<u>ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1</u>

Числовые ряды. Сумма ряда. Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов

Числовым рядом называется выражение вида

$$u_1 + u_2 + ... = \sum_{i=1}^{\infty} u_i .$$

Сумма первых n элементов данного ряда называется *n-ой частичной суммой* этого ряда и обозначается символом S_n:

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i .$$

Числовой ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$. При этом предел S последовательности $\{S_n\}$ называется *суммой* числового ряда и обозначается $S = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$. В противном случае ряд называется *расходящимся*.

Необходимое условие сходимости числового ряда.

Для того чтобы числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходился, необходимо, чтобы последовательность $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

Достаточные признаки сходимости числового ряда.

<u>Признаки сравнения.</u>

Пусть заданы два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2),$$

причем начиная с некоторого номера k выполняются неравенства $a_m \le b_m$ для любого $m \ge k$. Тогда из сходимости ряда (2) вытекает сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) вытекает расходимость ряда (2).

Пусть заданы два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2),$$

причем $b_n > 0$ для любого номера n. Если существует конечный предел $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, то из сходимости ряда (2) вытекает сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) вытекает расходимость ряда (2).

Пусть заданы два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2),$$

причем $b_n > 0$ для любого номера n. Если существует не равный нулю конечный предел $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$,

1) то из сходимости ряда (2) вытекает сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) вытекает расходимость ряда (2);

2) то из сходимости ряда (1) вытекает сходимость ряда (2), а из расходимости ряда (2) вытекает расходимость ряда (1).

Пусть заданы два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2),$$

причем $b_n > 0$ для любого номера n. Если отношение $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ представляет собой неубывающую неограниченную последовательность, то

1) из расходимости ряда (2) вытекает расходимость ряда (1);

2) из сходимости ряда (1) вытекает сходимость ряда (2).

<u>Признак Даламбера.</u>

Если для элементов числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами существует конечный или бесконечный предел $q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, то

1) при $q > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится,

2) при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

<u>Радикальный признак Коши.</u>

Если для элементов числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами существует конечный или бесконечный предел $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, то

1) при $q > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится,

2) при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Интегральный признак Коши-Маклорена.

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и невозрастает всюду на полупрямой $x \ge m$, где m - любой фиксированный номер. Тогда числовой ряд $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_{m}^{+\infty} f(x)dx$.

Примеры решения задач

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2+5n+6}$.

Решение. Находим корни знаменателя $n^2+5n+6=0 \Rightarrow n_1=-3, n_2=-2$. Тогда $n^2+5n+6=(n+3)(n+2)$.

Разлагаем общий член ряда на элементарные дроби

$$\frac{6}{n^2+5n+6} = \frac{6}{(n+3)(n+2)} = 6\left\{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right\}$$

и выписываем несколько членов ряда:

$$a_1 = 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), \quad a_2 = 6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right), \quad a_3 = 6\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right), \quad \dots,$$

$$a_{n-1} = 6\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right), \quad a_n = 6\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Сокращая все слагаемые, какие возможно, находим n-ю частичную сумму ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n =$$

$$= 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Вычисляем сумму ряда по формуле:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{6}{3}=2\,.$$

Ответ: $S=2$

2. Пользуясь определением сходимости числового ряда, исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$ и в случае сходимости найти его сумму.

Решение. Путем разложения рациональной дроби на простейшие общий член данного ряда представим в виде

$$u_n=\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right).$$

Находим n-ую частичную сумму ряда

$$S_n=u_1+u_2+...+u_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{(n+2)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right).$$

По определению сходимости ряда

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{16}.$$

Ответ: данный ряд сходится, и его сумма равна $\frac{5}{16}$.

3. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3+6}{n^3+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n^2+1)}{n!}\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\cdot\left(\frac{2n^2+3}{5n^2+4}\right)^n$; г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\sqrt{\ln(n+3)}}$.

Решение.

а) Проверяем необходимый признак сходимости ряда ($\lim_{n\to\infty}u_n=0$):

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n^3+6}{n^3+5}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^3+5}\right)=\ln 1=0\,.$$

Делаем вывод о сходимости или расходимости данного ряда, используя предельную теорему сравнения.

