ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

Функциональные и степенные ряды

Ряд, членами которого являются функции от x, называются *функциональным*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

Придавая x определенное числовое значение x_0 мы получим числовой ряд $u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots$, который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Совокупность числовых значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости.*

Для определения области сходимости $l(x)$ функционального ряда часто используются признаки Даламбера и Коши. При этом поступают следующим образом.

1. Находим $l(x)$ по одной из формул (если пределы существуют)

$$l(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \quad \text{или} \quad l(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}.$$

2. Так как по признаку Даламбера и Коши ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$, находим интервал сходимости, решая неравенство $l(x) < 1$.

3. Исследуем поведение ряда в граничных точках интервала сходимости.

Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

называется *степенным рядом*, причем говорят, что данный степенной ряд разложен по степеням x.

Рассматривают также степенной ряд, разложенный по степеням $(x - x_0)$, т.е. ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \tag{2}$$

где x_0 – некоторое постоянное число.

Если $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал $(-|x_0|;|x_0|)$ весь состоит из точек сходимости данного ряда; при всех значениях x вне этого интервала рассматриваемый ряд расходится.

Интервал $\left(-|x_0|;|x_0|\right)$ называют *интервалом сходимости* степенного ряда. Положив $|x_0| = R$, интервал сходимости можно записать в виде $\left(-R;R\right)$.

Число R называют *радиусом сходимости* степенного ряда, т.е. $R > 0$ – это такое число, что при всех x, для которых $|x| < R$, степенной ряд абсолютно сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится.

Радиус абсолютной сходимости для ряда (1) можно вычислить по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\,a_n\,|}}.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 0$, то степенной ряд (1) абсолютно сходится на всей числовой оси, т.е. $R = \infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty$, то $R = 0$. Интервал сходимости степенного ряда (2) находят из неравенства $|x - x_0| < R$, т.е. имеет вид $\left(x_0 - R; x_0 + R\right)$.

Примеры решения задач

1. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 3^n}.$$

Решение. Общий член ряда имеет вид:

$$u_n(x) = \frac{(x+1)^n}{n\cdot 3^n}.$$

Применяем признак Даламбера:

$$l(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\dfrac{|x+1|^n}{n\cdot 3^n}} = \frac{1}{3}|x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{3}|x+1|.$$

По признаку Даламбера ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$. Следовательно, интервал сходимости определяется неравенством $\frac{1}{3}|x+1|<1$ и имеет вид $(-4, 2)$.

Исследуем сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости. В точке $x=-4$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

сходится условно по признаку Лейбница.

В точке $x=2$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

расходится, т.к. это гармонический ряд.

Ответ: область сходимости степенного ряда $[-4, 2)$.

2. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(x^2-6x+10)^n}.$$

Решение.

Применяем признак Даламбера:

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)\left|x^2-6x+10\right|^{n+1}}}{\dfrac{2^n}{n\left|x^2-6x+10\right|^n}}=\frac{2}{\left|x^2-6x+10\right|}.$$

Находим интервал сходимости, решая неравенство $l(x)<1$:

$$\frac{2}{\left|x^2-6x+10\right|}<1 \quad\Rightarrow\quad \left|x^2-6x+10\right|>2.$$

Получаем $x\in(-\infty;2)\cup(4;\infty)$. Исследуем сходимость ряда в граничных точках:

при $x=2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (как гармонический);

при $x=4$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ также расходится.

Ответ: область сходимости ряда: $(-\infty;2)\cup(4;\infty)$.

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}.$$

Решение. Находим радиус сходимости ряда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}:\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2.$$

Следовательно, ряд сходится при при $-2<x+2<2$, т.е. при $-4<x<0$.

При $x=-4$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница.

При $x=0$ имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Ответ: область сходимости $[-4;0)$.

4. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

Решение. Воспользуемся признаком Коши:

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{1+x^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{\sqrt[n]{1+x^{2n}}}.$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) если $|x|<1$, то $x^{2n} \to 0, n \to \infty, l(x) = |x| < 1$;

2) если $|x|>1$, то $l(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{|x|}\sqrt[n]{\dfrac{1}{1+x^{-2n}}} = \dfrac{1}{|x|} < 1$;

3) если $|x|=1$, то $\left|\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right| = \dfrac{1}{2}$.

В точках $x=1, x=-1$ ряд расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости ряда.

Ответ. Область сходимости $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$.

5. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot x^n}{\sqrt{(2n+1)\cdot 3^n}}.$$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем,

$$|a_n| = \frac{5^n}{\sqrt{(2n+1)\cdot 3^n}}; \quad |a_{n+1}| = \frac{5^{n+1}}{\sqrt{(2(n+1)+1)\cdot 3^{n+1}}} = \frac{5^{n+1}}{\sqrt{(2n+3)\cdot 3^{n+1}}}.$$

Тогда

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n \cdot \sqrt{(2n+3)\cdot 3^{n+1}}}{5^{n+1}\sqrt{(2n+1)\cdot 3^n}} = \frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Центр интервала в точке $x=0$, так как ряд по степеням x. Исследуем ряд на концах интервала. При $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ получим числовой знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Проверим условия Лейбница: 1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} > \dfrac{1}{\sqrt{5}} > \dfrac{1}{\sqrt{7}} > \dfrac{1}{\sqrt{9}} > \ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$, т.е. условия Лейбница выполняются, следовательно, ряд сходится. При $x = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$ получим знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Подберем ряд для сравнения: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, т. е. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$; $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. По предельному признаку сравнения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} : \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ расходится, так как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится как ряд Дирихле при $n=\frac{1}{2}<1$. Следовательно, область сходимости степенного ряда $-\frac{\sqrt{3}}{5}\le x<\frac{\sqrt{3}}{5}$ или $[-\frac{\sqrt{3}}{5};\frac{\sqrt{3}}{5})$.

Ответ. Область сходимости $[-\frac{\sqrt{3}}{5};\frac{\sqrt{3}}{5})$.

6. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{n!}.$$

Решение. Применяя признак Даламбера, найдем

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\frac{x}{(n+1)!}}{\sin\frac{x}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x}{(n+1)!}}{\frac{x}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

где при $n\to\infty$ были использованы эквивалентности

$$\sin\frac{x}{(n+1)!}\sim\frac{x}{(n+1)!},\ \sin\frac{x}{n!}\sim\frac{x}{n!}.$$

Так как $l(x)=0<1$ для любого *x*, то данный ряд сходится абсолютно на всей числовой оси.

Ответ. Область сходимости $(-\infty,+\infty)$.

7. Найти радиус интервала сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^n x^n .$$

Решение. В этом случае

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n\,|x|^n}=\lim_{n\to\infty}n\,|x|=+\infty,$$

если $x\neq 0$. Следовательно, $R=0$ и ряд сходится только в точке $x=0$.

Ответ: $R=0$.