ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 11

Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах

Для вычисления тройного интеграла часто используют *цилиндрические координаты* (ρ, φ, z), где ρ – длина радиус-вектора проекции точки M на плоскость Oxy, φ – угол, образованный этим радиус – вектором с осью Ox, z – аппликата точки M (рис. 1). Также часто используют с*ферические координаты* точки r, φ, θ, где r – длина радиус вектора точки M, φ – угол, образованный проекцией радиус-вектора $\overline{OM}$ на плоскость Oxy и осью Ox, θ – угол отклонения радиус-вектора $\overline{OM}$ от оси Oz (рис. 2).

Цилиндрические координаты (ρ, φ, z) точки связаны с ее декартовыми координатами x, y, z соотношениями: $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$. Тогда,

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\cdot \rho d\rho d\varphi dz.$$

Сферические координаты r, φ, θ связаны с декартовыми координатами x, y, z соотношениями: $x = r\cos\varphi\cdot\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\cdot\sin\theta$, $z = r\cos\theta$. Тогда,

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta.$$

Переходить к сферическим координатам удобно, когда область интегрирования V есть шар или его часть, а также, если подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2 + z^2)$.

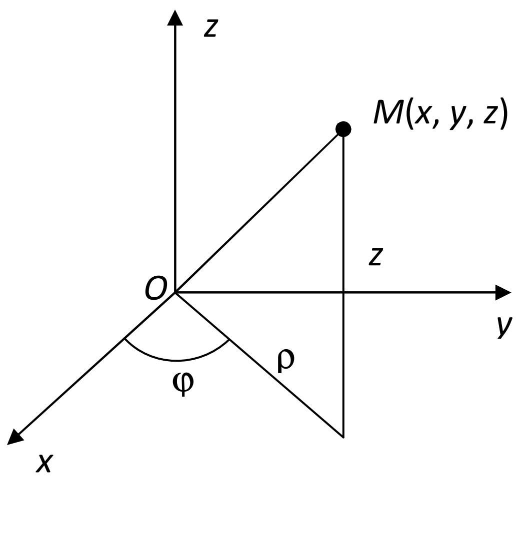

Рис. 1

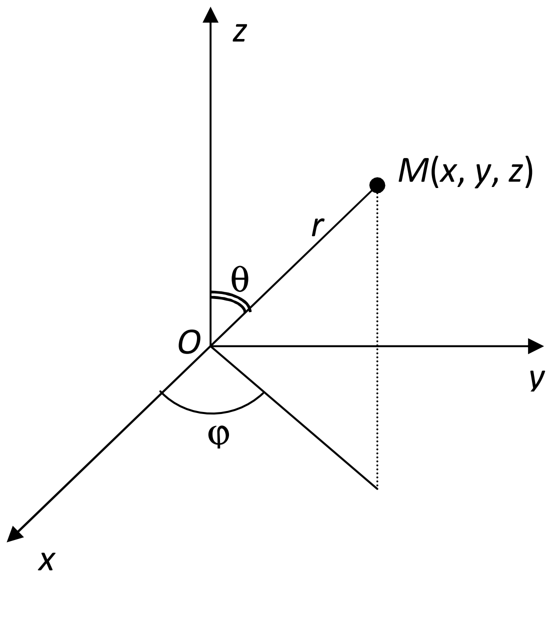

Рис. 2

Примеры решения задач

1. Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz,$$

где V – область, ограниченная верхней частью конуса $x^2+y^2=z^2$ и плоскостью $z = 1$.

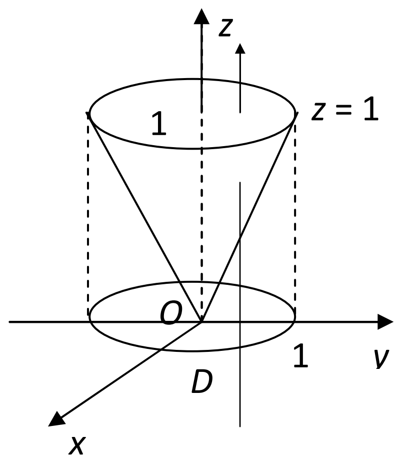

Рис. 3.

Решение. На рис. 3 изображена область интегрирования V. Вычислим интеграл путем перехода к цилиндрическим координатам. Уравнение конуса примет вид $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2=z^2 \Rightarrow z=\rho$. Уравнение окружности $x^2+y^2=1$ (границы области D) запишется как $\rho=1$. В результате область V^* определится неравенствами:

$$V^*=\left\{(\rho,\varphi,z): \begin{array}{r} \rho\le z\le 1, \\ 0\le\rho\le 1, \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{array}\right\}.$$

Таким образом,

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz=\iiint\limits_{V^*} z\cdot\rho\,d\varphi\,d\rho\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\,d\rho\int\limits_\rho^1 z\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\cdot\left.\frac{z^2}{2}\right|_\rho^1 d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(\rho-\rho^3)d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left.\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\right|_0^1 d\varphi=\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{8}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\iiint\limits_V z dxdydz = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Вычислить интеграл от функции $u = z\sqrt{x^2 + y^2}$ по области G, ограниченной поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = 1$.

