Лекция 17. Дифференциальные уравнения высших порядков (продолжение)

3. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

Линейным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x) y = f(x), \quad (5)$$

где

$a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x) -$ произвольные функции от переменной x. Если правая часть уравнения равна нулю, то есть $f(x) = 0$, то линейное уравнение называется *однородным*, в противном случае, при $f(x) \neq 0$, уравнение называется *неоднородным.* Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x) y = 0. \quad (6)$$

Это уравнение всегда имеет хотя бы одно решение, это *тривиальное решение* $y = 0$.

Если $y = y_1$ является решением уравнения (6), то $y = cy_1$, где $c -$ произвольное постоянное число, не равное нулю, также будет решением (6).

Если $y_1, y_2 -$ два частных решения (6), то $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 -$ также решение (6). Это легко проверить путем непосредственной подстановки $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ в (6). Итак, если $y_1, y_2, \ldots y_n -$ решения линейного однородного уравнения (6), то $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ также является решением уравнения (6).

Введем следующее понятие: частные решения $y_1, y_2, \ldots y_n$, все одновременно не равные нулю, называются *линейно независимыми*, если равенство

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_n y_n = 0$$

справедливо только в том случае, когда все постоянные $b_1, b_2, ..., b_n$ равны нулю. Говорят, что такая система решений является *фундаментальной*.

Теорема 3. Для того чтобы, система решений $y_1, y_2, ... y_n$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке из интервала (a, b).

Данный определитель называется *определителем Вронского*. Если определитель Вронского равен нулю, то система решений $y_1, y_2, ... y_n$ будет линейно зависимой.

Пусть $y_1, y_2, ... y_n$ является фундаментальной системой уравнения (6), тогда *общим решением линейного однородного уравнения* будет

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n,$$

где

$c_1, c_2, ..., c_n -$ произвольные постоянные числа.

Основная задача в решении линейных однородных уравнений (6) – найти линейно независимые частные решения. Общего метода для этого нет. Но если известно одно частное решение y_1, то с помощью подстановки $y = y_1 z$ можно привести уравнение (6) к линейному однородному уравнению относительно функции $z(x)$, не содержащему явно эту функцию. Поэтому, сделав вторую замену $z'(x) = u(x)$, мы получим линейное однородное уравнение $(n-1)$-го порядка.

Частное решение можно попытаться найти методом подбора. Иногда, например, удается его определить в виде показательной функции $y_1 = e^{ax}$, где $a -$ некоторое неизвестное число, или в виде алгебраического многочлена $y_1 = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots$.

Общим решением линейного неоднородного уравнения (5) является сумма некоторого частного решения $\bar{y}(x)$ неоднородного уравнения и общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения (6), то есть

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x).$$

Нахождение частного решения неоднородного уравнения вызывает некоторые трудности, поэтому на практике используют *метод Лагранжа* (метод вариации постоянных). Он заключается в следующем. Вначале находят общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n.$$

Затем предполагают, что $c_1, c_2, \ldots, c_n$ являются функциями от x, и ищут общее решение неоднородного уравнения в виде

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + \ldots + c_n(x) y_n,$$

где производные неизвестных функций $c_1'(x), c_2'(x), \ldots, c_n'(x)$ находят из системы уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 + \ldots + c_n'(x) y_n = 0, \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' + \ldots + c_n'(x) y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'(x) y_1^{(n-2)} + c_2'(x) y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0, \\ c_1'(x) y_1^{(n-1)} + c_2'(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Решив эту систему, мы получим

$$c_1'(x) = q_1(x), c_2'(x) = q_2(x), \ldots, c_n'(x) = q_n(x).$$

Проинтегрировав последние уравнения, определим неизвестные функции $c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)$, тем самым по формуле $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + ... + c_n(x)y_n$ найдем общее решение линейного неоднородного уравнения (5).

Для линейного неоднородного уравнения справедлив *принцип суперпозиции решений*, а именно, если функция $f(x)$ представляет собой сумму нескольких функций $f(x) = f_1(x) + ... + f_k(x)$ и $y_1(x), ..., y_k(x)$, соответственно, есть некоторые частные решения уравнений

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = f_1(x),$$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = f_2(x),$$

....

