ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 10

Тройной интеграл. Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах

Пусть областью интегрирования V является тело, ограниченное снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху – поверхностью $z = z_2(x, y)$, причем $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ ($z_1(x, y) \le z_2(x, y)$) – непрерывные функции в замкнутой области D, являющейся проекцией тела на плоскость Oxy (рис. 1). Тогда для любой непрерывной в области V функции $f(x, y, z)$ имеет место формула

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy,$$

сводящая вычисление тройного интеграла к вычислению двойного интеграла от однократного. При этом сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной z при постоянных x и y. Нижней границей интеграла по z является аппликата точки A – точки входа прямой, параллельной оси Oz в область V, т.е. $z = z_1(x, y)$; верхней границей – аппликата точки B – точки выхода прямой из области V, т.е. $z = z_2(x, y)$. Результат вычисления этого интеграла есть функция двух переменных: x и y.

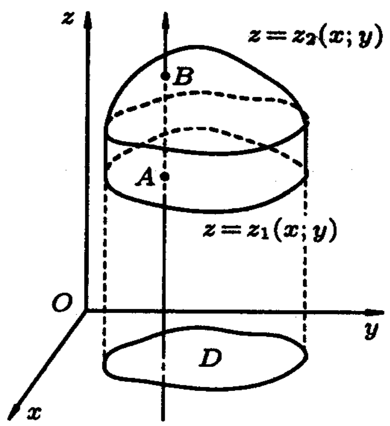


Рис. 1

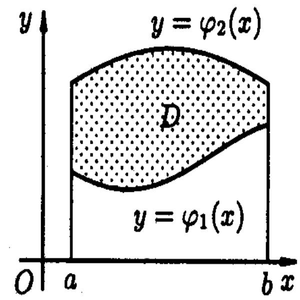


Рис. 2

Если область D ограничена линиями $x=a$, $x=b$ ($a<b$), $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, причем $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ (рис. 2), то, переходя от двойного интеграла по области D к повторному, получаем формулу

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \,. \qquad (1)$$

Примеры решения задач

1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y xyz\ dz$.

Решение. Найдем последовательно все три интеграла:

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y xyz\ dz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x \left(xy\frac{z^2}{2}\Big|_0^y \right)dy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x xy\frac{y^2}{2}dy =$$

$$= \int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^x \frac{y^3}{2}dy = \int\limits_0^1 x\frac{y^4}{8}\Big|_0^x dx = \int\limits_0^1 \frac{x^5}{8}dx = \frac{1}{48}.$$

Ответ: $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y xyz\ dz = \frac{1}{48}$.

2. Вычислить тройной интеграл по области *V*, ограниченной указанными поверхностями.

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}, \quad V: x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

Решение. Область интегрирования *V* представляет собой пирамиду, расположенную в первом квадранте (рис. 3, *а*). Сводим тройной интеграл к двойному по проекции области *V* на плоскость *Oxy*, выделяя интегрирование в направлении оси *Oz*

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = \iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

