $D \cap \overset{\circ}{U}(M_0)$ , сходящаяся к точке  $M_0(x_0, y_0)$ ,

соответствующая числовая последовательность значений функций  $\{f(M_n)\}$  сходится к числу  $a$ .

Используют обозначения:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = a, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = a, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = a.$$

Приведем эквивалентные определения предела функции в точке.

1) Пусть функция  $z = f(x, y)$  определена в некоторой области  $D$ , точка  $M_0(x_0, y_0)$  является предельной точкой области  $D$ . Число  $a$  называется пределом функции  $z = f(x, y)$  в точке  $M_0(x_0, y_0)$  или, что то же самое при  $M \rightarrow M_0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для любой точки  $M(x, y)$ , для которой  $\rho(M_0, M) < \delta$ , выполняется неравенство

$$|f(M) - a| < \varepsilon.$$

Первое определение и только что приведенное называются соответственно определениями по Гейне и по Коши. Равносильность их устанавливается также как и равносильность определений предела функции одной переменной по Гейне и Коши.

2) Координаты произвольной точки  $M(x, y)$  из множества  $D \cap \overset{\circ}{U}(M_0)$  можно записать в виде  $x = x_0 + \Delta x$ ,  $y = y_0 + \Delta y$  при определенных значениях переменных  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Функцию  $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  можно рассматривать как функцию переменных  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , предел функции  $z = f(x, y)$  в точке как предел функции  $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  в точке  $M'_0(0; 0)$ . Отсюда равносильность равенств

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = a \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = a.$$

Таким образом, последнее равенство можно принять за определение предела функции  $z = f(x, y)$  в точке  $M_0$ .

**Пример.** Показать исходя из определения, что  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$ .

Следуя определению, рассмотрим модуль разности:

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2}.$$

С учетом неравенств  $|x|^3 = (x^2)^{\frac{3}{2}} \leq (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ ,  $|y|^3 = (y^2)^{\frac{3}{2}} \leq (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ , получаем:

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{2(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольное число и пусть  $2\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$ . Положим:  $\varepsilon = 2\delta$  или  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда из неравенства  $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$  будет следовать

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и, следовательно, по определению имеем:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$ .

**Пример.** Показать, что при  $(x, y) \rightarrow (0; 0)$  не существует предела функции

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Рассмотрим две последовательности  $(x_n, y_n) \rightarrow (0; 0)$ , где  $y_n = x_n$ , и  $(x'_n, y'_n) \rightarrow (0; 0)$ , где  $y'_n = x_n^2$  ( $x_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ). Для первой последовательности

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n^3}{x_n^4 + x_n^2} = \frac{x_n^3}{x_n^2(1 + x_n^2)} = \frac{x_n}{1 + x_n^2} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

для второй последовательности

$$f(x'_n, y'_n) = \frac{x_n'^4}{x_n'^4 + x_n'^4} = \frac{x_n'^4}{2x_n'^4} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Получили, что для различных последовательностей, стремящихся к одной точке, соответствующие последовательности значений функции имеют различные пределы. Согласно определению предела по Гейне данная функция не имеет предела в точке  $(0; 0)$ .

Рассмотрим случай бесконечного предела в конечной точке.

Имеем следующие определения:

а)  $\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = +\infty$  означает, что для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует число

$\delta > 0$  такое, что  $f(M) > \frac{1}{\varepsilon}$  для всех точек  $M$ , для которых  $\rho(M_0, M) < \delta$ ;

б)  $\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = -\infty$  означает, что для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует число

$\delta > 0$  такое, что  $f(M) < -\frac{1}{\varepsilon}$  для всех точек  $M$ , для которых  $\rho(M_0, M) < \delta$ ;

в)  $\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = \infty$  означает, что для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta > 0$

такое, что  $|f(M)| > \frac{1}{\varepsilon}$  для всех точек  $M$ , для которых  $\rho(M_0, M) < \delta$ .

