Лекция 6. Двойной интеграл.

Определение двойного интеграла

Обобщением определенного интеграла на случай функций двух переменных является так называемый двойной интеграл, а на случай функций трех переменных – тройной интеграл.

Пусть в замкнутой области D плоскости Oxy задана непрерывная функция $z = f(x, y)$. Разобьем область D на n элементарных областей D_i ($i = \overline{1, n}$), площади которых обозначим через ΔS_i, а диаметры (наибольшее расстояние между точками области) – через d_i (см. рис. 1). В каждой области D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$, после чего составим сумму

$$f(x_1, y_1)\Delta S_1 + f(x_2, y_2)\Delta S_2 + \ldots + f(x_n, y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

которая называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x, y)$ в области D. Обозначим через d наибольший из диаметров областей D_i. Тогда стремление d к нулю будет означать измельчение разбиения области D на элементарные области D_i (и, как следствие, стремление n к ∞)

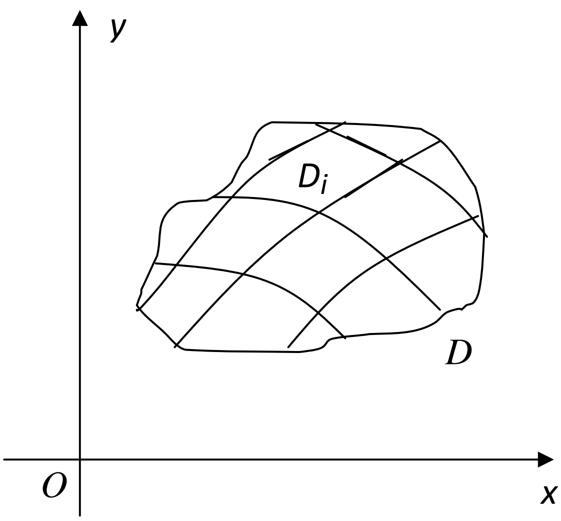

Рис. 1.

Если существует конечный предел интегральной суммы при $d \to 0$, не зависящий от способа разбиения на области D_i и выбора точек M_i в них, то этот предел называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x, y)dS$ или $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$. Таким образом, двойной интеграл определяется равенством

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (d\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* в области D; D – область интегрирования, dS ($dxdy$) – элемент площади (в случае прямоугольной сетки $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$, $dS = dxdy$).

Геометрический и физический смысл двойного интеграла

Рассмотрим тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x, y) \geq 0$, снизу – замкнутой областью *D* плоскости *Oxy*, с боков цилиндрической поверхностью (см. рис. 2). Такое тело называется цилиндрическим. Найдем его объем *V*. Для этого разобьем область *D* произвольным образом на *n* областей D_i, площади которых равны ΔS_i $(i = \overline{1, n})$. Рассмотрим цилиндрические столбики с основаниями D_i, ограниченные сверху кусками поверхности $z = f(x, y)$ (на рис.2 один из них выделен). В своей совокупности они составляют тело *V*. Обозначим объем столбика с основанием D_i через ΔV_i, тогда

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i .$$

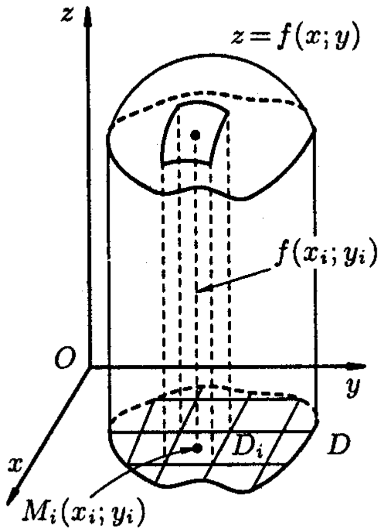

Рис. 2.

Возьмем на каждой площадке D_i произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$ и заменим каждый столбик прямым цилиндром с тем же основанием D_i и высотой $z_i = f(x_i, y_i)$. Объем этого цилиндра приближенно равен объему ΔV_i цилиндрического столбика, т.е. $\Delta V_i \approx f(x_i, y_i)\Delta S_i$. Тогда получаем:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i .$$

Это равенство тем точнее, чем больше число *n* и чем меньше размеры элементарных областей D_i. Естественно принять предел данной суммы при условии, что число площадок D_i неограниченно увеличивается ($n \to \infty$), а каждая площадка стягивается в точку ($\max d_i \to 0$), за объем *V* цилиндрического тела, т.е. $V = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$, или

$$V = \iint_D f(x, y)\,dxdy .$$

Итак, *величина двойного интеграла от неотрицательной функции равна объему цилиндрического тела.* В этом состоит геометрический смысл двойного интеграла.

