Лекция 7. Тройной интеграл.

Определение тройного интеграла.

Определение тройного интеграла аналогично определению двойного интеграла. Пусть в замкнутой области V пространства $Oxyz$ определена и непрерывна функция трех переменных $u = f(x, y, z)$. Разбив область V на n частей V_i $(i = \overline{1, n})$ и выбрав в каждой из них произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i .$$

Если существует конечный предел интегральной суммы при $d \to 0$ (здесь d – наибольший из диаметров областей V_i), не зависящий от разбиения пространственной области на части V_i и выбора точек M_i в них, то этот предел называется *тройным интегралом* от функции $f(x, y, z)$ по области V и обозначается $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$. Таким образом, тройной интеграл определяется равенством

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (d\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i .$$

Теорема 1. (Достаточное условие интегрируемости функции). Если функция $z = f(x, y)$ $(u = f(x, y, z))$ непрерывная в замкнутой плоской области D (пространственной области V), то она интегрируема в этой области.

Свойства тройного интеграла

Свойства тройного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла.

1. ***Линейность.*** Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ непрерывны в области V, то

$$\iiint\limits_V \left(\alpha f(x, y, z) \pm \beta g(x, y, z)\right)dxdydz = \alpha\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz \pm \beta\iiint\limits_V g(x, y, z)dxdydz$$

(α и β – постоянные числа).

В частности, $\iiint\limits_V \alpha f(x, y, z)dxdydz = \alpha\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла.

2. ***Монотонность***. Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ непрерывны в области V и всюду в этой области $f(x, y, z) \le g(x, y, z)$, то

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz \le \iiint\limits_V g(x, y, z)dxdydz$$

В частности, если $m \le f(x,y,z) \le M, \quad \forall (x,y,z) \in V$, то $m \cdot V \le \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \le M \cdot V$, $V = \iiint\limits_V dxdydz$ – объем области V. Данные неравенства дают оценку интеграла. Еще одно следствие: если $f(x,y,z) \ge 0$ на области V, то $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \ge 0$.

3. ***Теорема о среднем значении.***

Теорема 14.2. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области V, то существует точка $M_0(x_0,y_0,z_0) \in V$ такая, что

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0) \cdot V, \text{ или } \quad \frac{1}{V}\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0).$$

При этом значение $(f(x_0,y_0,z_0))$, т.е. число $\frac{1}{V}\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, называется *интегральным средним* значением функции $(f(x,y,z))$ в области V.

4. ***Аддитивность.*** Если область V представляется в виде объединения двух областей V_1 и V_2 без общих внутренних точек, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} g(x,y,z)dxdydz.$$

5. Для любой функции $(f(x,y,z))$ непрерывной в области V имеет место неравенство

$$\left|\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz\right| \le \iiint\limits_V |f(x,y,z)|dxdydz.$$

Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат

В декартовых координатах вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Пусть областью интегрирования V является тело, ограниченное снизу поверхностью $z = z_1(x,y)$, сверху – поверхностью $z = z_2(x,y)$, причем $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ ($z_1(x,y) \le z_2(x,y)$) – непрерывные функции в замкнутой области D, являющейся проекцией тела на плоскость Oxy (см. рис. 1). Тогда для любой непрерывной в области V функции $f(x,y,z)$ имеет место формула

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy,$$

сводящая вычисление тройного интеграла к вычислению двойного интеграла от однократного. При этом сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной z при постоянных x и y. Нижней границей интеграла по z является аппликата точки A – точки входа прямой, параллельной оси Oz в область V, т.е. $z = z_1(x,y)$; верхней границей – аппликатата точки B – точки выхода прямой из области V, т.е. $z = z_2(x, y)$. Результат вычисления этого интеграла есть функция двух переменных: x и y.

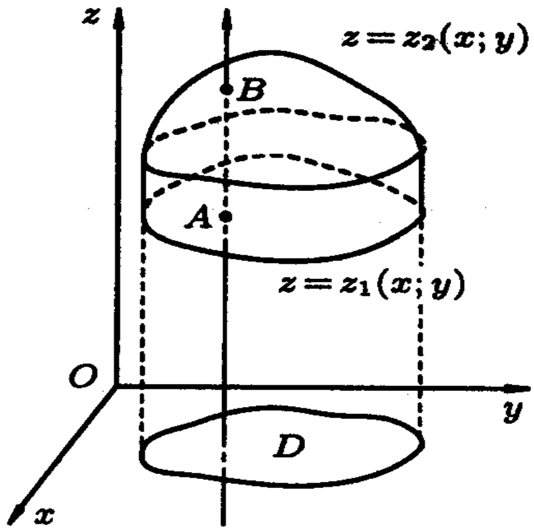


Рис. 1.