Каждому из приведенных определений соответствует эквивалентное определение в терминах приращений независимых переменных. Например, имеем равносильные равенства

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = +\infty \text{ и } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = +\infty.$$

Рассмотрим случай предела в бесконечно удаленной точке.

Число  $a$  называется пределом функции  $z = f(x, y)$  в бесконечно удаленной точке  $\infty$  или, что то же самое при  $M \rightarrow \infty$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для любой точки  $M(x, y)$ , для которой  $\rho(M_0, M) > \frac{1}{\delta}$ , выполняется неравенство

$$|f(M) - a| < \varepsilon.$$

Используется обозначение  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = a.$

### Повторный предел функции в точке

Ранее рассмотренные пределы функции в точке называются двойными пределами. Для изучения предела функции при изменении только одной независимой переменной и фиксированном значении другой переменной вводится понятие повторного предела.

При определении повторного предела будем рассматривать в качестве окрестности предельной точки квадрат

$$U(M_0, \delta) = \{(x, y) \mid |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\},$$

предполагая, что возможно функция не определена на отрезках прямых  $x = x_0$  и  $y = y_0$ .

При фиксированном значении переменной  $y$  функция  $z = f(x, y)$  становится функцией одной переменной  $x$ . Для простоты считаем, что для области определения такой функции переменной  $x$  точка  $x_0$  является предельной. Пусть для любого фиксированного значения переменной  $y$ , удовлетворяющего неравенствам  $0 < |y - y_0| < \delta$ , существует предел функции  $z = f(x, y)$  при  $x \rightarrow x_0$ , вообще говоря, зависящий от  $y$ :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y\text{-фикс.}}} f(x, y) = \varphi(y).$$

Пусть существует предел  $a$  функции  $\varphi(y)$  при  $y \rightarrow y_0$ . В таком случае по определению в точке  $M_0(x_0, y_0)$  существует *повторный предел*  $a$  функции  $z = f(x, y)$ . Обозначение повторного предела:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = a.$$

В этом обозначении  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  ( $y$  - фиксированное значение и  $0 < |y - y_0| < \delta$ )

называется внутренним пределом.

Аналогично определяется другой повторный предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ , в котором

внутренним является  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  ( $x$  - фиксированное значение и  $0 < |x - x_0| < \delta$ ).

**Пример.** Вычислить повторные пределы функции  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  в точке

$O(0; 0)$ .

Вычисляем сначала внутренний предел, а затем внешний:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Аналогично получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0.$$

**Теорема 6.** Пусть в точке  $M_0(x_0, y_0)$  существует двойной предел:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = a,$$

а также внутренние пределы в двух повторных пределах этой функции. Тогда существуют повторные пределы  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ , причем каждый из них равен

$a$ .

**Доказательство.** Ограничимся доказательством существования повторного предела  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ , причем для внутреннего предела положим

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y).$$

В силу существования двойного предела для произвольного числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что верно неравенство



$$|f(x, y) - a| < \varepsilon$$

для всех значений переменных  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих неравенствам  $|x - x_0| < \delta$  и  $|y - y_0| < \delta$ . Фиксируем такое значение  $y$ , для которого выполняется неравенство  $|y - y_0| < \delta$ . Перейдем в неравенстве на функцию к пределу при  $x \rightarrow x_0$ . Так как функция  $f(x, y)$  при этом стремится к пределу  $\varphi(y)$ , то получим неравенство

$$|\varphi(y) - a| \leq \varepsilon.$$

Тогда согласно определению имеем:  $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = a$ . Отсюда с учетом условия

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$  следует

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = a$$

Теорема доказана.

В последнем рассмотренном примере показано существование и равенство двух повторных пределов. Покажем, что двойного предела функции из этого примера не существует.

