ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 13

Линейные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли. Уравнение в полных дифференциалах

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Если правая часть уравнения равна нулю, то это уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Рассмотрим два метода интегрирования данного уравнения.

Метод вариации постоянной. Находим общее решение $y = ce^{-\int p(x)dx}$ однородного уравнения $y' + p(x)y = 0$. Затем предполагаем, что c является функцией от переменной x, и ищем решение неоднородного уравнения в виде $y = c(x)e^{-\int p(x)dx}$. Подставив его в неоднородное уравнение, после некоторых преобразований, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными на неизвестную функцию $c(x)$: $c'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$. Его решением является $c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$, где c – произвольное постоянное число. Общее решение линейного уравнения запишется в виде

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c).$$

Метод подстановки (метод Бернулли). Общее решение неоднородного линейного уравнения ищем в виде $y(x) = u(x)v(x)$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставив y, y' в уравнение, получим $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$, или $v[u' + p(x)u] + uv' = q(x)$. Далее, пусть функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению $u' + up(x) = 0$, тогда $uv' = q(x)$. Находим любое частное решение уравнения $u' + up(x) = 0$, например, $u(x) = e^{-\int p(x)dx}$. Тогда общим решением уравнения $uv' = q(x)$ будет $v(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$, где c – произвольное постоянное число. Общее решение линейного уравнения имеет вид:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c).$$

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \ (n \neq 1)$$

называется *уравнением Бернулли.* Если обе его части разделить на функцию y^n и сделать замену $z(x) = 1/y^{n-1}$, то получим линейное уравнение на неизвестную функцию $z(x)$. Также уравнение Бернулли можно решать методом подстановки.

Уравнение

$$A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$$

называется *уравнением в полных дифференциалах,* если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, то есть это уравнение можно переписать в виде $dU(x,y) = 0$. Отсюда общий интеграл будет $U(x,y) = c$. Для того чтобы уравнение $A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$ было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно выполнение условия $\partial A/\partial y = \partial B/\partial x$. Общий интеграл рассматриваемого уравнения имеет вид

$$\int_{x_0}^{x} A(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} B(x_0,y)dy = c,$$

где $(x_0, y_0) \in D$, $D -$область определения функций $A(x,y), B(x,y)$.

Рассмотрим еще один способ нахождения общего решения уравнения в полных дифференциалах. Так как с одной стороны $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$, а с другой стороны $dU = A(x,y)dx + B(x,y)dy$, то отсюда следует, что функция $U(x,y)$ удовлетворяет условиям: $\frac{\partial U}{\partial x} = A(x,y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = B(x,y)$.

Примеры решения задач

1. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y' - y/x = -2/x^2, \ y(1) = 1.$$

Решение. Будем решать уравнение методом вариации постоянной. Для этого составим соответствующее однородное уравнение

$$y' - y/x = 0$$

и найдем его решение $y = cx$. Ищем решение исходного неоднородного уравнения в виде $y = c(x)x$. Вычислив $y' = c'(x)x + c(x)$ и подставив в заданное неоднородное уравнение, получим дифференциальное уравнение $c'(x) = -2/x^3$, решением которого является функция $c(x) = 1/x^2 + c$, где c – произвольное постоянное число. Следовательно, общее решение имеет вид $y(x) = (1/x^2 + c)x$. Используя начальное условие $y(1) = 1$, найдем $c = 0$, отсюда частным решением будет $y(x) = 1/x$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy' + y - e^x = 0.$$

Решение. Переписав уравнение в виде $y' + y/x = e^x/x$, заметим, что оно является линейным. Решим его с помощью метода подстановки, то есть ищем решение в виде $y(x) = u(x)v(x)$. Подставив $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в исходное уравнение, получим $u'v + uv' + (uv)/x - e^x/x = 0$. Преобразуем последнее уравнение к виду $v(u' + u/x) + uv' - e^x/x = 0$. Найдем функцию $u(x)$ из условия

$$u' + u/x = 0,$$

тогда уравнение на функцию $v(x)$ будет следующим:

$$uv' - e^x/x = 0.$$

Решив первое из двух последних уравнений, получим одно из частных решений $u(x) = 1/x$. Подставив найденную функцию $u(x)$ в последнее уравнение и проинтегрировав его, получим $v(x) = e^x + c$. Следовательно, общим решением заданного уравнения будет $y(x) = (1/x)(e^x + c)$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y}{3x - y^2}.$$

Решение. Данное уравнение не является линейным относительно функции $y(x)$, но, переписав его в виде $dy(3x - y^2) = ydx$, или

$$\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -y,$$

видим, что оно является линейным относительно функции $x(y)$. Решим полученное уравнение методом вариации постоянной. Составим соответствующее однородное уравнение $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = 0$, разделим переменные $dx/x = 3dy/y$, проинтегрируем $\ln|x| = 3\ln|y| + \ln|c|$, отсюда получим $x(y) = cy^3$. Ищем общее решение неоднородного уравнения в виде

$$x(y) = c(y)y^3.$$

Напомним, что переменной является y. Подставив последнее равенство в неоднородное уравнение, после преобразований получим уравнение на неизвестную функцию $c(y)$: $c'(y) = -1/y^2$. Его решением является $c(y) = 1/y + c$, где $c-$ произвольное постоянное число. Таким образом, получим ответ: $x = y^3(c + 1/y)$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' + 2xy = 2x^3y^3.$$