Если область D ограничена линиями $x=a$, $x=b$ ($a<b$), $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, причем $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ (см. рис. 2),

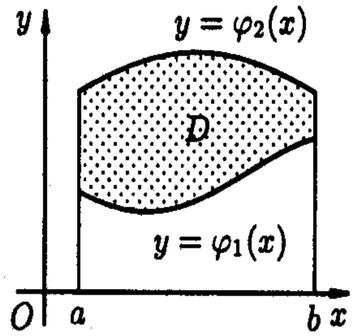


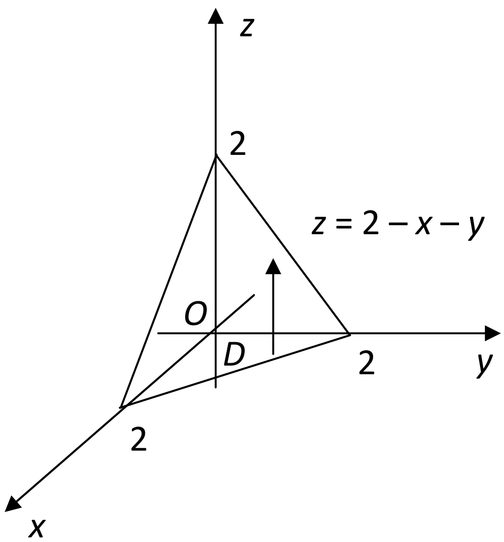
Рис. 2.

то, переходя от двойного интеграла по области D к повторному, получаем формулу

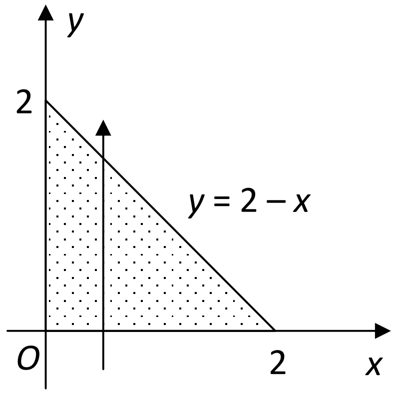
$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz,$$

по которой вычисляется тройной интеграл в декартовых координатах.

Пример. Вычислить $\iiint\limits_V (y+z)dxdydz$, где V ограничена плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 2$ (рис. 3, a).



а)



б)

Рис. 3.

Решение. Область V является правильной в направлении оси Oz. Ее проекция на плоскость Oxy является правильной в направлении оси Oy (рис. 3, б), поэтому

$$\iiint\limits_V (y+z)dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} (y+z)dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left(yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_{z=0}^{z=2-x-y} dy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left(y(2-x-y) + \frac{1}{2}(2-x-y)^2 \right) dy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left(2 - 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\left(2 - 2x + \frac{x^2}{2} \right) y - \frac{y^3}{6} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=2-x} dx = \int_0^2 \left(\left(2 - 2x + \frac{x^2}{2} \right)(2-x) - \frac{1}{6}(2-x)^3 \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{8}{3} - 4x + 4x^2 - \frac{x^3}{3} \right) dx = \left(\frac{8}{3}x - 2x^2 + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{12} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3} - 8 + \frac{32}{3} - \frac{4}{3} = \frac{20}{3}.$$

Замена переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах

При вычислении тройного интеграла, как и двойного, часто применяется метод подстановки, т.е. совершается преобразование переменных.

Пусть совершена подстановка $x = \varphi(u,v,w)$, $y = \psi(u,v,w)$, $z = \chi(u,v,w)$. Если эти функции имеют в некоторой области V^* пространства $Ouvw$ непрерывные частные производные и отличный от нуля определитель

$$I(u,v,w)=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial w} \\ \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial w} \end{vmatrix},$$

то справедлива *формула замены переменных* в тройном интеграле:

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V^*} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))\cdot|I(u,v,w)|\,dudvdw.$$

Здесь $I(u,v,w)$ – определитель Якоби, или якобиан преобразования.