Рассмотрим последовательность точек  $\{(x_n, kx_n)\}$ , где число  $k$  произвольное, а  $x_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , и соответствующую последовательность значений функции:

$$f(x_n, kx_n) = \frac{kx_n^2}{x_n^2 + k^2x_n^2} = \frac{kx_n^2}{x_n^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}.$$

При  $k=1$  имеем последовательность  $\{(x_n, x_n)\}$ , а при  $k=-1$  - последовательность  $\{(x_n, -x_n)\}$ . Каждая из последовательностей сходится к точке  $O(0; 0)$ . Пределы значений функции, соответствующие этим последовательностям, различны (они равны  $\frac{1}{2}$  и  $-\frac{1}{2}$ ). Следовательно, двойного предела функции в точке  $O(0; 0)$  не существует. Таким образом,

вообще из существования и равенства повторных пределов не следует существования двойного предела.

### Непрерывность функции нескольких переменных в точке и в области

По определению функция  $z = f(x, y)$  непрерывна в точке  $M_0(x_0, y_0)$ , если она определена в некоторой полной окрестности  $U(M_0)$  и

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$$

Приведем эквивалентное определение непрерывности функции в точке.

Запишем координаты точек окрестности  $U(M_0)$  в виде  $x = x_0 + \Delta x$ ,  $y = y_0 + \Delta y$ . По определению функция  $z = f(x, y)$  непрерывна в точке  $M_0(x_0, y_0)$ , если

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0.$$

Величина  $\Delta f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$  называется *приращением* функции  $z = f(x, y)$  в точке  $M_0(x_0, y_0)$ . Используют также записи приращения:  $\Delta f(x_0, y_0)$ ,  $\Delta f(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)$ . Последний предел можно записать в виде

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta f(M_0) = 0 \text{ или } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta f(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) = 0.$$

Приведем примеры непрерывных в точке функций с обоснованием непрерывности.

#### Примеры.

1). Функция  $f(x, y) = C$ ,  $C$  является постоянной величиной, непрерывна в любой точке  $M(x, y)$ , поскольку  $\Delta f(x, y) = C - C = 0$ .

2) Функция  $f(x, y) = x^2 + 2xy - 1$  непрерывна в любой точке  $M(x, y)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x)(y + \Delta y) - 1 - (x^2 + 2xy - 1) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x + \\ &+ 2xy + 2x\Delta y + 2y\Delta x + \Delta x\Delta y - 1 - x^2 - 2xy + 1 = 2x\Delta x + 2x\Delta y + 2y\Delta x + 2\Delta x\Delta y + \Delta^2 x = \\ &= 2(x + y)\Delta x + 2x\Delta y + \Delta^2 x + 2\Delta x\Delta y. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta f(x, y, \Delta x, \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [2(x + y)\Delta x + 2x\Delta y + \Delta^2 x + 2\Delta x\Delta y] = 0.$$

Если функция непрерывна в каждой точке области (открытой или замкнутой), то по определению эта функция *непрерывна в области*.

Рассмотрим свойства пределов функций двух переменных. Определение предела и непрерывности функций двух переменных дословно совпадает с определением предела и непрерывности для функции одной переменной. Все утверждения о свойствах пределов и непрерывности функций одной переменной, которые не учитывают упорядоченность точек, верны и для функций многих переменных. Приведем такие утверждения.

**Теорема 7.** Если функции  $f(M)$  и  $g(M)$  имеют конечный предел в точке  $M_0$ , то функции  $f(M) + g(M)$ ,  $f(M)g(M)$  также имеют конечный предел в этой точке. Если

$\lim_{M \rightarrow M_0} g(M) \neq 0$ , то функция  $\frac{f(M)}{g(M)}$  имеет конечный предел в точке  $M_0$ . Справедливы

равенства

$$\lim_{M \rightarrow M_0} (f(M) + g(M)) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) + \lim_{M \rightarrow M_0} g(M),$$

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y)g(x, y) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) \cdot \lim_{M \rightarrow M_0} g(x, y),$$

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y)}{\lim_{M \rightarrow M_0} g(x, y)}.$$

Более того, если функции  $f(M)$  и  $g(M)$  непрерывны в точке  $M_0$ , то приведенные функции, полученные арифметическими действиями над функциями  $f(M)$  и  $g(M)$ , являются непрерывными в точке  $M_0$ .