Решение. Изобразим область интегрирования G (рис. 4):

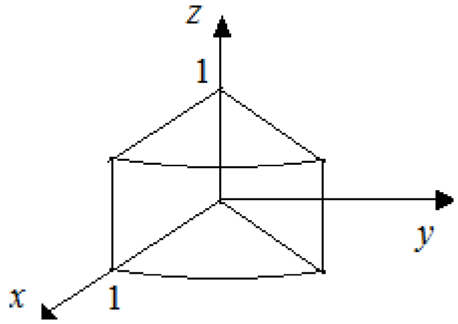

Рис. 4

Вычислим интеграл, переходя к цилиндрической системе координат

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2 + y^2} dxdydz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^1 r \cdot r dr \int\limits_0^1 z dz = \left(\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right)\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{24}.$$

Ответ: $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2 + y^2} dxdydz = \dfrac{\pi}{24}$.

3. Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V x dxdydz,$$

где V – область, ограниченная параболоидом $x^2 + y^2 = h \cdot z$ и плоскостью $z = h$.

Решение. Изобразим область интегрирования V (рис. 5):

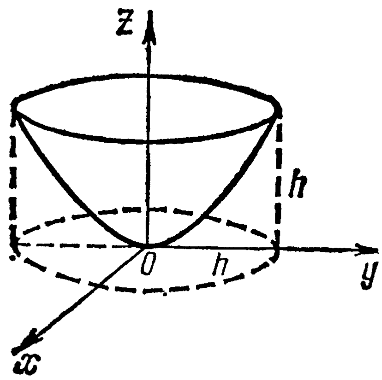

Рис. 5

Данное тело ограничено снизу параболоидом $z=\frac{1}{h}(x^2+y^2)$, сверху плоскостью $z = h$. Проекцией данного тела на плоскость Oxy является круг $x^2+y^2\le h^2$. Используем цилиндрические координаты, в которых уравнение параболоида примет вид $z=\frac{r^2}{h}$. Тогда,

$$\iiint\limits_V xdxdydz = \int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^h r^2dr\int\limits_{\frac{r^2}{h}}^h dz = \int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^h r^2(h-\frac{r^2}{h})dr = \int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^h (hr^2-\frac{r^4}{h})dr =$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\cdot\left(h\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5h}\right)\Bigg|_0^h=\left(\frac{h^4}{3}-\frac{h^4}{5}\right)\cdot\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}=0.$$

Ответ: $\iiint\limits_V xdxdydz=0$.

4. Вычислить

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz,$$

где V – область, ограниченная верхней частью сферы $x^2+y^2+z^2=36$ и верхней частью конуса $\frac{x^2+y^2}{3}=z^2$.

Решение. Область интегрирования V изображена на рис. 6. Переходим к сферическим координатам, тогда уравнение сферы примет вид

$$r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta=r^2=36\Rightarrow r=6,$$

а из уравнения конуса получим $\frac{1}{3}\sin^2\theta=\cos^2\theta\Rightarrow \mathrm{tg}\,\theta=\pm\sqrt{3}\Rightarrow\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{2\pi}{3}$. Область V^* определится неравенствами

$$V^*=\left\{(r,\theta,\varphi):\begin{matrix}0\le r\le 6,\\ \frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{2\pi}{3},\\ 0\le\varphi\le 2\pi.\end{matrix}\right\}.$$

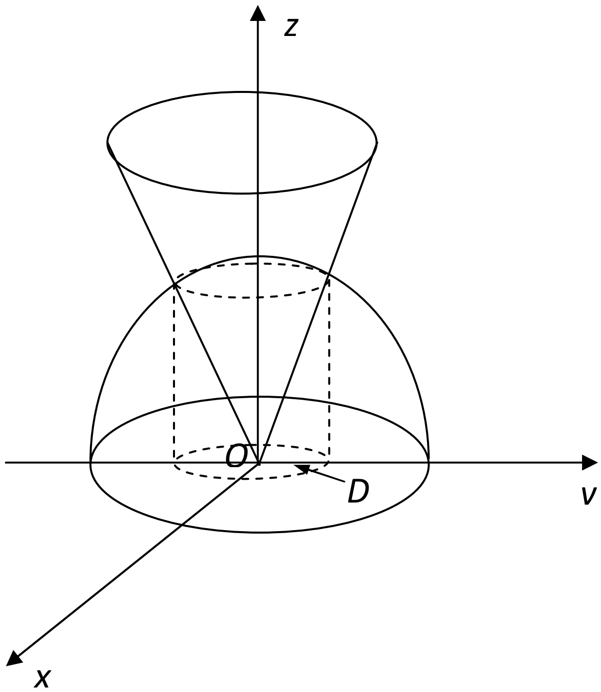

Рис. 6.

Таким образом,

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} r^2 \cdot r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin\theta d\theta \int\limits_0^6 r^4 dr =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos\theta)\Big|_{\pi/3}^{2\pi/3} \cdot \frac{r^5}{5}\Bigg|_0^6 = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{6^5}{5} = \frac{15552}{5}\pi .$$

Ответ: $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \dfrac{15552}{5}\pi$.

5. Переходя к сферическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 dxdydz,$$

если область интегрирования V ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=1$.

Решение. Областью интегрирования является сфера с центром в точке (0,0,0) и радиусом равным 1. Перейдем к сферическим координатам:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^1 r^6 r^2 \sin\theta dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^1 r^8 dr = \varphi\Big|_0^{2\pi} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} \frac{r^9}{9}\Big|_0^1 = \frac{4\pi}{9} .$$

Ответ: $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 dxdydz = \dfrac{4\pi}{9}$.