В частности, если $f(x,y)\equiv 1$, то $\iint\limits_D dxdy$ равен площади области *D*:

$$S=\iint\limits_D dxdy\ .$$

Пусть теперь требуется найти массу *m* плоской пластины *D*, зная, что ее поверхностная плотность $\gamma=\gamma(x,y)$ есть непрерывная функция координат точки (*x*, *y*). Разобьем пластинку *D* на *n* элементарных частей D_i ($i=\overline{1,n}$), площади которых обозначим через ΔS_i. В каждой области D_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i,y_i)$ и вычислим плотность в ней: $\gamma(x_i,y_i)$. Если области D_i достаточно малы, то плотность в каждой точке $(x,\ y)\in D_i$ мало отличается от значения $\gamma(x_i,y_i)$. Считая приближенно плотность в каждой точке области D_i постоянной, равной $\gamma(x_i,y_i)$, можно найти ее массу m_i: $m_i\approx\gamma(x_i,y_i)\Delta S_i$. Так как масса *m* всей пластинки *D* равна $m=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i$, то для ее вычисления получаем приближенное равенство

$$m\approx\sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i,y_i)\Delta S_i\ .$$

Точное значение массы определяется как предел данной суммы при условии $n\to\infty$ и $\max d_i\to 0$:

$$m=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\max d_i\to 0)}}\sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i,y_i)\Delta S_i\ ,$$

или

$$m=\iint\limits_D\gamma(x,y)dxdy\ .$$

Итак, *двойной интеграл от функции* $\gamma(x,y)$ *численно равен массе пластинки, если подынтегральную функцию* $\gamma(x,y)$ *считать плотностью этой пластинки в точке (x, y).* В этом состоит физический смысл двойного интеграла.

Основные свойства двойного интеграла

1. ***Линейность.*** Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны на области *D*, то

$$\iint\limits_D\big(\alpha f(x,y)\pm\beta g(x,y)\big)dxdy=\alpha\iint\limits_D f(x,y)dxdy\pm\beta\iint\limits_D g(x,y)dxdy\,,$$

(α и β – постоянные числа).

В частности, $\iint\limits_D\alpha f(x,y)dxdy=\alpha\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла.

2. ***Монотонность***. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны на области *D* и всюду в этой области $f(x,y) \le g(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy,$$

В частности, если $m \le f(x,y) \le M, \quad \forall (x,y) \in D$, то $m \cdot S \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le M \cdot S$, где S – площадь области *D*. Данные неравенства дают оценку интеграла. Еще одно следствие: если $f(x,y) \ge 0$ на области *D*, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \ge 0$.

3. ***Теорема о среднем значении.***

Теорема 14.2. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на области *D*, то существует точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ такая, что

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0) \cdot S, \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0).$$

При этом значение $f(x_0, y_0)$, т.е. число $\frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, называется *интегральным средним* значением функции $f(x,y)$ в области *D*.

4. ***Аддитивность.*** Если область *D* представляется в виде объединения двух областей D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

5. Для любой функции $f(x,y)$ непрерывной на области *D* имеет место неравенство

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy.$$

Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат

Предположим, что область *D* можно задать в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x). \end{cases}$$

Геометрически это означает, что каждая вертикальная прямая $x = x_0 \quad (a < x_0 < b)$ пересекает границу области *D* только в двух точках M_1 и M_2 (см. рис. 3), которые называются соответственно точкой входа и точкой выхода. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Если же область *D* (см. рис. 4) можно задать в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} c \le y \le d, \\ x_1(y) \le x \le x_2(y), \end{cases}$$

то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

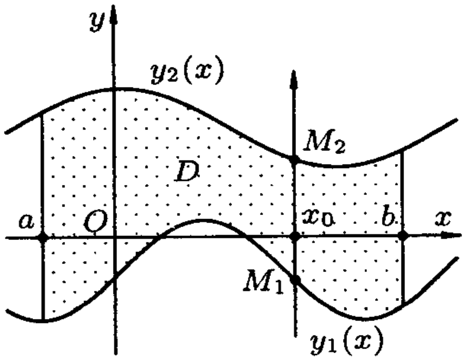

Рис. 3.