Большое значение имеет свойство сохранения знака функции нескольких переменных в окрестности точки, в которой существует конечный предел.

**Теорема 8.** Пусть функция  $f(M)$  имеет предел, не равный нулю в точке  $M_0$ ,

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A, A \neq 0.$$

Тогда существует окрестность  $\overset{\circ}{U}(M_0)$  такая, что для любой точки  $M \in \overset{\circ}{U}(M_0)$  имеет место неравенство

$$|f(M)| > \frac{|A|}{2}.$$

Более того, функция в этой окрестности  $\overset{\circ}{U}(M_0)$  сохраняет знак числа  $A$ : если  $A > 0$ , то  $f(M) > \frac{A}{2}$ , если  $A < 0$ , то  $f(M) < \frac{A}{2}$ .

Для непрерывной в точке  $M_0$  функции  $f(M)$   $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$  и, если  $f(M_0) \neq 0$ , то в окрестности  $U(M_0)$  функция имеет знак  $f(M_0)$ .

Пусть функция  $z = f(u, v)$  определена в области  $G$ , а  $u = \varphi(x, y)$ ,  $v = \psi(x, y)$  - функции независимых переменных  $x$  и  $y$ , определенные в области  $D$ . Предположим, что точка  $M(x, y)$  принадлежит области  $D$ , а соответствующая точка  $P(u, v)$ , где  $u = \varphi(x, y)$ ,  $v = \psi(x, y)$ , принадлежит области  $G$ . Тогда можно образовать функцию  $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$  двух переменных  $x$  и  $y$ , определенную в области  $D$ . Эта функция называется *сложной функцией*, устанавливающей зависимость значений переменной  $z$  от значений переменных  $x$  и  $y$  посредством функций  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$ .

Предположим, что точка  $M_0(x_0, y_0)$  является предельной для множества  $D$ . Рассмотрим предел сложной функции  $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$  при  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ . В этой

постановке задачи будем также использовать и краткую запись: рассмотрим предел сложной функции  $z = f(\varphi(M), \psi(M))$  при  $M \rightarrow M_0$ , где как обычно  $M(x, y)$ .

**Теорема 9.** Пусть имеет смысл сложная функция  $f(\varphi(M), \psi(M))$ . Если существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M) = u_0, \quad \lim_{M \rightarrow M_0} \psi(M) = v_0,$$

и конечный или бесконечный предел

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = a,$$

где  $P(u, v)$ ,  $P_0(u_0, v_0)$ , то существует и предел

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(\varphi(M), \psi(M)) = a$$

сложной функции  $f(\varphi(M), \psi(M))$ , причем

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(\varphi(M), \psi(M)) = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P).$$

Последнее равенство называется формулой замены переменной для пределов функций.

**Доказательство.** Пусть  $\{M_n\}$  - произвольная последовательность точек из области  $D$ , сходящаяся к предельной точке  $M_0(x_0, y_0)$  этой области. В силу существования пределов функций  $u = \varphi(M)$ ,  $v = \psi(M)$  имеем две сходящиеся последовательности  $u_n = \varphi(M_n)$ ,  $v_n = \psi(M_n)$  с пределами соответственно  $u_0$  и  $v_0$ . Другими словами последовательность  $\{P_n(u_n, v_n)\}$  сходится к точке  $P_0(u_0, v_0)$ . В силу существования предела функции  $f(P)$  имеем: последовательность значений функции  $\{f(P_n)\}$  сходится к пределу  $a$ . Таким образом, последовательность  $\{f(\varphi(M_n), \psi(M_n))\}$  сходится к  $a$ . В силу произвольности последовательности  $\{M_n\}$  и по определению предела функции по Гейне имеем:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(\varphi(M), \psi(M)) = a.$$

Теорема доказана.