Имеем

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^3+5}\right) \sim \frac{1}{n^3+5} \sim \frac{1}{n^3},$$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^3+5}\right)}{1/n^3} = 1$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ сходится как ряд Дирихле (обобщенный гармонический ряд) с $\alpha = 3 > 1$. Следовательно, в силу предельного признака сравнения исходный ряд также сходится.

Ответ: ряд сходится.

б) Поскольку $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, можно упростить выражение для общего члена ряда:

$$u_n = \frac{5^n(n^2+1)}{n!} \sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \sim \frac{5^n(n^2+1)}{n!\cdot 2^{n+1}}.$$

Тогда можно исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, где $v_n = \dfrac{5^n(n^2+1)}{n!\cdot 2^{n+1}}$, а затем воспользоваться предельной теоремой сравнения.

Поскольку v_n содержит произведения сомножителей типа факториалов, следует применить признак Даламбера. Вычисляем v_{n+1}:

$$v_{n+1} = \frac{5^{n+1}((n+1)^2+1)}{(n+1)!\cdot 2^{n+2}}.$$

Вычисляем предел:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}((n+1)^2+1)}{(n+1)!\cdot 2^{n+2}} \cdot \frac{n!\cdot 2^{n+1}}{5^n(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5((n+1)^2+1)}{2(n+1)(n^2+1)} =$$

$$= \frac{5}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 + \dfrac{1}{n}}{(n+1)\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = 0.$$

Т.к. $l = 0 < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n (n^2+1)}{n! \cdot 2^{n+1}}$ сходится по признаку Даламбера. Следовательно, по предельной теореме сравнения сходится и исходный ряд.

Ответ: ряд сходится.

в) Общий член ряда имеет вид:

$$u_n = n^3 \cdot \left(\frac{2n^3+3}{5n^2+4} \right)^n .$$

Применяем радикальный признак Коши:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{n}} \cdot \left(\frac{2n^2+3}{5n^2+4} \right) = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+\frac{3}{n^2}}{5+\frac{4}{n^2}} \right) = 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} .$$

Т.к. $l = \frac{2}{5} < 1$, то исследуемый ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

г) Упрощаем выражение для общего члена ряда

$$u_n = \frac{1}{(3n+2)\sqrt{\ln(n+3)}} \sim \frac{1}{3n\sqrt{\ln n}}$$

и будем исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{3n\sqrt{\ln n}}$ с помощью интегрального признака Коши, так как функция $f(x) = \dfrac{1}{3x\sqrt{\ln x}}$ имеет очевидную первообразную $F(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{\ln x}$. Затем используем предельную теорему сравнения.

Исследуем сходимость несобственного интеграла по определению:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{3x\sqrt{\ln x}} = \lim_{b\to\infty} \int_2^{\infty} \frac{dx}{3x\sqrt{\ln x}} = \frac{2}{3} \lim_{b\to\infty} \sqrt{\ln x}\Big|_{x=2}^{x=b} = \frac{2}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\ln b} - \sqrt{\ln 2} \right) = +\infty .$$

Интеграл расходится.

Применяем интегральный признак Коши. Функция $f(x) = \dfrac{1}{3x\sqrt{\ln x}}$ непрерывна в промежутке $[2, +\infty)$ и убывает в нем к нулю. Следовательно, из расходимости интеграла следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{3n\sqrt{\ln n}}$. По предельной теореме сравнения расходится и исходный ряд.

Ответ: ряд расходится.

4. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$.

Решение.

а) Для сравнения рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, состоящий из элементов сходящейся геометрической прогрессии. Причем для каждого члена выполняется неравенство $u_n < \frac{1}{3^n}$.

Ответ: ряд сходится.

б) Для сравнения рассмотрим расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Для каждого члена, начиная со второго, выполняется неравенство $u_n > \frac{1}{n}$.

Ответ: ряд расходится.

в) Для сравнения рассмотрим сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\pi^2}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}.$$

Ответ: ряд сходится.

г) Применим к этому ряду признак Даламбера в предельной форме, взяв за $u_n = \frac{4^n}{(n+1)!}$.

Тогда

$$u_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+2)!}, \text{ и } \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+2)!4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n+2} = 0.$$

Ответ: ряд сходится.

д) Применим к этому ряду радикальный признак Коши в предельной форме, взяв за $u_n = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}} = 2.$

Ответ: ряд расходится.