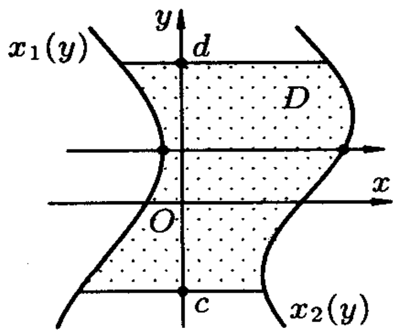

Рис. 4.

Интегралы, стоящие в правых частях последних равенств, называются *повторными* (или двукратными). Они отличаются друг от друга порядком интегрирования. Интеграл, содержащий функцию $f(x,y)$, называется *внутренним*, другой – *внешним*. При вычислении повторных интегралов следует брать сначала внутренний интеграл, при этом переменная не стоящая под знаком дифференциала, принимается постоянной. Затем вычисляется внешний интеграл. Каждый из них вычисляется при помощи формулы Ньютона–Лейбница, как определенный интеграл.

Пример. Вычислить $\iint_D y^2 \sin\frac{xy}{2} dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=\frac{x}{2}$.

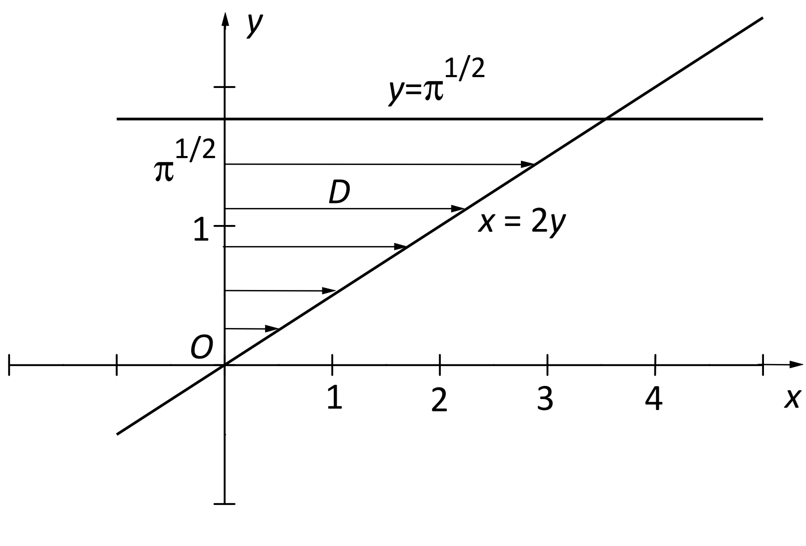

Рис. 5.

Решение. На рис. 5 изображена область интегрирования *D*. Здесь удобнее интегрировать в направлении оси *Ox*, поэтому

$$\iint_D y^2 \sin\frac{xy}{2}dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}} y^2 dy \int_0^{2y} \sin\frac{xy}{2}dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} y^2 \left(-\frac{2\cos\frac{xy}{2}}{y} \right)\Bigg|_0^{2y} dy =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{\pi}} \left(y - y\cos\frac{y^2}{2} \right) dy = 2\int_0^{\sqrt{\pi}} ydy - 2\int_0^{\sqrt{\pi}} y\cos\frac{y^2}{2}dy = y^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}} - 2\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos\frac{y^2}{2} d\frac{y^2}{2} =$$

$$= \pi - 2\sin\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{\pi}} = \pi - 2\sin\frac{\pi}{2} = \pi - 2.$$

Области, не представимые в описанном виде, следует разбить на конечное число таких областей при помощи прямых, параллельных координатным осям (см. рис. 6). При вычислении двойных интегралов по таким областям следует применить свойство аддитивности (свойство № 4).

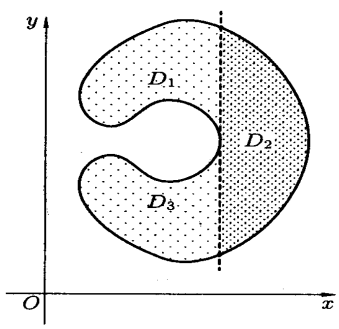

Рис. 6.

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Для упрощения вычисления двойного интеграла часто применяют метод подстановки (как это делается и при вычислении определенного интеграла), т.е. вводят новые переменные под знаком двойного интеграла.