Если функции  $u = \varphi(M)$  и  $v = \psi(M)$  непрерывны в точке  $M_0$ , а функция  $f(P)$  непрерывна в точке  $P_0(u_0, v_0)$ , где  $u_0 = \varphi(M_0)$  и  $v_0 = \psi(M_0)$ , то

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(\varphi(M), \psi(M)) = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0) = f(\varphi(M_0), \psi(M_0)),$$

то есть сложная функция  $f(\varphi(M), \psi(M))$  непрерывна в точке  $M_0$ .

Если в условии теоремы функция  $f(P)$  непрерывна в точке  $P_0$ , то

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(\varphi(M), \psi(M)) = f(P_0(u_0, v_0)) = f\left(\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M), \lim_{M \rightarrow M_0} \psi(M)\right),$$

Что означает возможность перехода под знаком непрерывной функции.

Рассмотрим частные случаи образования сложной функции двух переменных, применения формулы замены и вопрос непрерывности сложной функции.

1) Пусть  $z = f(u)$  - функция одной переменной, а функция двух переменных  $u = \varphi(x, y)$  определена в области  $D$  и имеет значения, принадлежащие области определения функции  $z = f(u)$ . Тогда возможно образование сложной функции  $z = f(\varphi(x, y))$  двух переменных, определенной в области  $D$ . Если  $\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M) = u_0$ , то

формула замены переменной в пределе имеет вид:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(\varphi(M)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u).$$

Если функция  $u = \varphi(x, y)$  непрерывна в точке  $M_0$ , функция  $z = f(u)$  - в точке  $u_0 = \varphi(M_0)$ , то сложная функция  $z = f(\varphi(x, y))$  будет непрерывной в точке  $M_0$ .

2) Пусть  $z = f(u, v)$  - функция двух переменных, определенная в области  $G$ , а функции  $u = \varphi(x)$  и  $v = \psi(y)$  определены соответственно на множествах  $F$  и  $T$ , причем точка  $P(u, v)$  с координатами  $u = \varphi(x)$  и  $v = \psi(y)$  принадлежит области  $G$ . При таких

условиях возможно образование сложной функции  $z = f(\varphi(x), \psi(y))$  двух переменных  $x$  и  $y$ , определенной в области  $D = \{(x, y) \mid x \in F, y \in T\}$ .

Формула замены переменных в пределе

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(\varphi(x), \psi(y)) = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P).$$

Если функции  $u = \varphi(x)$  и  $v = \psi(y)$  непрерывны соответственно в точках  $x_0$  и  $y_0$ , а функция  $z = f(u, v)$  непрерывна в точке  $P(u_0, v_0)$ , то сложная функция  $z = f(\varphi(x), \psi(y))$  непрерывна в точке  $M_0(x_0, y_0)$  области  $D$ .

Приведем примеры применения приведенных выше утверждений в вычислениях пределов функций.

**Пример.** Вычислить пределы.

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} (1 + xy^2)^{\frac{y}{x^7 y + xy^2}}.$$

Преобразуем выражение, записанное под знаком предела.

$$(1 + xy^2)^{\frac{y}{x^7 y + xy^2}} = (1 + xy^2)^{\frac{y}{xy(x^6 + y)}} = (1 + xy^2)^{\frac{y^2}{xy^2(x^6 + y)}} = \left[ (1 + xy^2)^{\frac{1}{xy^2}} \right]^{\frac{y^2}{x^6 + y}}.$$

Пусть  $u = (1 + xy^2)^{\frac{1}{xy^2}}$  и  $v = \frac{y^2}{x^6 + y}$ . Поскольку

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} (1 + xy^2)^{\frac{1}{xy^2}} = e, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \frac{y^2}{x^6 + y} = 3,$$

