ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7

Несобственные интегралы

Несобственными называются интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы 1-го рода) и интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы 2-го рода).

Несобственные интегралы 1-го рода определяются следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx; \qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx,$$

где c – произвольное число.

Эти интегралы называются *сходящимися*, если существуют конечные пределы в правых частях равенств. Если же указанные пределы не существуют или бесконечны, то соответствующие интегралы называются *расходящимися*.

Несобственные интегралы 2-го рода определяются следующим образом:

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, если функция $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв при $x = b$;

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, если функция $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв при $x = a$;

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx,$$ если функция $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$, $a < c < b$.

Критерии сходимости формулируются для интегралов вида $\int_a^{+\infty} f(x)dx$; для других несобственных интегралов справедливы аналогичные утверждения.

1. Если на промежутке $[a, +\infty)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию $0 \le f(x) \le g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны и существует предел $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, $0 < K < \infty$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся.

В качестве *функции сравнения* в случае $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ особенно удобно использовать функцию $g(x) = \frac{1}{x^p}$ ($p > 0$), а в случае интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от неограниченной в окрестности точки $x = b$ функции – функцию $g(x) = \frac{1}{(b-x)^p}$. Можно показать (см. лекции!), что *интеграл* $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$

сходится при $p > 1$ *и расходится при* $p \le 1$, *а интеграл* $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ *(как и интеграл* $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$*) сходится при* $p < 1$ *и расходится при* $p \ge 1$.

Примеры решения задач

1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: а) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\, dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$.

Решение.

а) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\, dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b \cos x\, dx = \lim\limits_{b\to\infty} \sin x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim\limits_{b\to\infty} \sin b$

Такой предел не существует. Следовательно, несобственный интеграл расходится.

б) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^{-1} = -\lim\limits_{a\to-\infty} \left(-1 - \frac{1}{a}\right) = 1$,

т. е. несобственный интеграл сходится и его значение равно 1.

в) Подынтегральная функция – чётная, поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2} = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2} = 2\cdot \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{4+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{b}{2} = \frac{\pi}{2}$$

то есть интеграл сходится и его значение равно $\pi/2$.

2. Исследовать на сходимость интегралы: а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$;

б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$.

Решение.

а) Здесь $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}>0$ при $x\in[1:+\infty)$, при этом $\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Но интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ расходится ($p=\frac{2}{3}<1$). Поэтому, согласно признаку сравнения 1, интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ расходится.

б) Здесь $f(x)=\frac{1}{2+x+3x^5}>0$ при $x\in[1:+\infty)$. Рассмотрим функцию $g(x)=\frac{1}{x^5}$, интеграл от которой $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$ сходится ($p=5>1$). А так как существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^5}{2+x+3x^5}=\frac{1}{3}\neq 0$, то интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$ также сходится (признак сравнения 2).

3. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x}$; б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; в) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Решение.

а) Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x}$ в точке $x=0$ неограниченна, поэтому

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = +\infty,$$

т. е. несобственный интеграл расходится.

б) Подынтегральная функция терпит разрыв при $x = 3$. Поэтому

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\frac{x}{3}\Big|_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\frac{3-\varepsilon}{3} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

т. е. интеграл сходится и его значение равно $\frac{\pi}{2}$.

в) Подынтегральная функция терпит разрыв при $x = 1$. Поэтому

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1}^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{1+\varepsilon_2}^{2} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} =$$

$$= 3\cdot\lim_{\varepsilon_1\to 0}(x-1)^{1/3}\Big|_{-1}^{1-\varepsilon_1} + 3\cdot\lim_{\varepsilon_2\to 0}(x-1)^{1/3}\Big|_{1+\varepsilon_2}^{2} =$$

$$= 3\cdot\lim_{\varepsilon_1\to 0}(\sqrt[3]{-\varepsilon_1} - \sqrt[3]{-2}) + 3\cdot\lim_{\varepsilon_2\to 0}(1 - \sqrt[3]{\varepsilon_2}) = 3\sqrt[3]{2} + 3,$$

т. е. интеграл сходится.

4. Исследовать на сходимость интегралы: а) $\int_0^1 \frac{dx}{3x^2 + \sqrt[3]{x}}$; б) $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}dx$.

Решение.

а) Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{1}{3x^2+\sqrt[3]{x}}>0$ при $x\in(0;1]$ и неограниченна в точке $x=0$, при этом $\dfrac{1}{3x^2+\sqrt[3]{x}}<\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Но интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится ($p=\dfrac{1}{3}<1$). Поэтому, согласно признаку сравнения 1, интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$ также сходится.

б) Функция $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$ терпит бесконечный разрыв в точке $x=1$. Перепишем её в виде $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{(1+x)^{2/3}}\cdot\dfrac{1}{(1-x)^{2/3}}$ и сравним с функцией $g(x)=\dfrac{1}{(1-x)^{2/3}}$. Интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{(1-x)^{2/3}}$ сходится ($p=\dfrac{2}{3}<1$). Так как

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\cos^2 x}{(1+x)^{2/3}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{2/3}}\cdot\frac{(1-x)^{2/3}}{1}=\frac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{4}}\neq0,$$

то, согласно предельному признаку сравнения 2, интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}dx$ также сходится.