Для вычисления тройного интеграла часто используют так называемые цилиндрические координаты.

Положение точки $M(x, y, z)$ в пространстве $Oxyz$ можно определить также заданием трех чисел ρ, φ, z, где ρ – длина радиус-вектора проекции точки M на плоскость Oxy, φ – угол, образованный этим радиус – вектором с осью Ox, z – аппликата точки M (см. рис. 4).

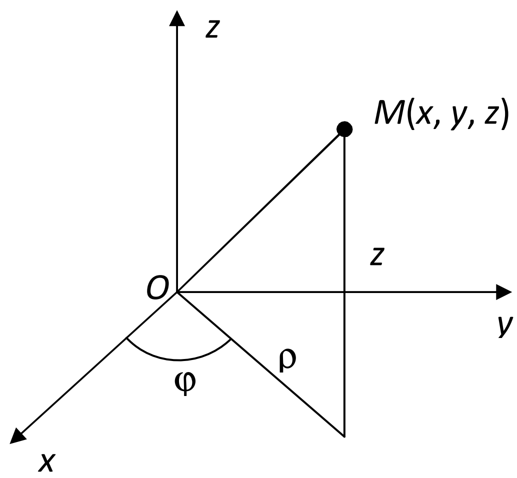


Рис. 4.

Эти три числа (ρ, φ, z) называются *цилиндрическими координатами* точки M.

Цилиндрические координаты точки связаны с ее декартовыми координатами следующими соотношениями: $x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z$ ($\rho\geq 0,\ \varphi\in[0,\,2\pi],\ z\in R$).

Возьмем в качестве u, v, w цилиндрические координаты ρ, φ, z, тогда якобиан преобразования равен

$$I(\rho,\varphi,z)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\rho\,.$$

Формула замены переменных принимает вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\cdot\rho d\rho d\varphi dz.$$

Пример. Вычислить $\iiint\limits_V zdxdydz$, где V – область, ограниченная верхней частью конуса $x^2 + y^2 = z^2$ и плоскостью $z = 1$.

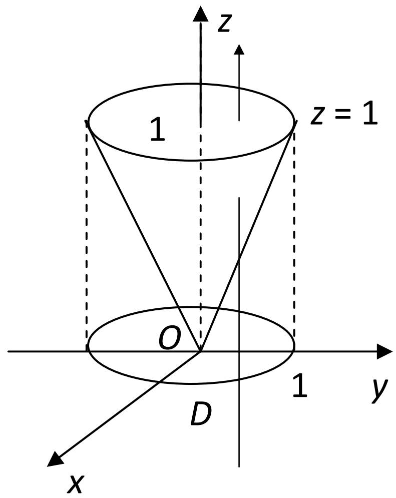


Рис. 5.

Решение. На рис. 5 изображена область интегрирования V. Вычислим интеграл путем перехода к цилиндрическим координатам. Уравнение конуса примет вид

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2 = z^2 \Rightarrow z = \rho .$$

Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 1$ (границ области D) запишется как $\rho = 1$. В результате область V^* определится неравенствами:

$$V^* = \left\{ (\rho,\varphi,z) : \begin{matrix} \rho \le z \le 1, \\ 0 \le \rho \le 1, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

Таким образом, получаем:

$$\iiint\limits_V zdxdydz = \iiint\limits_{V^*} z\cdot\rho d\varphi d\rho dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_\rho^1 zdz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\cdot\left.\frac{z^2}{2}\right|_\rho^1 d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (\rho - \rho^3)d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left.\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\right|_0^1 d\varphi = \frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{8}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Сферическими координатами точки $M(x, y, z)$ пространства $Oxyz$ называется тройка чисел r, φ, θ, где r – длина радиус вектора точки M, φ – угол, образованный проекцией радиус-вектора $\overline{OM}$ на плоскость Oxy и осью Ox, θ – угол отклонения радиус-вектора $\overline{OM}$ от оси Oz (рис. 6).