то с применением формулы замены переменных в пределе (см. теорему) получаем:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} (1 + xy^2)^{\frac{y}{x^7 y + xy^2}} = \lim_{\substack{u \rightarrow e \\ v \rightarrow 3}} u^v = e^3.$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}.$$

Положим:  $u = x^2 + y^2$ . Применим формулу замены переменных первого частного случая. При  $(x, y) \rightarrow (0; 0)$  переменная величина  $u$  также стремится к нулю. Выполним замену переменной в пределе и вычислим полученный предел.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sqrt{u+1} - 1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u(\sqrt{u+1} + 1)}{(\sqrt{u+1} - 1)(\sqrt{u+1} + 1)} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u(\sqrt{u+1} + 1)}{u + 1 - 1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u(\sqrt{u+1} + 1)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} (\sqrt{u+1} + 1) = 2. \end{aligned}$$

Приведенные теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями, непрерывности сложной функции и частные случаи, а также определение элементарной функции двух переменных являются обоснованием следующего утверждения.

**Теорема 10.** Всякая элементарная функция  $f(M)$  непрерывна в каждой точке своей области определения.

**Пример.** Рассмотрим элементарную функцию  $f(x, y) = (x^2 + 2xy - 1)\sin(\sqrt{x} - y)$ . Областью определения функции является множество  $D = \{(x, y) | x \geq 0, -\infty < y < +\infty\}$

Функция  $\psi(x, y) = \sqrt{x} - y$  непрерывна в каждой точке множества  $D$ . Действительно,  $\Delta\psi(\Delta x, \Delta y) = \sqrt{x + \Delta x} - (y + \Delta y) - \sqrt{x} + y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} - \Delta y$ . Поскольку функция  $\sqrt{x}$  непрерывна в каждой точке области определения, то  $\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \varepsilon(\Delta x)$ , где функция  $\varepsilon(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Получили, что  $\Delta\psi(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x) - \Delta y$ . Следовательно,  $\Delta\psi(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta y \rightarrow 0$ . Тогда сложная функция  $\sin\psi(x, y)$



непрерывна в любой точке (первый частный случай). Функция  $\varphi(x, y) = (x^2 + 2xy - 1)$  непрерывна в любой точке (см. пример). Тогда произведение двух непрерывных функций  $f(x, y) = \varphi(x, y)\sin\psi(x, y)$  является непрерывной функцией в любой точке множества  $D$ .

### Непрерывность функции нескольких переменных в области

Установим два важных свойства функций, непрерывных на ограниченном замкнутом множестве. Эти свойства являются обобщениями соответствующих свойств непрерывных функций от одной переменной, заданных на отрезке.

**Теорема 11.** Функция  $f(M)$ , непрерывная на замкнутом ограниченном множестве  $D$ , ограничена на нем.

**Доказательство.** Допустим противное утверждению теоремы: функция  $f(M)$  не ограничена на множестве  $D$ . Тогда для любого натурального  $n$  найдется такая точка  $M_n \in D$ , что верно неравенство

$$|f(M_n)| > n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(M_n) = \infty$ .

Полученная последовательность  $\{M_n\}$  ограничена. Из этой последовательности можно выделить подпоследовательность  $\{M_{n_k}\}$ , сходящуюся к некоторой точке  $M_0 \in R^2$ . Всякая окрестность точки  $M_0$  содержит точки области  $D$ . Поэтому точка  $M_0$  является либо внутренней точкой области  $D$ , либо ее граничной. А поскольку область  $D$  по условию замкнута, то  $M_0 \in D$ . В силу непрерывности функции  $f(M)$  на области  $D$   $\lim_{k \rightarrow \infty} f(M_{n_k}) = f(M_0)$ . Так как  $f(M_0)$  конечное число, то имеем противоречие с тем, что допустили. Теорема доказана.