Решение. Это уравнение Бернулли. Разделим обе части уравнения на функцию y^3: $y^{-3}y' + 2xy^{-2} = 2x^3$. Введем замену $z(x) = y^{-2}$, следовательно, $z'(x) = -2y^{-3}y'$. Тогда уравнение перепишется в виде линейного уравнения

$$z'(x) - 4xz(x) = -4x^3.$$

Его решением будет $z(x)=e^{-2x^2}(x^2-0{,}5)+c$. Отсюда

$$y^2=\frac{1}{e^{-2x^2}(x^2-0{,}5)+c},$$

или общий интеграл заданного уравнения имеет вид

$$y^2e^{-2x^2}(x^2-0{,}5)+y^2c=1.$$

Отметим, что заданное уравнение Бернулли можно также решить с помощью метода подстановки.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'+y=xy^2,\ y(0)=1.$$

Решение. Это уравнение Бернулли. Решим его методом подстановки. Сделав замену $y=uv$, $y'=u'v+uv'$, получим $u'v+uv'+uv=xu^2v^2$, или

$$v[u'+u]+uv'=xu^2v^2.$$

Рассмотрим два уравнения: $u'+u=0$, $uv'=xu^2v^2$. Интегрируем первое из них:

$$\frac{du}{dx}=-u,\ \frac{du}{u}=-dx,\ \int\frac{du}{u}=-\int dx,\ \ln|u|=-x,\ u=e^{-x}.$$

Подставляем найденную функцию во второе уравнение:

$$e^{-x}v'=xe^{-2x}v^2.$$

Разделяем переменные и интегрируем (в одном из интегралов используем метод интегрирования по частям):

$$\frac{dv}{dx} = xe^{-x}v^2,\ \frac{dv}{v^2} = xe^{-x}dx,\ \int \frac{dv}{v^2} = \int xe^{-x}dx + c,\ -\frac{1}{v} = -xe^{-x} - e^{-x} - c,$$

отсюда $v = 1/(xe^{-x} + e^{-x} + c)$. Тогда общее решение уравнения запишется в виде $y = uv = e^{-x}/(xe^{-x} + e^{-x} + c)$.

Используем начальное условие $y(0) = 1$: $1/(1 + c) = 1$, следовательно, $c = 0$. Таким образом, частным решением уравнения будет $y = 1/(1 + x)$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Решение. Проверим, что это уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 12xy \text{ и } \frac{\partial B}{\partial x} = 12xy.$$

Приведем уравнение к виду $dU = 0$. Для этого перепишем заданное уравнение в виде $3x^2dx + 6xy(ydx + xdy) + 4y^3dy = 0$, отсюда нетрудно заметить, что $3x^2dx = dx^3,\ 6xy(ydx + xdy) = 6xyd(xy) = d(3x^2y^2),\ 4y^3dy = dy^4$.

Тогда уравнение примет вид:

$$dx^3 + d(3x^2y^2) + dy^4 = d(x^3 + 3x^2y^2 + y^4) = 0,$$

следовательно, общим интегралом исходного уравнения является

$$U(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c.$$

7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0.$$

Решение. Проверим, что это уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 6y + 2x \text{ и } \frac{\partial B}{\partial x} = 6y + 2x.$$

Воспользуемся формулой $\int\limits_{x_0}^{x} A(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} B(x_0,y)dy = c$. Пусть $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, так как данная точка входит в область определения функций $A(x,y) = 3y^2 + 2xy + 2x,\ B(x,y) = 6xy + x^2 + 3$.

Интегрируем (отметим, что при интегрировании по переменной x вторая переменная y считается постоянной):

$$\int\limits_0^x (3y^2 + 2xy + 2x)dx + \int\limits_0^y 3dy = \int\limits_0^x 3y^2 dx + \int\limits_0^x 2xydx + \int\limits_0^x 2xdx + \int\limits_0^y 3dy =$$

$$= 3y^2 \int\limits_0^x dx + 2y \int\limits_0^x xdx + 2\int\limits_0^x xdx + 3\int\limits_0^y dy = 3y^2 x + 2y\frac{x^2}{2} + 2\frac{x^2}{2} + 3y.$$

Итак, общим интегралом заданного уравнения является

$$3y^2 x + x^2 y + x^2 + 3y = c.$$

8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0.$$

Решение. Проверим, что это уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = -1 \text{ и } \frac{\partial B}{\partial x} = -1,$$

Составим систему $\partial U / \partial x = A(x, y)$, $\partial U / \partial y = B(x, y)$:

$$\partial U / \partial x = 2x - y + 1, \; \partial U / \partial y = 2y - x - 1.$$

Проинтегрировав первое уравнение по переменной *x* (при этом переменную *y* считаем постоянным числом), получим

$$U(x, y) = x^2 - yx + x + c(y).$$

Подставив найденную функцию во второе уравнение, найдем

$$-x + c'(y) = 2y - x - 1,$$

отсюда $c'(y) = 2y - 1$, следовательно, $c(y) = y^2 - y + c$.

Общим интегралом исходного уравнения будет $U(x, y) = c$, то есть

$$x^2 - yx + x + y^2 - y = c.$$