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = f_k(x),$$

то сумма $\overline{y}(x) = y_1(x) + ... + y_k(x)$ также является частным решением (5).

4. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_n y = 0, \tag{7}$$

где коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_n$ – вещественные постоянные числа.

Если функции $y_1, y_2, ..., y_n$ образуют фундаментальную систему уравнения (7), тогда общим решением данного уравнения будет

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n,$$

где $c_1, c_2, ..., c_n -$ произвольные постоянные числа.

Для нахождения линейно независимых решений $y_1, y_2, ... y_n$ линейного уравнения с постоянными коэффициентами используется приведенный ниже метод.

Метод Эйлера. Рассмотрим этот метод для линейного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

где коэффициенты $a_1, a_2 -$ вещественные постоянные числа.

Ищем частное решение уравнения в виде $y = e^{kx}$, где $k -$некоторое постоянное вещественное или комплексное число, которое необходимо найти.

Подставив это решение в рассматриваемое уравнение, получим квадратное уравнение на неизвестное число k

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0,$$

которое называется *характеристическим уравнением*. После решения этого уравнения возможны три случая.

а) Корни $k_1, k_2 -$ вещественные, не равные друг другу числа. Тогда частными решениями будут $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$. Видно, что y_1, y_2 линейно независимые решения, так как их отношение не равно постоянному числу:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x},\ k_1 \neq k_2.$$

Следовательно, общее решение уравнения в этом случае имеет вид

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}.$$

б) Корни k_1, k_2 – комплексно сопряженные, то есть $k_1 = p + iq, k_2 = p - iq$. Частные решения запишутся в виде

$$y_1 = e^{(p+iq)x} = e^{px}\cos qx + ie^{px}\sin qx\,,\ \ y_2 = e^{(p-iq)x} = e^{px}\cos qx - ie^{px}\sin qx\,.$$

Заметим, что функции $e^{px}\cos qx$, $e^{px}\sin qx$ также являются частными решениями, причем они линейно независимые. Поэтому примем за частные решения

$$y_1 = e^{px}\cos qx, y_2 = e^{px}\sin qx\,,$$

тогда общим решением будет

$$y = c_1 e^{px}\cos qx + c_2 e^{px}\sin qx\,.$$

в) Корни совпадают, то есть $k_1 = k_2 = k$. За одно частное решение можно принять $y_1 = e^{kx}$. Второе решение должно от него отличаться, так как корни должны быть линейно независимые. Найдем второе частное решение. Предположим, что k_2 немного отличается от числа k_1. Тогда частными решениями будут $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$. Вычтем из второго решения первое и поделим на число $k_2 - k_1$, мы получим вновь решение

$$\bar{y} = \frac{e^{k_2 x} - e^{k_1 x}}{k_2 - k_1}\,.$$

Перейдем к пределу при $k_2 \to k_1$:

$$\lim_{k_2 \to k_1} \bar{y} = \lim_{k_2 \to k_1} \frac{e^{k_2 x} - e^{k_1 x}}{k_2 - k_1} = \frac{de^{kx}}{dk} = xe^{kx}\,.$$

Здесь мы воспользовались определением производной. Таким образом, вторым частным решением в этом случае может быть $y_2 = xe^{kx}$, отсюда общее решение уравнения

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}.$$

Обобщим результаты для линейного уравнения $n-$го порядка с постоянными коэффициентами (7). Здесь характеристическое уравнение будет следующим:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

Решив его, получим четыре случая.

а) Корни $k_1, k_2, \ldots, k_n -$ вещественные, не равные друг другу числа. Тогда частными решениями будут $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}, \ldots,$ $y_n = e^{k_n x}$, которые попарно линейно независимы. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots + c_n e^{k_n x}.$$

б) Корни $k_1, k_2, \ldots, k_n -$не равны между собой, но среди них есть комплексно сопряженные. Каждой комплексно сопряженной паре $k_m = p_m \pm i q_m$ соответствуют два частных решения

$$y_{1,m} = e^{p_m x} \cos q_m x, \; y_{2,m} = e^{p_m x} \sin q_m x,$$

тогда общим решением будет линейная комбинация всех частных решений, то есть $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$.