Говорят, что функция  $f(M)$  достигает на некотором множестве  $D$  своей точной верхней грани  $\sup_{M \in D} f(M)$  (точной нижней грани  $\inf_{M \in D} f(M)$ ), если найдется такая точка  $M_0 \in D$ , что  $f(M_0) = \sup_{M \in D} f(M)$  ( $f(M_0) = \inf_{M \in D} f(M)$ ). Также можно сказать, функция

$f(M)$  на множестве  $D$  достигает в точке  $M_0 \in D$  своего максимума, равного  $\sup_{M \in D} f(M)$ , или достигает своего минимума, равного  $\inf_{M \in D} f(M)$ .

**Теорема 12.** Функция  $f(M)$ , непрерывная на замкнутом ограниченном множестве  $D$ , достигает на нем своего максимума и минимума.

**Доказательство.** Из последней теоремы следует, что множество значений функции  $f(M)$ , определенной на множестве  $D$ , ограничено как сверху, так и снизу. Поэтому это множество обладает точной верхней гранью  $A = \sup_{M \in D} f(M)$  и точной нижней гранью

$B = \inf_{M \in D} f(M)$ . Из свойства точной верхней грани следует, что для любого натурального числа  $n$  найдется точка  $M_n \in D$  такая, что

$$A - \frac{1}{n} < f(M_n) \leq A \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Полученная последовательность  $\{M_n\}$  ограничена. Из этой последовательности можно выделить подпоследовательность  $\{M_{n_k}\}$ , которая сходится к некоторой точке  $M_0$ . В силу замкнутости области  $D$  точка  $M_0 \in D$  и поскольку функция  $f(M)$  непрерывна на  $D$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(M_{n_k}) = f(M_0)$ . Для подпоследовательности  $\{M_{n_k}\}$  имеем:

$$A - \frac{1}{n_k} < f(M_{n_k}) \leq A \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Предельный переход в этом двойном неравенстве при  $k \rightarrow \infty$  приводит к тому, что  $f(M_0) = A$ . Последнее равенство записывается в виде  $f(M_0) = \sup_{M \in D} f(M)$ .

Аналогично доказывается существование точки  $M'_0 \in D$  такой, что  $f(M'_0) = \inf_{M \in D} f(M)$ . Теорема доказана.

**Пример.** Покажем, что функция  $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$  на множестве

$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$  достигает своей точной верхней грани и точной нижней грани.

Для исследования перейдем к полярным координатам:  $x = r \sin \varphi$ ,  $y = r \cos \varphi$ . Тогда

$$f(x, y) = \frac{(x^2)^2 + 2x^2y^2 + (y^2)^2 - 2x^2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 - 2\frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$u = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^2 - 2\frac{r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{r^2} = r^2\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\right).$$

Какова бы ни была точка  $M(x, y) \in D$ , выполняются неравенства  $\frac{1}{4} \leq r^2 \leq 1$ ,

$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi \leq 1$ . Поэтому функция  $u$  ограничена:  $\frac{1}{8} \leq u \leq 1$ . Следовательно, ограничена

исходная функция,  $\frac{1}{8} \leq f(x, y) \leq 1$ .

При  $x=1$  и  $y=0$  функция  $f(x, y)$  принимает свое максимальное значение, равное

1. Если  $r = \frac{1}{2}$  и  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , то величина  $u$  принимает свое наименьшее значение, равное  $\frac{1}{8}$ .

Приведенным значениям  $r$  и  $\varphi$  соответствуют  $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$  и  $y = \frac{\sqrt{2}}{4}$ , при этих значениях

переменных исходная функция принимает свое наименьшее значение  $f\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{8}$ .

Если рассматривать данную функцию на множестве  $D' = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ , которое не является замкнутым, то приходим к выводу о недостижимости функцией своей точной нижней грани  $\inf_{D'} f(x, y) = 0$ .

Доказанные теоремы часто применяются в обосновании разрешимости экстремальных задач прикладного характера.