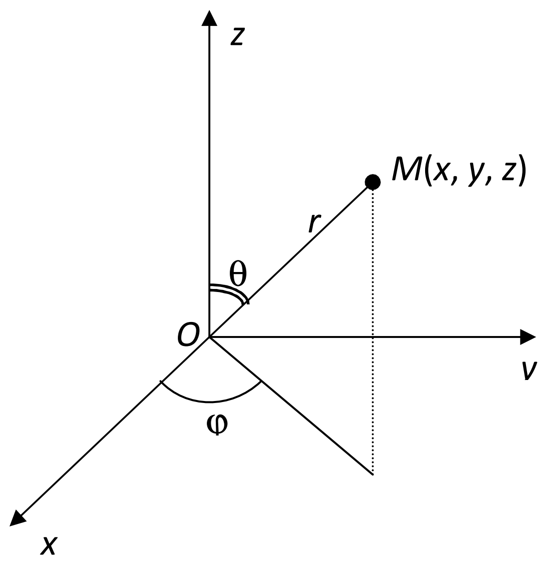


Рис. 6.

Сферические координаты r, φ, θ связаны с декартовыми координатами x, y, z соотношениями:

$$x = r\cos\varphi \cdot \sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi \cdot \sin\theta,\ \ z = r\cos\theta\ \ \left(r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\right).$$

Возьмем в качестве u, v, w сферические координаты r, φ, θ, тогда якобиан преобразования равен

$$I(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = -r^2\sin\theta.$$

Формула замены переменных принимает вид:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) \cdot r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta.$$

Переходить к сферическим координатам удобно, когда область интегрирования V есть шар или его часть, а также, если подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2 + z^2)$.

Пример. Вычислить $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, где V – область, ограниченная верхней частью сферы $x^2+y^2+z^2=36$ и верхней частью конуса $\dfrac{x^2+y^2}{3}=z^2$.

Решение. Область интегрирования V изображена на рис. 7. Переходим к сферическим координатам, тогда уравнение сферы примет вид $r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta=r^2=36\Rightarrow r=6$, а из уравнения конуса получим $\frac{1}{3}\sin^2\theta=\cos^2\theta\Rightarrow \operatorname{tg}\theta=\pm\sqrt{3}\Rightarrow\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{2\pi}{3}$. Область V^* определится неравенствами

$$V^*=\left\{(r,\theta,\varphi):\begin{array}{c}0\le r\le 6,\\ \dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{2\pi}{3},\\ 0\le\varphi\le 2\pi.\end{array}\right\}$$

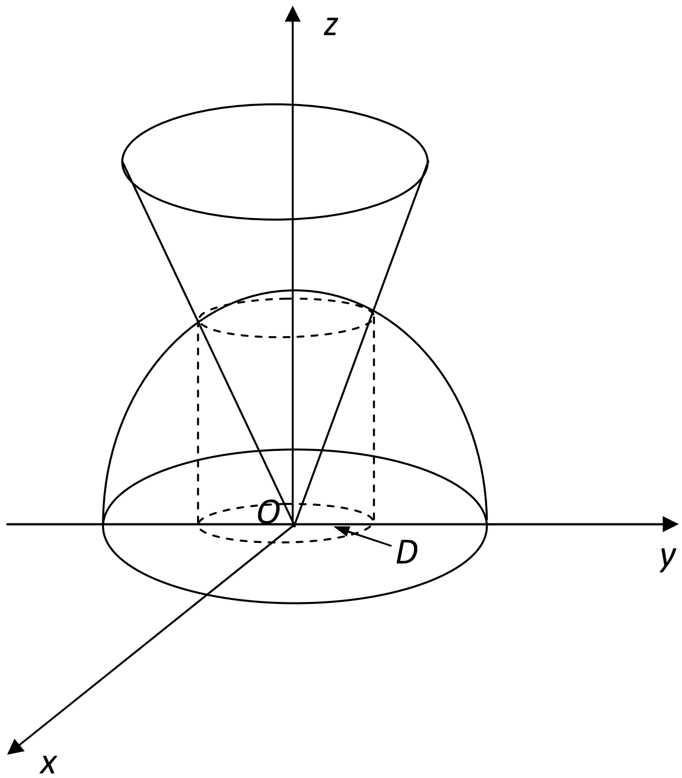


Рис. 7.

Таким образом, получаем

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz=\iiint\limits_{V^*} r^2\cdot r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\pi/3}^{2\pi/3}\sin\theta d\theta\int\limits_0^6 r^4dr=$$

$$=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot(-\cos\theta)\Big|_{\pi/3}^{2\pi/3}\cdot\frac{r^5}{5}\Bigg|_0^6=2\pi\cdot 1\cdot\frac{6^5}{5}=\frac{15552}{5}\pi.$$