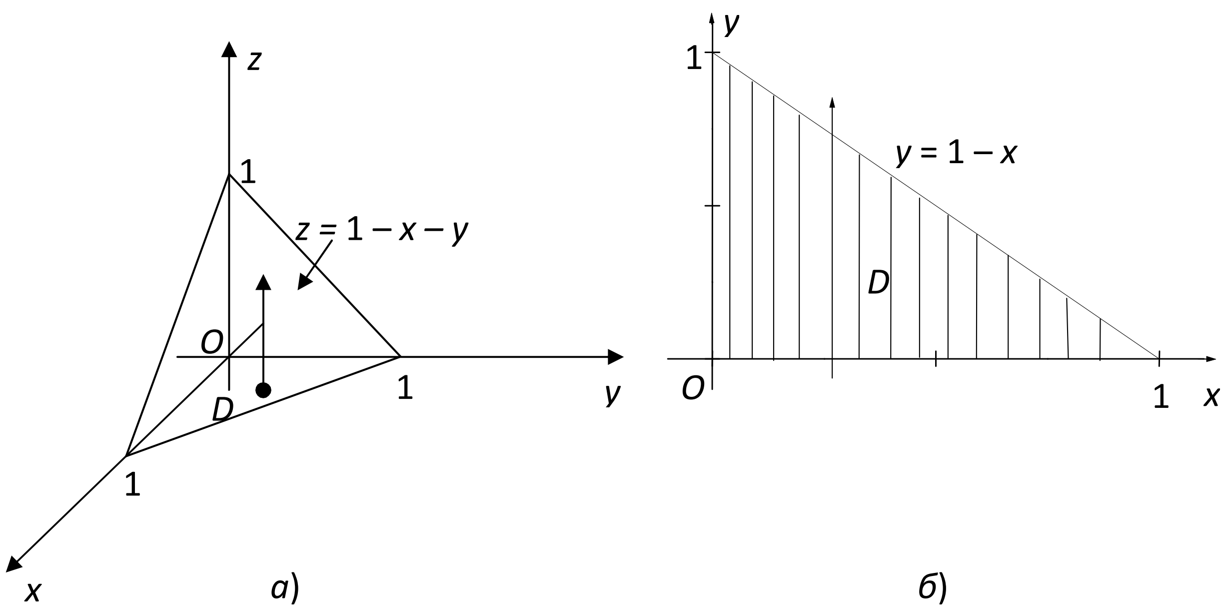


Рис. 3

Интегрируем по переменной z, считая x и y постоянными

$$\iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x-y} (1+x+y+z)^{-3} d(1+x+y+z) =$$

$$= \iint\limits_D \left.\frac{(1+x+y+z)^{-2}}{-2}\right|_{z=0}^{z=1-x-y} dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_D ((1+x+y)^{-2} - 2^{-2})dxdy\,.$$

Проекция D области интегрирования V изображена на рис. 3, *б* и представляет собой прямоугольный треугольник. Область D правильная в направлении Oy и представляется неравенствами $D = \left\{(x, y) : \begin{matrix} 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le x \le 1 \end{matrix}\right\}$. Переходим в двойном интеграле к повторному

$$\frac{1}{2}\iint\limits_D ((1+x+y)^{-2} - 2^{-2})dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1+x+y)^{-2} dy - \frac{1}{8}\cdot S_D =$$

{интегрируем по переменной y, считая x постоянной и учитываем, что площадь области D как прямоугольного треугольника равна $S_D = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$ }

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1+x+y)^{-2} d(1+x+y) - \frac{1}{16} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left.\frac{(1+x+y)^{-1}}{-1}\right|_{y=0}^{y=1-x} dx - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\right)dx - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}\left.\left(\ln(1+x) - \frac{x}{2}\right)\right|_0^1 - \frac{1}{16} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(\ln 1 - 0) - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}\,.$$

Ответ: $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$.

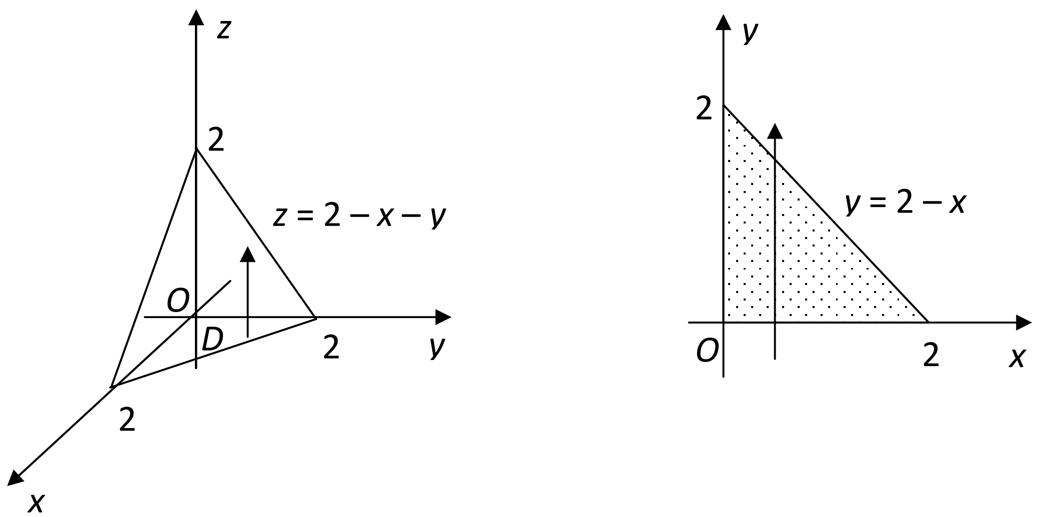
3. Вычислить $\iiint\limits_V (y+z)dxdydz$, где V: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 2$. (см. рис. 4, *а*).

Решение. Область V является правильной в направлении оси Oz. Ее проекция на плоскость Oxy является правильной в направлении оси Oy (рис. 4, б). Согласно формуле (1), имеем:

$$\iiint\limits_V (y+z)dxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_0^{2-x-y} (y+z)dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} \left(yz + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_{z=0}^{z=2-x-y} dy =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} \left(y(2-x-y) + \frac{1}{2}(2-x-y)^2 \right) dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} \left(2 - 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{8}{3} - 4x + 4x^2 - \frac{x^3}{3} \right) dx = \left(\frac{8}{3}x - 2x^2 + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{12} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{16}{3} - 8 + \frac{32}{3} - \frac{4}{3} = \frac{20}{3}.$$



а) *б*)

Рис. 4.