в) Корни $k_1, k_2, \ldots, k_n -$все вещественные, но среди них некоторые совпадают, например, $k_1 = k_2 = \ldots = k_s = k$ (в этом случае говорят, что *корень* k *имеет кратность* s). Совпадающим s корням следующие частные решения:

$$y_1 = e^{kx},\ y_2 = xe^{kx},\ y_3 = x^2e^{kx},...,\ y_s = x^{s-1}e^{kx}.$$

Общее решение запишется в виде $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$.

г) Корни $k_1, k_2,..., k_n$ содержат s равных комплексно сопряженных пар $p \pm iq$, тогда им соответствуют $2s$ частных решения:

$$e^{px}\cos qx,\ xe^{px}\cos qx,\ x^2e^{px}\cos qx,...,\ x^{s-1}e^{px}\cos qx,$$

$$e^{px}\sin qx,\ xe^{px}\sin qx,\ x^2e^{px}\sin qx,...,\ x^{s-1}e^{px}\sin qx.$$

Общее решение есть линейная комбинация всех частных решений, то есть $c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$.

Отметим, что линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_n y = f(x)$$

решается методом Лагранжа, описанным выше.

5. Линейные неоднородные уравнения со специальной правой частью

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_n y = f(x), \tag{8}$$

где коэффициенты $a_1, a_2,..., a_n$ − вещественные постоянные числа.

Общим решением такого уравнения является сумма общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения (7) и какого-либо частного решения $\overline{y}(x)$ неоднородного уравнения (8):

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}(x).$$

Нахождение общего решения однородного уравнения было рассмотрено выше. Для определения частного решения можно воспользоваться методом вариации постоянной (метод Лагранжа).

Иногда частное решение удается найти в зависимости от правой части уравнения (8), то есть от вида функции $f(x)$. Рассмотрим разные случаи.

а) Если $f(x) = P(x) -$ полином k-й степени и если число нуль не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, то частное решение неоднородного уравнения (8) ищем в виде

$$\bar{y} = Q(x),$$

где $Q(x) -$ полином k-й степени, но с неопределенными коэффициентами.

Для нахождения неизвестных коэффициентов надо воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Для этого следует подставить частное решение $\bar{y} = Q(x)$ в уравнение (8), в полученном равенстве приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящих в правой и левой частях. Получится система алгебраических уравнений на неизвестные коэффициенты. Решив ее, найдем коэффициенты полинома $Q(x)$, а значит, частное решение $\bar{y}$.

Если нуль является корнем характеристического уравнения кратности s, тогда частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = x^s Q(x).$$

б) Если $f(x) = e^{ax}P(x)$ и если число a не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, то частное решение уравнения (8) ищем в виде

$$\bar{y} = e^{ax}Q(x).$$

Здесь полином $Q(x)$ с неопределенными коэффициентами, причем той же степени, что и полином $P(x)$.

Если a является корнем характеристического уравнения кратности s, тогда частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = x^s e^{ax} Q(x).$$

в) Если $f(x) = e^{ax}(A(x)\cos bx + B(x)\sin bx)$, где $A(x), B(x) -$ полиномы, причем их степени могут не совпадать, и если комплексное число $a + ib$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в том же виде:

$$\overline{y} = e^{ax}(C(x)\cos bx + D(x)\sin bx),$$

здесь степень полиномов $C(x), D(x)$ с неопределенными коэффициентами совпадает с наибольшей степенью полиномов $A(x), B(x)$.

Если комплексное число $a + ib$ является корнем характеристического уравнения кратности s, то частное решение ищем в виде

$$\overline{y} = x^s e^{ax}(C(x)\cos bx + D(x)\sin bx).$$

г) Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_m(x)$, где $f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)$ есть функции рассмотренного выше вида, и если $\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_m -$ их соответствующие частные решения, то $\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 + ... + \overline{y}_m$ является частным решением всего уравнения.