ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы от тригонометрических функций во многих ситуациях удаётся рационализировать либо существенно упростить. Рассмотрим некоторые наиболее типичные случаи.

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R – рациональная функция (функция с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия – сложение, вычитание, умножение и деление), приводятся к интегралам от рациональных дробей с помощью т. н. *универсальной тригонометрической подстановки* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. При этом

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

т. е. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$.

Хотя универсальная подстановка позволяет найти любой интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, однако в большинстве случаев она приводит к чересчур громоздким вычислениям, и тогда удобнее пользоваться другими, более эффективными подстановками. Тем не менее, некоторые интегралы наиболее быстро считаются именно с помощью этой подстановки. В частности, это относится к интегралам вида $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$, где a или b не равны нулю.

2. Интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x)\,dx$, где R – рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных дробей с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} x$. При этом

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},$$

т. е. $\int R(\operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x)\,dx = \int R\left(t, \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt$.

3. Интегралы вида $\int f(\sin x)\cos x\,dx$ и $\int f(\cos x)\sin x\,dx$, где f – некоторая (не обязательно рациональная!) функция, вычисляются с помощью подстановок $t = \sin x$ и $t = \cos x$ соответственно. При этом

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(\sin x)\,d(\sin x) = [t = \sin x] = \int f(t)dt,$$

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx = -\int f(\cos x)\,d(\cos x) = [t = \cos x] = -\int f(t)dt.$$

4. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$.

Выделим здесь два важных случая.

а) Если среди m и n есть нечётное число, то интеграл приводится к одному из указанных в п. 3, например, если $m = 2k+1$, то

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \int \sin^{2k+1} x \cos^n x\,dx = \int (\sin^2 x)^k \cos^n x \sin x\,dx =$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x\,d(\cos x) = [t = \cos x] = -\int (1-t^2)^k t^n\,dt.$$

б) Если оба числа m и n – чётные, то следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью формул

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

5. Интегралы типа $\int \sin ax \cdot \cos bx\,dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx\,dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx\,dx$ вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

Примеры решения задач

1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x - 5}$.

Решение.

Воспользуемся универсальной подстановкой (случай 1):

$$\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x - 5} = \left[t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} - 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} - 5} =$$

$$= \int \frac{2dt}{8t - 3(1-t^2) - 5(1+t^2)} = -\int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} = -\int \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{1}{t-2} + C =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2} + C$$

2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

Решение.

Это интеграл вида 2. Применим подстановку $t = \operatorname{tg} x$. Тогда

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=[t=\operatorname{tg}x]=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{1+2t^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\frac{1}{2}+t^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C$$

3. Найти интегралы: а) $\int\sin^3 x\sqrt{\cos x}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\sin 2x}$.

Решение:

Оба интеграла приводятся к виду 3.

а) $\int\sin^3 x\sqrt{\cos x}\,dx=\int\sin^2 x\sqrt{\cos x}\sin x\,dx=-\int(1-\cos^2 x)\sqrt{\cos x}\sin x\,dx=$

$$=\begin{bmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx\end{bmatrix}=\int(1-t^2)\sqrt{t}\,(-dt)=\int(t^2\sqrt{t}-\sqrt{t})dt=\int(t^{\frac{5}{2}}-t^{\frac{1}{2}})dt=$$

$$=\frac{t^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}-\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{7}\sqrt{\cos^7 x}-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+C.$$

б) $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)}=\begin{bmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2(1-t^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{1-t^2}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)+C=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|-\frac{2}{\sin x}\right)+C.$$

4. Найти интегралы: а) $\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx$; б) $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$.

Решение.

Это интегралы типа 4.

а) $\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx = \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x\, dx =$

$$= \int \sin^4 x (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{bmatrix} = \int t^4 (1-t^2)^2\, dt =$$

$$= \int t^4 (1-2t^2+t^4)\, dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8)\, dt = \frac{t^5}{5} - 2\cdot\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$$

б) $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\, dx = \frac{1}{8}\left(\int dx - \int \cos 4x\, dx\right) =$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C.$$

5. Найти интеграл $\int \cos 5x \cdot \cos 3x\, dx$.

Решение.

Это интеграл типа 5.

$$\int \cos 5x \cdot \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \cos 8x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\int \cos 2x\, dx + \int \cos 8x\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 8x}{8}\right) + C = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$