Ответ: $\iiint\limits_V (y+z)dxdydz = \frac{20}{3}$.

4. Вычислить $\iiint\limits_G 8y^2 z e^{-xyz} dxdydz$, где область G задается неравенствами $0 \le x \le 2, -1 \le y \le 0, 0 \le z \le 2$.

Решение: Область интегрирования - прямоугольный параллелепипед (рис. 5). Порядок интегрирования будем выбирать так, чтобы не интегрировать по частям.

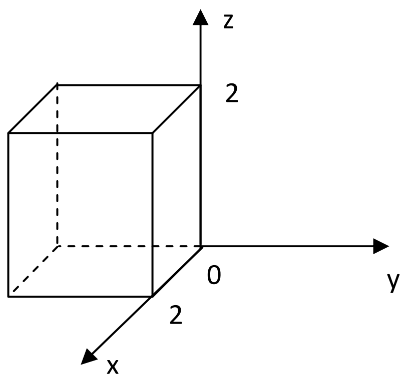


Рис. 5

$$\iiint\limits_G 8y^2ze^{-xyz}dxdydz = \int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{0}^{2}dz\int\limits_{0}^{2}8y^2ze^{-xyz}dx = \int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{0}^{2}\frac{8y^2ze^{-xyz}}{-yz}\Bigg|_{x=0}^{x=2}dz =$$

$$= -\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{0}^{2}8ye^{-xyz}\Bigg|_{x=0}^{x=2}dz = -\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{0}^{2}8y(e^{-2yz}-e^{0})dz =$$

$$= -8\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{0}^{2}(ye^{-2yz}-y)dz = -8\int\limits_{-1}^{0}\left(\frac{ye^{-2yz}}{-2y}-yz\right)\Bigg|_{z=0}^{z=2}dy =$$

$$= -8\int\limits_{-1}^{0}(\frac{e^{-4y}}{-2}-2y-\frac{e^{0}}{-2}+0)dy = -8\int\limits_{-1}^{0}(\frac{e^{-4y}}{-2}-2y+\frac{1}{2}y)\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$= -8\frac{e^{0}}{8}+8(\frac{e^{4}}{8}-1-\frac{1}{2}) = -1+e^{-4}-12 = e^{-4}-13\,.$$

Ответ: $\iiint\limits_G 8y^2ze^{-xyz}dxdydz = e^{-4}-13.$

5. Вычислить $\iiint\limits_G x^2\sin(4\pi xy)dxdydz;$ где область интегрирования G ограничена плоскостями $x=1;\ y=\dfrac{x}{2};\ z=0;\ z=8\pi.$

Решение. Изобразим область интегрирования графически в системе координат $Oxyz$ (рис. 6):

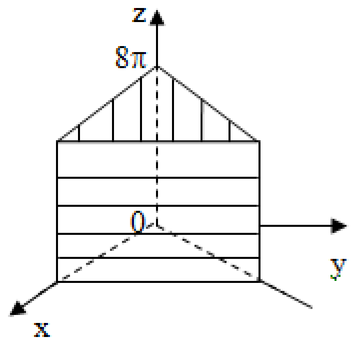


Рис. 6

Тогда,

$$\iiint\limits_G x^2 \sin(4\pi xy)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{8\pi} x^2 \sin(4\pi xy)dz.$$

Внутренний интеграл по z вычисляем, считая x и y постоянными:

$$\iint\limits_D x^2 \sin(4\pi xy)z\Big|_{z=0}^{z=8\pi} dxdy = 8\pi \iint\limits_D x^2 \sin(4\pi xy)dxdy.$$

Полученный двойной интеграл удобнее вычислять, интегрируя сначала по y, а затем по x, поскольку при этом не встретится интегрирование по частям.

$$8\pi \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\frac{x}{2}} x^2 \sin(4\pi xy)dy = -8\pi \int\limits_0^1 \frac{x^2 \cos(4\pi xy)}{4\pi x}\Bigg|_{y=0}^{y=\frac{x}{2}} dx = -2\int\limits_0^1 (x\cos\frac{4\pi x^2}{2} - x\cos 0)dx =$$

$$= -2\int\limits_0^1 (x\cos 2\pi x^2 - x)dx = -\int\limits_0^1 \cos 2\pi x^2 dx^2 + x^2\Big|_0^1 = \frac{-\sin 2\pi x^2}{2\pi}\Bigg|_0^1 + 1 = 1.$$

Ответ: $\iiint\limits_G x^2 \sin(4\pi xy)dxdydz = 1.$