Лекция 14. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Общие понятия

Дифференциальными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестными являются функции одной или нескольких переменных, и в уравнения входят не только сами функции, но и их производные. Если производные, входящие в уравнение, берутся только по одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Начнем с дифференциальных уравнений *первого порядка*. Это уравнения, в которые входит лишь первая производная неизвестной функции, и они могут быть записаны в виде $F(x,y,y')=0$, где x – независимая переменная, y – её неизвестная функция, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ – производная функции y, F – заданная функция трех переменных.

Решением дифференциального уравнения 1*-го порядка* называется такая функция $y=y(x)$, определенная на некотором промежутке (a,b), что при подстановке её вместо y в уравнение $F(x,y,y')=0$ получается верное равенство на всем промежутке (a,b).

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения.* Решение уравнения $F(x,y,y')=0$ может быть записано и в *неявном виде* $q(x,y)=0$.

Если дифференциальное уравнение 1-го порядка записано в виде

$$y'=f(x,y) \text{ или } \frac{dy}{dx}=f(x,y), \tag{1}$$

тогда оно называется *разрешенным относительно производной.*

Всякое решение дифференциального уравнения можно интерпретировать геометрически. Введем в рассмотрение координатную плоскость P переменных x и y. Мы будем рассматривать лишь такие уравнения, у которых область определения правой части есть некоторая открытая область D в плоскости P (область называется открытой, если каждая точка входит в неё вместе с некоторой своей окрестностью). Пусть функция $y=y(x)$ – решение уравнения (1). Тогда график этой функции называется *интегральной линией* или *интегральной кривой.*

Пусть функция $y=y(x,c)$ определена в некоторой области изменения переменных x и c и имеет непрерывную частную производную по переменной x. Эта функция называется *общим решением* уравнения (1) в заданной области D изменения переменных

x и y. Функция $y = y(x,c)$ является решением уравнения (1) при всех значениях произвольной постоянной c, когда точка (x, y) пробегает область D.

Если общее решение уравнения (1) записано в неявном виде $q(x, y,c) = 0$ или $q(x, y) = c$, то оно называется *общим интегралом* этого уравнения.

Во многих задачах требуется среди всех решений дифференциального уравнения найти решение $y = y(x)$, удовлетворяющее условию $y = y_0$ при $x = x_0$, где x_0 и y_0 – заданные числа, т. е. такое решение, в котором функция $y(x)$ принимает заданное значение y_0, если независимую переменную x заменить заданным значением x_0 так, что $y(x_0) = y_0$. Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку (x_0, y_0). Условие $y = y_0$ при $x = x_0$ называется *начальным условием*. Задача нахождения решения, удовлетворяющего заданному начальному условию называется *задачей Коши.*

Чтобы найти решение уравнения (1) с заданным начальным условием с помощью формулы общего решения, поступают следующим образом:

1) подставляют в общее решение вместо x, y числа x_0, y_0;

2) решают полученное уравнение относительно c и находят $c = c_0$;

3) подставляют полученное значение c_0 в формулу общего решения.

Это и есть искомое решение, его называют *частным решением*. Оно будет единственным, это следует из приведенной ниже теоремы.

Теорема 1. Если $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по переменной y в области D, то через каждую точку, принадлежащую D, проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1).

Эту теорему называют *теоремой существования и единственности* решения уравнения (1) при заданном начальном условии.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым.* Особое решение не содержится в формуле общего решения ни при каком числовом значении произвольной постоянной, включая $c = \pm\infty$, но при этом оно является решением уравнения (1). Если семейство интегральных кривых вида $y = y(x,c)$ или $q(x, y,c) = 0$ имеет *огибающую кривую*, то есть такую кривую, которая касается каждой кривой семейства в одной или нескольких точках и вся состоит из этих точек касания, то последняя всегда является решением дифференциального уравнения, и притом особым.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Это дифференциальные уравнения вида

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 . \tag{2}$$

Здесь коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от переменных x и y. Уравнение (2) можно привести к уравнению с разделенными переменными путем деления на $f_2(x)g_1(y)$. Получаем общий интеграл

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = c .$$

Заметим, что при делении уравнения (2) можно потерять частные решения, обращающие в нуль произведение $f_2(x)g_1(y) = 0$. В этом случае, если одно или оба уравнения $f_2(x) = 0$ и $g_1(y) = 0$ имеют решения $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$, то равенства $x = x_1, x = x_2, \ldots$ и $y = y_1, y = y_2, \ldots$ нужно присоединить к ответу, так как они являются интегральными кривыми дифференциального уравнения.

Уравнения с разделяющимися переменными могут также иметь вид $y' = f(x)g(y)$. Подставив $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и разделив переменные, получим $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c$.

3. Однородные дифференциальные уравнения

Функция $A(x, y)$ называется *однородной* функцией степени n, если для всех $m > 0$ имеем $A(mx, my) = m^n A(x, y)$. Уравнение $A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$, в котором функции A и B – однородные функции одной и той же степени, называется *однородным.* Если функции A и B – однородные функции нулевой степени, то однородное уравнение может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3}$$

.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены

$$u = \frac{y}{x}\text{, отсюда } \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u\,.$$

Тогда уравнение (3) перепишется в виде

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u\,.$$

Если $f(u) = u$, то $u(x) = c$, следовательно, решениями последнего уравнения будут $y = cx$, $x \neq 0$ и особое решение $x = 0$, $y \neq 0$. Положим $f(u) \neq u$. Разделив переменные, получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}\,.$$

Проинтегрировав данное равенство, найдем

$$x = cz(u)\,,\quad z(u) = e^{-\int\frac{du}{u - f(u)}}\,.$$

Далее необходимо вернуться к прежней переменной и записать общее решение в виде

$$x = cz\left(\frac{y}{x}\right).$$

Особыми решениями здесь могут быть полуоси $x = 0$, $y \neq 0$ и полупрямые $y = u_i x$, $x \neq 0$, где u_i – корни уравнения $u - f(u) = 0$.

Уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right), \qquad (4)$$

приводятся к однородным уравнениям. Покажем это. Если

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то сделаем замену переменных по формулам $x = \tilde{x} + n$ и $y = \tilde{y} + m$, где $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ – новые переменные, а числа n и m мы сейчас определим. Перепишем уравнение (4) в новых переменных:

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = f\left(\frac{a\tilde{x} + b\tilde{y} + an + bm + c}{a_1\tilde{x} + b_1\tilde{y} + a_1 n + b_1 m + c_1}\right).$$

Числа n и m найдем из условия

$$\begin{cases} an + bm + c = 0 \\ a_1 n + b_1 m + c_1 = 0, \end{cases}$$

тогда уравнение (4) станет однородным уравнением:

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = f\left(\frac{a + b\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{a_1 + b_1\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}\right).$$

Если

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0, \ b \neq 0,$$

тогда уравнение (4) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{k(ax + by) + c_1}\right).$$

В этом случае очевидна замена:

$$z = ax + by\,, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}\,.$$