Лекция 6. Интегрирование тригонометрических функций.

Интегрирование тригонометрических функций.

1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложение, умножение, возведение в степень и деление) принято обозначать $R(\sin x; \cos x)$, где R – знак рациональной функции.

Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\sin x; \cos x)dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, которая называется *универсальной.*

Так как $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $x = 2\operatorname{arctg}t$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$, то

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg}t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Поэтому $\int R(\sin x; \cos x)dx = \int R\left(\dfrac{2t}{1+t^2}; \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \dfrac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt$, где $R_1(t)$ – рациональная функция от t.

Пример. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

Сделаем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= \int \frac{d(t+1)}{t+1} = \ln(t+1) + C = \ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1) + C.$$

Универсальная подстановка зачастую приводит к громоздким выражениям, к дробям, в числителе и знаменателе которых стоят многочлены высоких степеней, которые трудно раскладывать на простейшие дроби. Поэтому на практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно* $\sin x$, т.е. $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то подстановка $\cos x = t$ рационализирует интеграл;

2) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно* $\cos x$, т.е. $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то делается подстановка $\sin x = t$;

3) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *четна относительно* $\sin x$ и $\cos x$ $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $tgx = t$. Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(\operatorname{tg}x)dx$ или $\int R\left(\sin^2 x; \cos^2 x\right)dx$:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg}x = t,$$
$$x = \operatorname{arctg}t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Пример. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$.

Так как $R(-\sin x; -\cos x) = \frac{1}{3+(-\sin x)^2} = \frac{1}{3+\sin^2 x} = R(\sin x; \cos x)$, то полагаем $\operatorname{tg} x = t$. Отсюда

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{и} \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Поэтому

$$I=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{4t^2+3}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(2t\right)}{\left(2t\right)^2+(\sqrt{3})^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}tgx\right)+C.$$

2. Интегралы типа $\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) Подстановка $\sin x=t$, если n – целое положительное *нечетное* число.

2) Подстановка $\cos x=t$, если m – целое положительное *нечетное* число.

3) Формулы понижения порядка: $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$, если m или n – целые *неотрицательные четные* числа.

4) Подстановка $\operatorname{tg}x=t$, если $m+n$ – есть целое четное отрицательное число. В частности к этому же случаю сводятся и интегралы вида

$$\int\frac{dx}{\sin^m x}=\frac{1}{2^{m-1}}\int\frac{d\,\frac{x}{2}}{\sin^m\frac{x}{2}\cos^m\frac{x}{2}},\qquad \int\frac{dx}{\cos^m x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^m\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

1) Иногда, если среди чисел m и n есть отрицательные, помогают формулы:

$$\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}^2x+1,\qquad \operatorname{cosec}^2x=\frac{1}{\sin^2 x}=\operatorname{ctg}^2x+1.$$

6) В общем случае, если m и n произвольные рациональные числа, рассматриваемый интеграл может быть сведен к биномиальному интегралу (смотри следующую лекцию):

$$\int\sin^m x\cos^n xdx=\int\sin^m x\cos^{n-1}x\cos xdx=$$

$$=\int \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} d\sin x=\int t^m\left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dt\,.$$

Примеры.

1. Найти интеграл $I=\int \sin^3 x\cos^2 x dx.$

Здесь $m=3$ – нечетное число. Применим подстановку $\cos x=t$. Тогда $x=\arccos t$, $dx=-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$, $\sin x=\sqrt{1-t^2}$ и

$$I=\int\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 t^2\left(-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)=-\int(1-t^2)t^2dt=\int\left(t^4-t^2\right)dt=$$

$$=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+C=\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

2. Найти интеграл $I=\int \sin^2 x\cos^4 x dx.$

Здесь $m=2,\ n=4$ – оба четные. Применим формулы понижения порядка

$$I=\int(\sin x\cos x)^2\cos^2 x dx=\int\frac{1}{4}\sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x dx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2x dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx+\frac{1}{16}\int\sin^2 2x d(\sin 2x)=$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

3. Найти интеграл $I=\int\dfrac{dx}{\cos x\sin^3 x}=\int\cos^{-1}x\cdot\sin^{-3}x dx.$

Здесь $m+n=-4$. Обозначим $\text{tg}x=t$. Тогда $x=\text{arctg}\,t$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и

$$I=\int\frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\dfrac{t^3}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}}=\int\frac{1+t^2}{t^3}dt=\int t^{-3}dt+\int\frac{dt}{t}=$$

$$=-\frac{1}{2t^2}+\ln|t|+C=-\frac{1}{2}\cdot ctg^2x+\ln|\text{tg}x|+C.$$

4. Найти интеграл $I=\int\dfrac{dx}{\cos^4 x}$.

Имеем

$$I=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\left(\text{tg}^2x+1\right)d\left(\text{tg}x\right)=\frac{1}{3}\text{tg}^3x+\text{tg}x+C.$$

3. Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа $\int\sin ax\cdot\cos bx$, $\int\cos ax\cdot\cos bxdx$, $\int\sin ax\cdot\sin bxdx$ вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right).$$

Пример. Найти интеграл $I=\int\cos 3x\sin 7x dx$.

Имеем

$$I=\int\cos 3x\sin 7x dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin 4x+\sin 10x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{10}\cos 10x\right)+C\ .$$

Интегрирование гиперболических функций

Интегрирование гиперболических функций вполне аналогично интегрированию тригонометрических функций. При этом необходимо помнить основные формулы для гиперболических функций:

$$\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x=1, \qquad \mathrm{ch}^2 x=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}2x+1),$$

$$\mathrm{sh}^2 x=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}2x-1), \qquad \mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}x=\frac{1}{2}\mathrm{sh}2x\ .$$

Пример. Найти интеграл $I=\int\mathrm{ch}^3 x dx$.

Имеем $I=\int\mathrm{ch}^2 x\cdot\mathrm{ch}x dx=\int\left(1+\mathrm{sh}^2 x\right)d\mathrm{sh}x=\mathrm{sh}x+\frac{\mathrm{sh}^3 x}{3}+C$.