Определим преобразование независимых переменных *x* и *y* (замену переменных) как

$$x = \varphi(u, v) \quad \text{и} \quad y = \psi(u, v).$$

Если данные функции имеют в некоторой области *D** плоскости *Ouv* непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля определитель

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

а функция $f(x, y)$ непрерывна в области *D*, то справедлива *формула замены переменных в двойном интеграле:*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|I(u,v)\right|dudv\ .$$

Функциональный определитель называется *определителем Якоби* или *якобианом.*

Рассмотрим частный случай замены переменных, часто используемый при вычислении двойного интеграла, а именно замену декартовых координат x и y полярными координатами ρ и φ. В качестве u и v возьмем полярные координаты ρ и φ. Они связаны с декартовыми координатами формулами $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$.

Правые части в этих равенствах – непрерывно дифференцируемые функции. Якобиан преобразования определяется как

$$I(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho\ .$$

Формула замены переменных принимает вид:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi,$$

где D^* – область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат.

Для вычисления двойного интеграла в полярных координатах применяют то же правило сведения его к повторному интегралу. Так, если область D^* имеет вид, изображенный на рис. 7, то правую часть последней формулы можно записать в виде

$$\iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)d\rho.$$

Внутренний интеграл берется при постоянном φ.

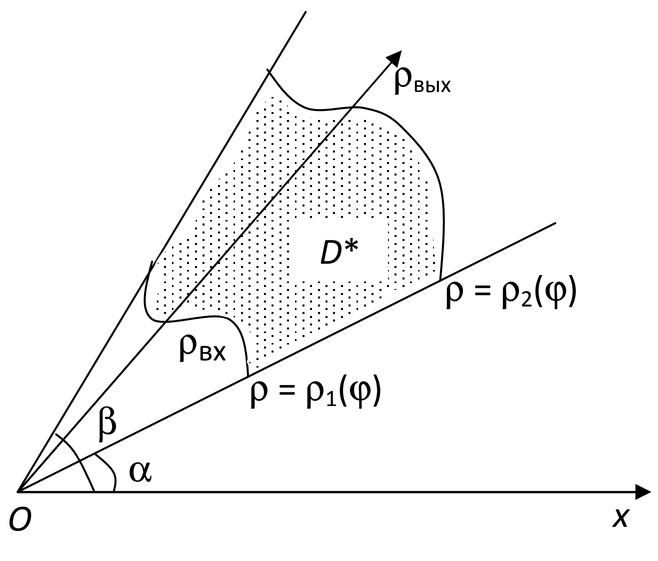

Рис. 7.

Переход к полярным координатам полезен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2+y^2)$, область D есть круг, кольцо или часть таковых.

Пример. Вычислить $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, где D – область, ограниченная линиями: $x^2+y^2=4$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$.

Решение. Перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \iint\limits_D ((\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2)\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_D \rho^3 d\rho d\varphi .$$

Поскольку при переходе к полярным координатам $x^2+y^2=\rho^2$ и $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi$, то область D в полярной системе координат определяется неравенствами (см. рис. 8) $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$, $0\le\rho\le 2$. Заметим: заданная область D – сектор – преобразуется в область D^* – прямоугольник. Поэтому,

$$\iint\limits_D \rho^3 d\rho d\varphi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2 d\varphi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} 4d\varphi = 4\varphi\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi}{3}.$$

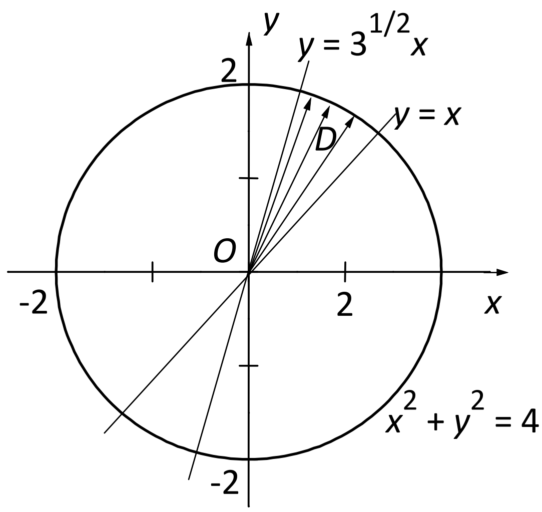

Рис. 8.